

# 具有轴承不对中的多跨柔性转子系统非线性动力学研究\*

李明 阿梅

(西安科技大学力学系,西安 710054)

**摘要** 主要研究了具有不对中轴承支承的柔性多转子耦合系统的动力学建模和非线性动力学行为. 首先在短轴承假设、小轴承的不对中量和圆盘不平衡量等几个基本假设条件下,考虑了转子的柔度、不对中轴承的非线性油膜力和圆盘的不平衡等因素后,建立了一个具有轴承不对中的10自由度多跨转子系统非线性动力学模型;最后采用数值方法研究了系统的非线性动力学行为. 结果显示转子在低转速时,为同步的周期1运动,随着转速的提高,出现整数倍频的振动分量;在转速较高时,转子运动回复到周期1运动状态.

**关键词** 多跨柔性转子, 轴承不对中, 非线性油膜力, 非线性动力学

## 引言

滑动轴承支承的多转子系统是高速旋转机械的核心部件,轴承不对中在实际的工程中是比较常见的<sup>[1-3]</sup>,它导致系统运转噪音增大,使用寿命缩短,危害极大. 对于滑动轴承的不对中或不同心将改变转子在轴承中的几何位置,有可能造成轴承动态油膜力急剧变化,从而影响整个转子—轴承系统的动力学行为. 在有关轴承不对中系统的动力学研究中,文献[1]研究了轴向不对中流体动力润滑轴承的非线性动力特性的影响;文献[2]从理论上对混合径向不对中轴承的润滑性能进行研究,结果表明径向不对中严重影响了轴承的动力特性;文献[3]研究了具有不对中转子—轴承系统的稳定性问题;文献[4]则分析在不同温度条件下具有不对中的可倾瓦轴承的静动态特性;文献[5,6]重点讨论了径向不对中多孔径向轴承润滑特性的建模和对轴承的压力分布、承载能力、摩擦系数、侧泄漏流和不对中力矩的影响;文献[7,8]考虑了由于转子变形引起的不对中,分析了流体动力润滑轴承特性的变化;文献[9]讨论了在不同 Sommerfeld 数时转子转角不对中对轴承摩擦磨损的影响;文献[10]研究了考虑表面粗糙度和径向不对中时双叶径向轴承的润滑特性;文献[11]通过数值分析认为轴承不对中影响几乎所有的轴承特性参数;而文献[12]则基于有限元方法分析了由短轴承支承的转

子不对中系统的动力学特性.

上述研究大多集中在轴承的动力润滑特性上,而对于具有轴承不对中引起的转子系统的动力学问题的研究相对较少. 实际上对于负荷较大的轴承油膜力大多会呈现出强非线性特性,在不平衡扰动力作用下,有时可导致转子出现可数谐波响应和高次谐波响应<sup>[13]</sup>,因此研究具有不对中轴承支承系统的动力学行为具有重要意义.

## 1 具有轴承不对中转子系统的动力学模型

图1为具有轴承不对中的转子系统示意图,坐标系统如图1b所示. 为方便问题的讨论,现作如下基本假设:(1)转子—轴承系统为一非对称结构;(2)所有轴承满足短轴承理论假设;(3)中间轴承在垂直方向存在一个微小的轴承不对中量 $\delta$ . 图中 $m$ 、 $M$ 分别为集中质量 $m_b$ 为轴承处的集中质量; $x$ 、 $y$ 为集中质量点的坐标; $k$ 为转子刚度; $a$ 为圆盘的质量偏心; $\Omega$ 为转子的转动角速度, $t$ 为时间.

### 1.1 运动方程

对于图1所示系统,在略去圆盘偏角运动等因素后,根据牛顿定律其运动方程可表示为

$$\begin{aligned} m_b \ddot{z}_1 &= F_{1z} - k(z_1 - z_2) + G_b \\ M \ddot{z}_2 &= -k(z_2 - z_1) - k(z_2 - z_3) + \\ & G_M + M a_M \Omega^2 e^{i\Omega t} \\ 2m_b \ddot{z}_3 &= F_{3z} - k(z_3 - z_2) - k(z_3 - z_4) + 2G_b \\ m \ddot{z}_4 &= -k(z_4 - z_3) - k(z_4 - z_5) + \end{aligned}$$

$$G_m + ma_m \Omega^2 e^{i(\Omega t + \theta)}$$

$$m_b \ddot{z}_5 = F_{5z} - k(z_5 - z_4) + G_b \quad (1)$$

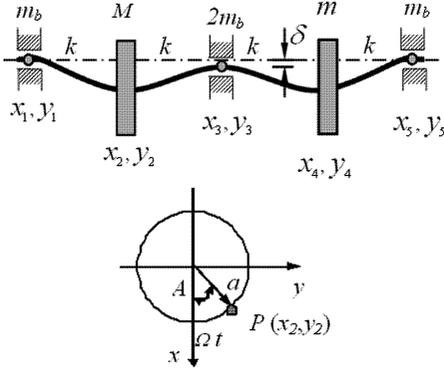


图1 具有轴承不对中的转子系统:(a)轴承-转子系统;(b)坐标系

Fig.1 The rotor system with bearing misalignment;  
(a)The rotor - bearing system; (b) Coordinate system

其中  $z = x + iy$ ,  $M$  和  $m$  分别为左右圆盘的质量,  $m_b$  为轴承处的等效质量,  $k$  为轴段的刚度,  $a_M$  和  $a_m$  为左右圆盘的质量偏心距,  $\theta$  为左右圆盘质量偏心距向量间的夹角,  $\Omega$  为转子的转速,  $F_{1x}$ 、 $F_{1y}$ 、 $F_{3x}$ 、 $F_{3y}$ 、 $F_{5x}$ 、 $F_{5y}$  分别为轴承的油膜力在  $x$  和  $y$  方向上的分量;  $G_b$ 、 $G_M$ 、 $G_m$  分别表示轴承及圆盘处的外力, 如果仅考虑重力作用, 则只需施加在  $x$  方向. 上述系统为一个 10 自由度系统, 如果考虑了圆盘的偏角位移则自由度数要增加.

### 1.2 非线性油膜力

当外扰动较大或者研究线性失稳后转子轴心的运动时, 则需要考虑油膜力与位移、速度之间的非线性关系. 然而关于非线性油膜力作用下转子系统的动力学分析是一个十分复杂的流固耦合问题, 如果不引入一些假设条件, 即所谓的无限长轴承假设或无限短轴承假设, 要求解出非线性油膜力的解析表达式是十分困难的.

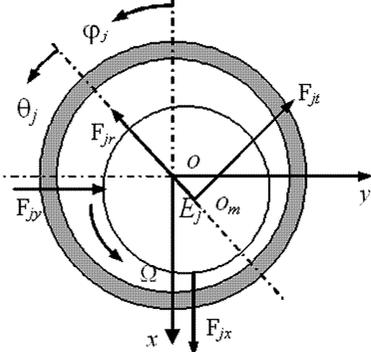


图2 油膜轴承示意图

Fig.2 The oil film bearing

对于如图 2 所示的滑动油膜轴承, 如果采用短轴承假设, 其油膜压力  $p$  所满足的 Reynolds 方程可表示为

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} (\Omega - 2\dot{\varphi}) \frac{\partial h}{\partial \theta} + \dot{e} \cos \theta \quad (2)$$

式中  $h = c + e \cos \theta$  为轴承的油膜厚度;  $e$  和  $\varphi$  分别为轴颈的平衡位置;  $z$  为轴承的轴向位置坐标;  $\theta$  为圆周方向位置坐标;  $\mu$  为润滑油粘度;  $R$  为轴承半径;  $B$  为轴承长度;  $\Omega$  为转子转速;  $c$  为轴承径向间隙;  $\varepsilon$  为轴颈偏心率. 将油膜压力  $p$  沿轴承表面积分, 并应用边界条件  $p|_{z=-B/2} = p|_{z=B/2} = 0$  和半 Sommerfeld 条件, 可以得到油膜力沿径向和切向两个方向的分量, 它们分别为

$$F_{jr} = 2\mu BR \left( \frac{R}{c} \right)^2 \left( \frac{B}{2R} \right)^2 \times$$

$$\left[ (\Omega - 2 \frac{d\varphi_j}{dt}) G_{1j} + 2 \frac{d\varphi_j \varepsilon_j}{dt} G_{2j} \right]$$

$$F_{jt} = 2\mu BR \left( \frac{R}{c} \right)^2 \left( \frac{B}{2R} \right)^2 \times$$

$$\left[ (\Omega - 2 \frac{d\varphi_j}{dt}) G_{3j} + 2 \frac{d\varphi_j \varepsilon_j}{dt} G_{4j} \right] \quad j = 1, 3 \quad (3)$$

其中

$$G_{1j} = \frac{2\varepsilon_j^2}{(1 - \varepsilon_j^2)^2}, \quad G_{2j} = \frac{\pi(1 + 2\varepsilon_j^2)}{2(1 - \varepsilon_j^2)^{5/2}}$$

$$G_{3j} = \frac{\pi\varepsilon_j}{2(1 - \varepsilon_j^2)^{3/2}}, \quad G_{4j} = \frac{2\varepsilon_j}{(1 - \varepsilon_j^2)^2}$$

将式(3)变换到  $oxy$  坐标系中, 可得

$$\begin{cases} F_{jx}(x_j, y_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j) = -F_{jr} \cos \varphi_j - F_{jt} \sin \varphi_j \\ F_{jy}(x_j, y_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j) = -F_{jr} \sin \varphi_j + F_{jt} \cos \varphi_j \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\cos \varphi_j = \frac{x_j}{e_j}, \quad \sin \varphi_j = \frac{y_j}{e_j}, \quad e_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2}$$

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = \frac{\dot{y}_j x_j - \dot{x}_j y_j}{e_j^2}, \quad \frac{de_j}{dt} = \frac{x_j \dot{x}_j + y_j \dot{y}_j}{e_j}$$

轴承力的二个分量  $F_{jx}(x_j, y_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j)$ 、 $F_{jy}(x_j, y_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j)$  分别是转子的横向位移及其速度的函数. 当中间轴承具有不对中量  $\delta$  时, 其油膜力分量可表示为

$$\begin{cases} F_{3x} = F_{3x}(x_3 - \delta_x, y_3 - \delta_y, \dot{x}_3, \dot{y}_3) \\ F_{3y} = F_{3y}(x_3 - \delta_x, y_3 - \delta_y, \dot{x}_3, \dot{y}_3) \end{cases} \quad (5)$$

其中  $\delta_x$  和  $\delta_y$  分别为  $x$  和  $y$  方向的分量.

### 1.3 无量纲运动方程

为使以下的分析具有更广泛的适用性, 利用滑

动轴承的特征尺寸—轴承的间隙  $c$ , 将方程式(1)进行无量纲化, 为此引入无量纲量

$$\begin{aligned} \bar{z}_j &= z_j/c, \bar{x}_j = x_j/c, \bar{y}_j = y_j/c, n_M = M/m_b, \\ n_m &= m/m_b, \alpha_i = a_i/c, \Delta_i = \delta_i/c, \omega = \Omega\sqrt{c/g}, \\ f_{jz} &= F_{jz}/m_b g, f_{jx} = F_{jx}/m_b g, f_{jy} = F_{jy}/m_b g, \\ f_{jr} &= F_{jr}/m_b g, f_{jt} = F_{jt}/m_b g, K = kc/m_b g, \\ g_b &= G_b/m_b g, g_i = G_i/m_b g, \tau = \Omega t, \\ j &= 1, 2, 3, 4, 5. \quad i = M, m \end{aligned} \quad (6)$$

并记  $dx/dt = \dot{x}$ ,  $dx/d\tau = x'$ ,  $\dots$ , 则无量纲化后的运动方程为

$$\begin{aligned} \bar{z}_1'' &= \frac{1}{\omega^2} f_{1z} - \frac{1}{\omega^2} K(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + \frac{g_b}{\omega^2} \\ \bar{z}_2'' &= -\frac{1}{n_m \omega^2} K(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \frac{1}{n_m \omega^2} K(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) + \\ &\quad \frac{g_M}{n_M \omega^2} + \alpha_M e^{i(\tau+\theta)} \\ \bar{z}_3'' &= \frac{1}{2\omega^2} f_{3z} - \frac{1}{2\omega^2} K(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) - \frac{1}{2\omega^2} K(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) + \frac{g_b}{\omega^2} \\ \bar{z}_4'' &= -\frac{1}{n_m \omega^2} K(\bar{z}_4 - \bar{z}_3) - \frac{1}{n_m \omega^2} K(\bar{z}_4 - \bar{z}_5) + \\ &\quad \frac{g_m}{n_M \omega^2} + \alpha_m e^{i(\tau+\theta)} \\ \bar{z}_5'' &= \frac{1}{\omega^2} f_{5z} - \frac{1}{\omega^2} K(\bar{z}_5 - \bar{z}_4) + \frac{g_b}{\omega^2} \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\bar{z}_j = \bar{x}_j + i\bar{y}_j$ .  $x$  和  $y$  方向的无量纲轴承油膜力分量

$$\begin{aligned} f_{jx} &= -f_{jr} \cos\varphi - f_{jt} \sin\varphi \\ f_{jy} &= -f_{jr} \sin\varphi + f_{jt} \cos\varphi \end{aligned} \quad j = 1, 3, 5 \quad (8)$$

径向和切向的无量纲轴承油膜力分量

$$\begin{aligned} f_{jr} &= \sigma \lambda^2 \omega [(1 - 2\varphi'_i) G_{i1} + 2\varepsilon'_i G_{i2}] / 3 \\ f_{jt} &= \sigma \lambda^2 \omega [(1 - 2\varphi'_i) G_{i3} + 2\varepsilon'_i G_{i4}] / 3 \end{aligned} \quad j = 1, 3, 5 \quad (9)$$

其中  $\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{m_b \sqrt{gc}}$ ,  $\bar{\sigma} = \frac{6\mu BR^3}{c^2}$  为 Sommerfeld 数,  $\lambda =$

$\frac{B}{2R}$  为轴承的长径比.

方程(8)是非自治系统, 其状态方程可表示为

$$\bar{z}'_1 = Z_1, \bar{z}'_2 = Z_2, \bar{z}'_3 = Z_3, \bar{z}'_4 = Z_4, \bar{z}'_5 = Z_5$$

$$Z'_1 = \frac{1}{\omega^2} f_{1z} - \frac{1}{\omega^2} K(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + \frac{g_b}{\omega^2}$$

$$Z'_2 = -\frac{1}{n_m \omega^2} K(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \frac{1}{n_m \omega^2} K(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) +$$

$$\frac{g_M}{n_M \omega^2} + \alpha_M e^{i(\tau+\theta)}$$

$$Z'_3 = \frac{1}{2\omega^2} f_{3z} - \frac{1}{2\omega^2} K(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) - \frac{1}{2\omega^2} K(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) + \frac{g_b}{\omega^2}$$

$$Z'_4 = -\frac{1}{n_m \omega^2} K(\bar{z}_4 - \bar{z}_3) - \frac{1}{n_m \omega^2} K(\bar{z}_4 - \bar{z}_5) +$$

$$\frac{g_m}{n_M \omega^2} + \alpha_m e^{i(\tau+\theta)}$$

$$Z'_5 = \frac{1}{\omega^2} f_{5z} - \frac{1}{\omega^2} K(\bar{z}_5 - \bar{z}_4) + \frac{g_b}{\omega^2} \quad (10)$$

其中  $\omega$ 、 $K$ 、 $n_M$ 、 $n_m$ 、 $\alpha_M$ 、 $\alpha_m$  分别表示为无量纲转速、无量纲刚度、质量比和质量偏心率,  $\Delta$  为无量纲轴承不对中量; 方程(10)中的非线性油膜力分量  $f_{1z}$ 、 $f_{3z}$ 、 $f_{5z}$  具有强非线性特性. 如果仅考虑转子及圆盘的重力, 则在式(10)相应于  $x$  方向的运动方程中, 应令  $g_b = 1$ ,  $g_M/n_M = 1$ ,  $g_m/n_m = 1$ ,  $y$  方向中的各项应为零.

## 2 具有轴承不对中转子的动力学研究

式(10)也是一个具有强非线性特征的 10 自由度的振动系统, 无解析解, 即使采用近似方法求解也会遇到很到的困难, 比较可行的是采用数值方法求解. 图 3 为在系统参数:

$$\sigma = 3.0, \delta = 0.05, \alpha_m = 0.1, K = 15,$$

$$n_M = 10, n_m = 8, \lambda = 0.2$$

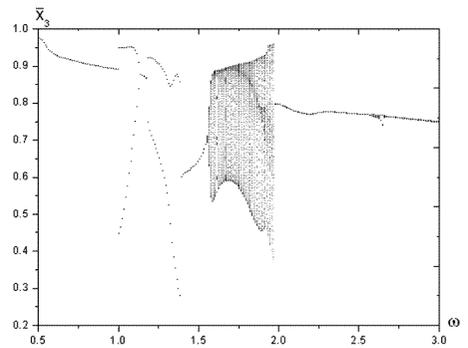


图3 稳态响应随转速变化的分叉图

Fig. 3 The bifurcation diagram of steady-state response with the parameter  $\omega = 0.5 - 3$

时采用 4-5 阶变步长 Runge-Kutta 法求得的稳态响应随转速变化的分叉图. 计算结果表明: 对于具有不对中滑动轴承支承的转子系统, 在转速  $\omega = 0.5 - 1.01$  时, 系统为周期 1 运动; 当  $\omega = 1.01$  到 1.39 时, 系统发生倍周期分叉, 系统表现为周期 2 运动; 当  $\omega = 1.39 - 1.56$  时, 系统的运动出现反复, 又回到周期 1 运动, 而  $\omega = 1.56 - 1.97$  时, 系统为则成为准周期运动; 当系统在  $\omega = 1.97 - 2.58$  区间,

系统再次出现周期1运动,在 $\omega = 2.58 - 2.65$ 时,系统又进入准周期运动;在 $\omega = 2.66 - 3.0$ 时系统又回到周期1运动.图4为 $\omega = 1.2$ 时系统的运动状态.从Poincaré截面可以看出,系统运动为两个孤立的点,即系统出现周期2运动,从频谱图可以看出,系统出现 $2f, 3f$ ,等成分,同时还有振幅比较小的组合频率振动成分,轴心轨迹曲率变化较大,说明此时转子运动极不平顺.图5为 $\omega = 1.8$ 时系统的运动状态,从Poincaré截面可以看出,截面呈一个闭环,即系统此时为准周期运动.轴心轨迹曲率变化较大,且被限制在一个闭域内.从位移频谱图可以看出,工频和一些组合频率成分十分明显,这些组合频率成分的存在是非线性系统所特有的,情况十分复杂.

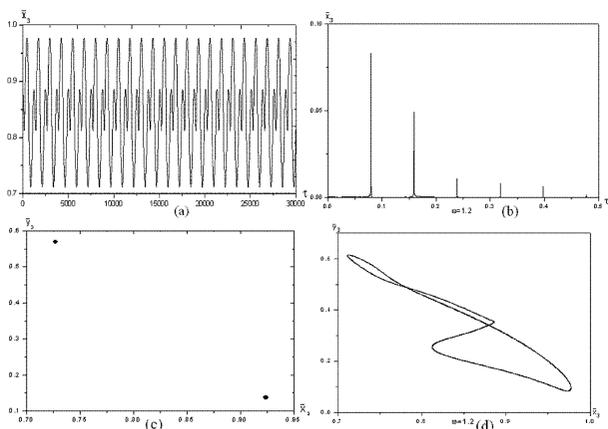


图4  $\omega = 1.2$ 时情况:(a)位移响应;(b)位移响应频谱图;  
(c)Poincaré截面;(d)轴心轨迹

Fig.4 The case when  $\omega = 1.2$ : (a) displacement response;  
(b) spectrum diagram;(c) rotor orbit and (d) Poincaré section

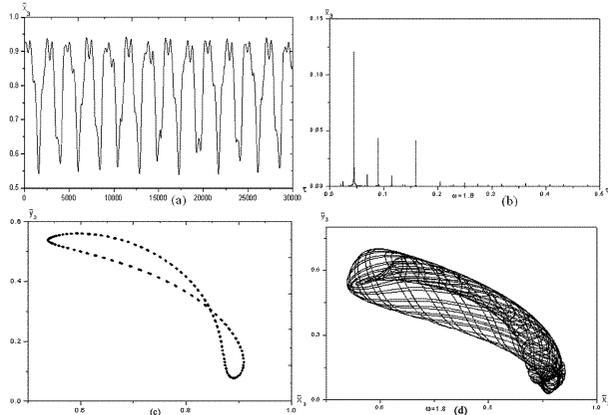


图5  $\omega = 1.8$ 时情况:(a)位移响应;(b)位移响应频谱图;  
(c)Poincaré截面;(d)轴心轨迹

Fig.5 The case when  $\omega = 1.8$ : (a) displacement response;  
(b) spectrum diagram;(c) rotor orbit and (d) Poincaré section

### 3 结论

滑动轴承支承的多转子系统是旋转机械的核心部件,在实际工程中,由于制造、安装和运行等多情况会造成轴承不对中或不同心故障,因此研究具有轴承不对中支承的大型转子系统动力学特性对于系统的稳定运行和故障诊断具有重要意义.首先在短轴承假设、小不对中量和不平衡量等几个基本假设条件下,重点考虑了转子的柔度和不对中轴承的非线性油膜力及圆盘的不平衡等因素后,建立了一个具有轴承不对中的10自由度多跨转子系统非线性动力学模型;最后采用数值方法分析了系统的非线性动力学行为.结果表明:转子在低转速时,为同步的周期1运动,随着转速的提高,系统发生倍周期运动和准周期运动,在转速较高时,转子运动又回到周期1运动.

### 参 考 文 献

- 1 Choy F K, Braun M J, Hu Y. Nonlinear study of a misaligned hydrodynamic journal bearing. *STLE Tribology Transactions*, 1993, 36(3): 421 ~ 431
- 2 Jain S C, Sharma S C, Nagaraju T. Misaligned journal effects in liquid hydrostatic non-recessed journal bearings. *Wear*, 1997, 210(1): 67 ~ 75
- 3 Nikolakopoulos P G, Papadopoulos C A. Dynamic stability of linear misaligned journal bearings via Lyapunov's direct method. *Tribology Transactions*, 1997, 40(1): 138 ~ 146
- 4 Monmousseau P, Fillon M. Analysis of static and dynamic misaligned tilting-pad journal bearings. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 1999, 213(4): 253 ~ 261
- 5 Abdallah A E. Effects of misalignment on the performance of flexible porous journal bearings. *Tribology Transactions*, 2003, 46(1): 119 ~ 127
- 6 Abdallah A E. Effects of misalignment on the performance of finite journal bearings lubricated with couple stress fluids. *International Journal of Computer Applications in Technology*, 2004, 21(3): 137 ~ 146
- 7 Sun J, Gui C. Hydrodynamic lubrication analysis of journal bearing considering misalignment caused by shaft deformation. *Tribology International*, 2004, 37(10): 841 ~ 848
- 8 Sun J, Gui C, Li Z, Li Z. Influence of journal misalignment caused by shaft deformation under rotational load on

- performance of journal bearing. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 2005, 219(4):275 ~ 283
- 9 Nikolakopoulos P G, Papadopoulos C A. A study of friction in worn misaligned journal bearings under severe hydrodynamic lubrication. *Tribology international*, 2008, 41(6):461 ~ 472
- 10 Basavaraja J S, Sharma S, Jain S. A study of misaligned roughened two-lobe hole-entry hybrid journal bearing. *Industrial Lubrication and Tribology*, 2009, 61(4):220 ~ 227
- 11 Jang J Y, Khonsari M M. On the behavior of misaligned journal bearings based on Mass-Conservative thermohydrodynamic analysis. *Journal of Tribology*, 2010, 132(1):011702;1 ~ 13
- 12 Sarkar S, Nandi A, Neogy S, et al. Finite element analysis of misaligned rotors on oil-film bearings. *Indian Academy of Sciences*, 2010, 35(1):45 ~ 61
- 13 谭士森, 袁立平, 周野等. 国产大机组运行中轴承不对中特性. *电力技术*, 1989, 22(6):43 ~ 48 (Tan S S, Yuan L P, Zhou Y, et al. The characteristics of the operating domestic large unit with bearing misalignment. *Electric Power*, 1989, 22(6):43 ~ 48(in Chinese))

## NONLINEAR DYNAMICS OF FLEXIBLE MULTI-ROTOR SYSTEM SUPPORTED ON MISALIGNED JOURNAL BEARING \*

Li Ming A Mei

(Department of Mechanics, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China)

**Abstract** The dynamic modeling of a flexible rotor system supported on misaligned journal bearing was discussed and its nonlinear dynamics was studied. Under some assumptions such as short journal bearing, small bearing misalignment and tiny unbalance, first, a dynamic model with ten degrees of freedom was established after considering the flexibility of shaft and misalignment of bearing and unbalance of disk. And then the non-linear dynamic characteristics of the rotor-bearing system were analyzed by numerical method. The result shows that at low speed the steady-state responses of the rotor are synchronous with the rotating speed, and as the speed increases there exists the vibration components of integer multiple frequencies in displacement responses, at higher speed the displacement response becomes synchronous with the speed again.

**Key words** flexible multi-rotor, bearing misalignment, nonlinear oil film forces, nonlinear dynamics