

作大范围运动弹塑性平面板的动力学分析*

刘锦阳 石望

(上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院,上海 200240)

摘要 研究作大范围运动弹塑性平面板的动力学特性.考虑了几何非线性和材料非线性,基于平面应力假设、Mises 屈服条件和流动法则,采用绝对节点坐标法,用虚功原理建立了作大范围运动弹塑性平面板的动力学方程.在数值计算时将各时刻的塑性应变储存在全局数组中,实现了塑性应变的迭代计算.通过对带集中质量、作大范围运动平面板的数值仿真研究塑性效应对系统的动力学特性的影响.

关键词 作大范围运动, 弹塑性平板, 几何非线性, 材料非线性

引言

随着现代工业技术的飞速发展,弹塑性多体系统的动力学问题越来越被工程界重视.例如,在受冲击载荷作用时,汽车的某些柔性部件会产生弹塑性变形,在卸载的情况下,应力和应变之间不再存在唯一的对应关系,需要考虑塑性效应,建立柔性系统在冲击载荷作用下的更加精确的动力学模型,以实现汽车碰撞过程的动力学仿真.由此可见,弹塑性多体系统的动力学研究具有重要的工程应用前景,也是目前亟待解决的问题.

目前,国内外学者对弹塑性多体系统动力学研究才处于起步阶段. Gerstmayr^[1]等建立了作旋转运动弹塑性梁的动力学模型,研究了在角速度已知的情况下塑性应变对梁的振动特性的影响. Gerstmayr^[2]等进一步研究作自由旋转运动单摆的动力学性能,研究了塑性应变对系统刚-柔耦合动力学特性的影响. Gerstmayr^[3,4]将弹塑性问题研究从平面梁推广到平板,研究了旋转平板在冲击载荷作用下的动力学特性和塑性应变分布规律.但是 Gerstmayr 在研究过程中基于线弹性假设,没有考虑几何非线性效应.

基于一次近似理论,笔者^[5]在 Gerstmayr 研究的基础上,考虑几何非线性,用虚功原理建立单个梁的动力学变分方程.由于在建模过程中基于小变形假设,忽略了变形位移的高次项,容易引起数值计算的误差.为了实现弹塑性多体系统高精度的数

值仿真,需要建立完备的几何非线性模型,既适用于小变形问题,又适用于大变形问题.

本文在前人工作的基础上,从非线性应变-位移关系式和弹塑性本构关系出发,基于 Mises 屈服条件和流动法则,采用绝对节点坐标法,用虚功原理建立了弹塑性平板的动力学方程.在数值计算时将各时刻的塑性应变储存在全局数组中,实现了塑性应变的迭代计算.通过对平板与集中质量组成的多体系统在驱动约束作用下运动的数值仿真研究塑性变形对系统动力学特性的影响.

1 作大范围运动弹塑性平面板的动力学方程

作大范围运动平板如图 1 所示,建立惯性坐标系 $O-XY$.用有限单元法,将矩形平板等分为 $n = n_1 \times n_2$ 个矩形单元,设第 e 个板单元长为 l_e ,宽为 b_e ,厚为 h .板的体密度为 ρ .建立单元坐标系 $O_e - X_e Y_e$.

设 (x_e, y_e) 为点 k 在单元坐标系 $O_e - X_e Y_e$ 下的位置坐标,点 k 相对惯性基的矢径在惯性基下的坐标阵为

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = S(x_e, y_e) q_e(t) \quad (1)$$

其中, q_e 表示单元节点的绝对位移和位移梯度组成的坐标列阵, $S(x_e, y_e)$ 为板单元形函数矩阵.

平板单元惯性力做的虚功为

$$\delta W_{ie} = - \int_{V_e} \rho \delta r^T \dot{r} dV_e = - \delta q_e^T M_e \dot{q}_e \quad (2)$$

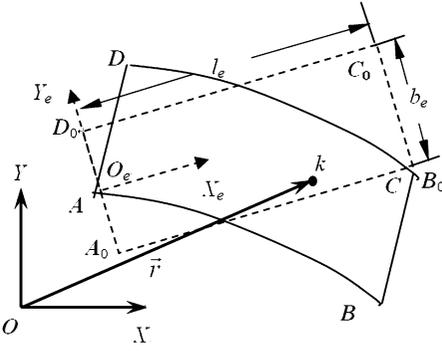


图1 变形后的板单元

Fig. 1 The plate element after deformation

其中,单元质量阵为 $M_e = \int_{V_e} \rho S^T S dV_e$, 若令 q 为板整体的节点坐标阵, B_e 为单元节点坐标与整体节点坐标之间的转换矩阵, 则有 $q_e = B_e q$. 平面板惯性力做的虚功为

$$\delta W_i = - \int_{V_e} \rho \delta r^T \ddot{r} dV_e = - \delta q^T M \ddot{q} \quad (3)$$

总体广义质量阵为 $M = \sum_e B_e^T M_e B_e$.

平面板单元体力(重力)做的虚功为

$$\delta W_{ge} = \int_{V_e} \delta r^T f dV_e = \delta q_e^T Q_{ge} \quad (4)$$

其中, f 为板的体力在惯性坐标系下的坐标阵. 板单元体力阵为 $Q_{ge} = \int_{V_e} S^T f dV_e$. 体力(重力)做的虚功为

$$\delta W_g = \int_V \delta r^T f dV = \delta q^T Q_g \quad (5)$$

总体的体力阵为 $Q_g = \sum_e B_e^T Q_{ge}$.

板上任意一点 k 的应变列阵为 $\varepsilon = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{yx}]^T$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, 根据非线性连续介质力学理论, Green 应变与位移的非线性关系为

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} [(\partial r / \partial x_e)^T (\partial r / \partial x_e) - 1] \quad (6)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{2} [(\partial r / \partial y_e)^T (\partial r / \partial y_e) - 1] \quad (7)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} (\partial r / \partial x_e)^T (\partial r / \partial y_e) \quad (8)$$

设 E, γ 分别为弹性模量和泊松比, 基于平面应力假设, 弹性模量阵 D 为

$$D = \frac{E}{1 - \gamma^2} \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \gamma \end{bmatrix} \quad (9)$$

基于理想弹塑性假设, 应力与应变的关系为

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (10)$$

在上式中, 应力阵为

$$\sigma = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yx}]^T \quad (11)$$

塑性应变列阵为

$$\varepsilon_p = [\varepsilon_{xx}^p \ \varepsilon_{yy}^p \ \varepsilon_{xy}^p \ \varepsilon_{yx}^p]^T \quad (12)$$

板单元弹(塑)性力做的虚功为

$$\delta W_{fe} = - \int_{V_e} \delta \varepsilon^T D(\varepsilon - \varepsilon_p) dV_e$$

令 $S_{11} = (\partial S / \partial x_e)^T (\partial S / \partial x_e)$,

$$S_{22} = (\partial S / \partial y_e)^T (\partial S / \partial y_e),$$

$$S_{12} = (\partial S / \partial x_e)^T (\partial S / \partial y_e),$$

将(6)~(9)代入(13), 得到

$$\delta W_{fe} = \delta q_e^T (Q_{fe} + Q_{pe}) \quad (13)$$

其中

$$Q_{fe} = - [K_{e1}(q_e) - K_{e3}] q_e \quad (14)$$

$$Q_{pe} = K_{e2}(q_e) q_e \quad (15)$$

$$K_{e1}(q_e) = \frac{E}{2(1 - \gamma^2)} \int_{V_e} G_1 dV_e + \frac{\gamma E}{2(1 - \gamma^2)} \int_{V_e} G_2 dV_e + \frac{E}{1 + \gamma} \int_{V_e} G_3 dV_e \quad (16)$$

$$G_1 = (q_e^T S_{11} q_e) S_{11} + (q_e^T S_{22} q_e) S_{22} \quad (17)$$

$$G_2 = (q_e^T S_{11} q_e) S_{22} + (q_e^T S_{22} q_e) S_{11} \quad (18)$$

$$G_3 = \frac{1}{2} (q_e^T S_{12} q_e) (S_{12} + S_{12}^T) \quad (19)$$

$$K_{e2}(q_e) = \frac{E}{1 - \gamma^2} \int_{V_e} [\varepsilon_{xx}^p S_{11} + \varepsilon_{yy}^p S_{22}] dV_e + \frac{E}{1 + \gamma} \int_{V_e} \varepsilon_{xy}^p (S_{12} + S_{12}^T) dV_e + \frac{\gamma E}{1 - \gamma^2} \int_{V_e} [\varepsilon_{xx}^p S_{22} + \varepsilon_{yy}^p S_{11}] dV_e \quad (20)$$

$$K_{e3}(q_e) = \frac{E}{2(1 - \gamma)} \int_{V_e} (S_{11} + S_{22}) dV_e \quad (21)$$

平面板弹(塑)性力做的虚功为

$$\delta W_f = \delta q^T (Q_f + Q_p) \quad (22)$$

其中, $Q_f = \sum_e B_e^T Q_{fe}$, $Q_p = \sum_e B_e^T Q_{pe}$.

2 塑性应变的计算

基于平面应力假设, 不计横向正应力 σ_{zz} , 以及剪切变形 $\sigma_{xz}, \sigma_{zx}, \sigma_{yz}$ 和 σ_{zy} , V. Mises 屈服条件为^[4]

$$F = \frac{1}{2} \sigma^T p \sigma - \frac{1}{3} \sigma_y^2 = 0 \quad (23)$$

其中

$$\sigma = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yx}]^T \quad (24)$$

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

根据弹塑性力学的流动法则,塑性应变的增量为

$$\Delta \varepsilon_p = \lambda \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right) = \lambda P \sigma \approx \lambda P \sigma_0 \quad (26)$$

其中, σ_0 为前一时刻的应力, λ 为流动因子. 基于理想弹塑性假设, 应力和应变关系为

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_{p0} - \Delta \varepsilon) = D(\varepsilon - \varepsilon_{p0} - \lambda P \sigma_0) \quad (27)$$

在上式中, ε_{p0} 为前一时刻的塑性应变. 令 $c = D(\varepsilon - \varepsilon_{p0})$, $d = DP \sigma_0$, 则有 $\sigma = c - \lambda d$, 代入(23)式, 得到 λ 满足的二次方程为

$$(d^T P d) \lambda^2 - 2(d^T P c) \lambda + c^T P c - \frac{2}{3} \sigma_y^2 = 0 \quad (28)$$

根据弹塑性理论, 流动法则有 3 个附加条件, F, λ 满足关系式

$$F \lambda = 0, \quad F \leq 0, \lambda \geq 0 \quad (29)$$

当时 $F < 0, \lambda = 0, \Delta \varepsilon_p = 0$, 为弹性问题; 当 $F = 0$ 时, $\lambda > 0, \Delta \varepsilon_p = \lambda P \sigma_0$, 为塑性问题.

在数值计算过程中, 将每个单元等分为多个矩形块, 将矩形块边界各点的塑性应变储存在全局数组, 若初始时刻系统无变形, 取塑性应变的初值为 0. 计算各矩形块边界各点当前时刻的应变 ε , 得到 $\Delta \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0$, 其中, ε_0 为前一时刻的应变. 先假定塑性应变为 0, 应力的增量为 $\Delta \sigma = D \Delta \varepsilon$, 得到 $\sigma = \sigma_0 + \Delta \sigma$, 代入 F . 若 $F < 0, \lambda = 0$, 该点处于弹性阶段; 若 $F \geq 0$, 产生塑性变形, 求解方程(28), 如果存在负值的解, 则取 $\lambda = 0$, 如果两根均为正则取较小的解. 在求得了 λ 的值后, 根据 $\Delta \varepsilon_p = \lambda P \sigma$, 计算塑性应变的增量, 得到当前时刻的 $\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \Delta \varepsilon_p$, 再代入积分式(20), 数值积分计算 $K_{e2}(q_e)$, 最后将 ε_p 储存起来作为下一时刻的 ε_{p0} .

3 弹塑性平板的动力学方程

平板在只受体力作用时的动力学变分方程为

$$\delta W_i + \delta W_g + \delta W_f = 0 \quad (30)$$

将(3)、(5)和(22)代入(30)可得

$$\delta q^T (M \ddot{q} - Q_g - Q_f - Q_p) = 0 \quad (31)$$

设约束方程为 $\Phi(q, t) = 0$, 系统封闭的第一类拉格

朗日动力学方程为

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (32)$$

其中, 广义力阵 $Q = Q_g + Q_f + Q_p$, Φ_q 为约束方程的雅克比阵, λ 为拉格朗日乘子坐标阵, $\gamma = -(\Phi_q \ddot{q})_q \ddot{q} - 2\Phi_{qq} \dot{q} - \Phi_{tt}$ 为加速度约束方程的右项.

4 仿真算例

带集中质量的弹塑性矩形平板如图 2 所示, 板的左端中点加一个旋转铰, 板的中心有一个集中质量, 初始状态板系统持水平, 然后让系统在驱动约束作用下运动, 驱动的作用时间为 0.02s, 之后驱动约束释放, 系统作自由转动, 计算时间为 0.04s. 板的材料是铝合金, 各项参数为: 长 $L = 2 \text{ m}$, 宽 $b = 0.2 \text{ m}$, 厚 $h = 0.002 \text{ m}$, 密度 $\rho = 2766 \text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E = 6.9 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, 泊松比 $\gamma = 0.3$, 屈服应力为 $\sigma_y = 5 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, 集中质量为 $M = 20 \text{ kg}$. 利用有限元法建模时将板分成 4×2 个单元, 按图中顺序排布, 节点排布如图所示. 在计算塑性应变过程中又将每个板单元等分成 10×6 个矩形块. 不计重力.

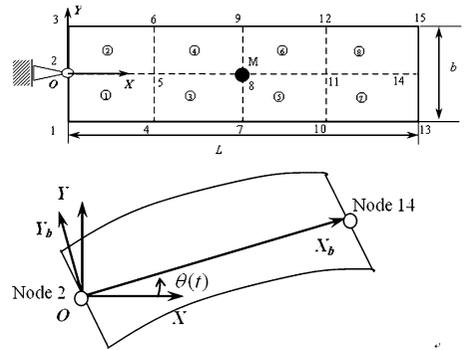


图 2 一端铰支的平板

Fig. 2 A planar plate with revolute joint on one side

对于矩形板我们采用两端简支的边界条件, 如图 3 所示. 其中, XY 为惯性基, $X_b Y_b$ 为浮动基. 板的浮动坐标系建立在板两端中点的连线上, θ 为浮动坐标系与惯性坐标系间的夹角. 施加于板的角驱动约束为

$$\theta(t) = -\frac{10}{\pi} \left[\frac{1}{50\pi} \sin(50\pi t) - t \right] \quad (33)$$

板的左右边界中点的节点号分别为 2 和 14, 由几何关系得 $\tan(\theta(t)) = \frac{y_{14} - y_2}{x_{14} - x_2}$; 另附加节点 2

的位置约束得到系统的约束方程为

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ (x_{14} - x_2)\sin(\theta(t)) - (y_{14} - y_2)\cos(\theta(t)) \end{bmatrix} = 0 \quad (34)$$

其中 x_2, y_2 为第 2 个节点的绝对位移坐标, x_{14}, y_{14} 为第 14 个节点的绝对位移坐标. 在驱动约束释放以后, 系统做自由转动, 此时系统的约束方程为

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (35)$$

图 3 是板的中心点即节点 8 的横向变形随时间变化的曲线. 图中显示, 在运动的初始阶段, 由于角速度较小, 板受到的力还没超过屈服极限, 处在弹性阶段. 从 0.01s 开始, 板进入了较为明显的塑性阶段, 弹塑性情况下板中点的横向变形的平均值的绝对值远大于弹性情况. 当 $t \geq 0.02s$, 驱动作用结束进入自由转动阶段, 弹性板的横向变形均在 0 点附近振动, 振幅基本上保持不变, 而弹塑性板的振幅则有衰减的趋势, 而且频率比弹性情况要低, 没有恢复的趋势.

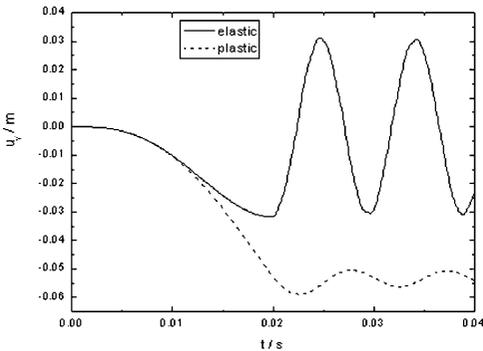


图 3 板中心点的横向变形

Fig. 3 Transverse deformation of the mid point

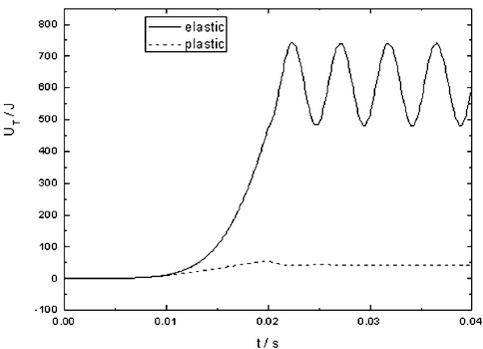


图 4 系统的动能

Fig. 4 Kinetic energy of the system

图 4 和图 5 分别为系统的动能和总能量的时变曲线. 图中显示, 在进入塑性阶段后, 两条曲线产生了巨大的分岔, 弹塑性板的系统动能远小于弹性板; 在驱动约束作用下, 弹塑性板的能量变化幅度远小于弹性板, 当 $t \geq 0.02s$, 驱动释放, 弹性板的总能量保持不变, 而弹塑性板的总能量在持续变化并且有衰减的趋势.

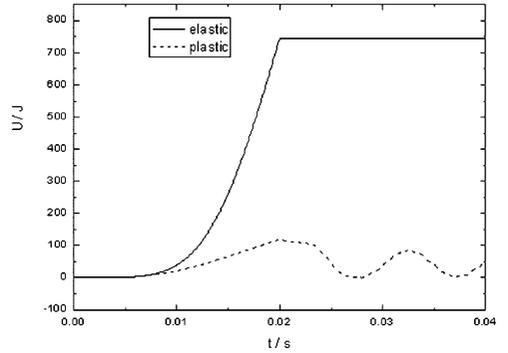


图 5 系统的总能量

Fig. 5 Total energy of the system

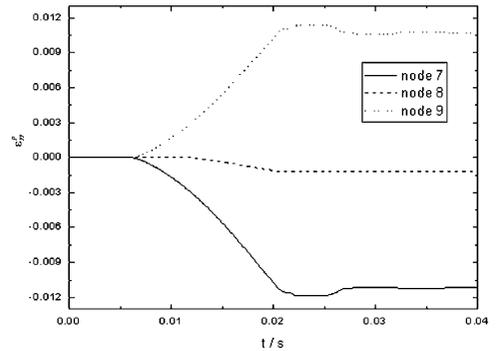


图 6 节点 7、8、9 的 y 方向塑性应变

Fig. 6 Plastic strain of node 7, 8, 9 in y direction

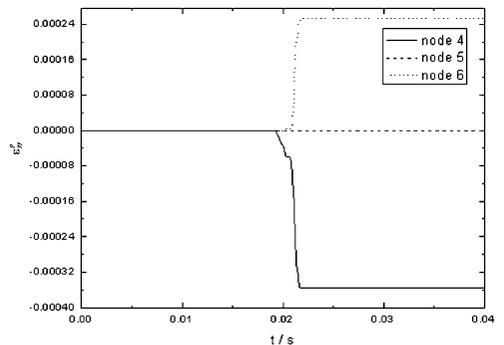


图 7 节点 4、5、6 的 y 方向塑性应变

Fig. 7 Plastic strain of node 4, 5, 6 in y direction

图 6 给出了节点 7、8、9 在 y 方向的塑性应变, 从图中看到, 在 0.006s 附近就开始产生塑性应变, 节点 7 和节点 9 的塑性应变的值最大达到了 0.012

附近,而且塑性应变没有恢复的趋势.图7给出了节点4、5、6在 y 方向的塑性应变,与7、9节点不同的是,4、6节点在0.02s以后才产生塑性应变,而且数值也较小,这是因为节点7和节点9在 x 方向上离集中质量最近,在 y 方向上离中心轴最远,受到的应力最大,所以塑性变形较大.

5 结论

本文建立了作大范围运动弹塑性平板的几何非线性和材料非线性动力学模型,采用绝对节点坐标法,用虚功原理建立了作大范围运动弹塑性平板的动力学方程,研究塑性应变对平板的刚-柔耦合动力学特性的影响,得到以下结论:

(1) 在驱动载荷释放后,弹性板的纵向变形和横向变形在0附近振动;而弹塑性板存在残余的纵向变形和横向变形.

(2) 在驱动载荷释放后,弹性板机械能守恒,弹塑性板的机械能衰减.

(3) 对于应力集中、弯矩较大、离约束点较近的特殊点,塑性应变容易产生且迅速增大,设计时应着重考虑.

参 考 文 献

- Gerstmayr J, Holl H J, Irschik H. Development of plasticity and damage in vibrating structural elements performing guided rigid-body motions. *Archive of Applied Mechanics*, 2001, 71:135 ~ 145
- Gerstmayr J, Irschik H. Vibrations of the elasto-plastic pendulum. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, 38:111 ~ 122
- Vetyukov Y, Gerstmayr J, Irschik H. Plastic multipliers as driving variables of numerical simulation in elastoplasticity. *Mechanics Research Communication*, 2003, 30: 421 ~ 430
- Gerstmayr J. The absolute coordinate formulation with elasto-plastic deformations. *Multibody System Dynamics*, 2004, 12:363 ~ 383
- 石望,刘锦阳. 弹塑性梁系统的动力学特性研究. 动力学与控制学报, 2010, 8 (3):197 ~ 201 (Shi W, Liu J Y. Investigation on dynamic performance of Elasto-plastic beam system. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8 (3):197 ~ 201 (in Chinese))

DYNAMIC ANALYSIS FOR AN ELASTO-PLASTIC PLANAR PLATE UNDERGOING LARGE OVERALL MOTION*

Liu Jinyang Shi Wang

(Department of Information Engineering, Quzhou College of Technology, Quzhou 324000, China)

Abstract The dynamic performance of an elasto-plastic planar plate undergoing large overall motion was investigated. Considering geometric and material nonlinearities, and based on planar stress assumption, Mises yield condition and flow rule, the dynamics variational equations for an elasto-plastic planar plate were established by using absolute nodal coordinate formulation and virtual work principle. In the numerical calculation, plastic strain of each time step was stored in the global array to achieve the iteration of plastic strain. Simulation of an elasto-plastic planar plate with lumped mass undergoing large overall motion was carried out to investigate the influence of plasticity on dynamic performance of the system.

Key words large overall motion, elasto-plastic planar plate, geometric nonlinearity, material nonlinearity