

具有边权全局演化特征的加速增长的网络模型*

穆军芬¹ 周进^{1,2}

(1. 河北工业大学电气与自动化学院理学院, 天津 300130) (2. 上海大学上海市应用数学与力学研究所, 上海 200072)

摘要 提出了一个新的加速增长的加权网络模型. 与以前的边权固定模型或边权局部分配模型相比, 该模型允许流被全局更新, 并给出度、边权、与点强度分别服从幂律分布. 特别地, 这些幂律指数是非普适的而且依赖于两个网络参数. 该模型还指出点强度高度依赖于度并且它们之间服从幂律关系, 这与许多的实证研究结果相符. 数字仿真验证了理论预测的正确性.

关键词 加权演化网络, 边权全局演化, 加速增长的网络, 幂律分布

引言

许多系统都能被自然地描述为复杂网络, 如因特网^[1]、万维网^[2]、社会网络^[3]、和新陈代谢网络^[4]等等. 在复杂网络中, 节点代表个体, 而边则代表个体之间的相互作用关系. 众所周知, 复杂网络被划分为两种: 无权网络和加权网络. 在无权网络中, 节点之间的边只能反映节点之间的相互作用存在与否这种信息. 但在许多实际系统中, 节点与节点之间的相互作用强度是不一样的. 而加权网络则引入了边权来反映顶点之间相互作用强度的差异, 刻画了连接的多样性, 增强了网络的抽象刻画能力, 所以加权网络能比无权网络更好地反映真实的网络. 同时, 随着对大量实际加权网络的深入研究, 人们发现了许多无权网络中所没有的现象以及与边权有关的丰富的统计性质. 如何构造加权网络模型来再现这些性质就自然的成为加权网络研究的重要课题^[5].

在加权网络演化模型方面已有大量的研究工作^[6-9], 对已有的模型, 根据赋权方式大致可以分为两种类型: 边权固定模型和边权演化模型. 边权固定模型的基本特征是: 按照一定的偏好机制形成网络拓扑结构的演化, 在此过程中为每一条新加入的边赋权. 而边权是固定的, 并不随网络结构的演化而演化, 所以此种模型不是真正意义上的加权演化网络模型. 而边权演化模型的基本特征是: 网络中每一条边的边权都会随着网络结构的演化而不

断改变, 此类模型可以反映相互作用关系的演化和加强这种现实系统的共同特征^[5]. 著名的 BBV 模型就是边权演化模型, 但在 BBV 模型中, 边权是局部演化的, 而在许多真实系统中, 边权是全局演化的, 所以最近我们提出了一个边权全局演化的加权网络模型^[10]. 另外, 我们注意到许多真实的系统具有加速增长的特性, 即边的增长总数比节点的增长总数要快, 并且边的总数 $e(t)$ 与节点的总数 $N(t)$ 服从幂律关系: $e(t) \propto N(t)^{\beta+1}$, 其中 $\beta(0 \leq \beta < 1)$ 表示加速增长的参数^[11]. 但上述加权网络模型^[6-9]均忽略了这一个特性. 所以在这篇论文中, 在文献[10]的基础上, 我们提出了一个新的加权网络模型, 该模型考虑了加速增长对加权网络模型演化的影响. 我们解析研究并数字仿真了该模型的度、边权、点强度的演化及分布, 以及点强度和度的关系. 结果表明这些分布的幂律指数均与加速增长参数有关.

1 新模型

网络初始时有 N_0 个完全相连的节点, 其中每条边的边权赋值为 $w_0 = 1$. 我们在该模型中定义了两个演化机制: 拓扑增长机制和边权演化机制.

(1) 拓扑增长机制: 在每个时间间隔, 一个带有 t^β 条边的新节点 n 被加入到网络中, 该新节点 n 所带有的边按点强度优先连接的原则连接到已有节点, 连接到节点 i 的概率为:

$$\Pi_{n \rightarrow i} = \frac{s_i}{\sum_l s_l} \quad (1)$$

其中 t 是新节点 n 加入到网络中的时间, $\beta(0 \leq \beta < 1)$ 是加速增长的参数. t^β 条新边连接完成后, 每条新边的边权也赋值为 $w_0 = 1$.

在这个机制中, 新节点 n 所带有的边数为 t^β , 这与许多的实证研究结果相符. 比如, 在 arXiv 引文网和 Email 网络中, 它们的加速增长参数分别为 0.56 和 0.12^[11].

(2) 边权演化机制: 在同一时间间隔, t^β 条新边中每一条边的建立给整个网络的边权带来一个增量 η ($\eta = \text{const}$). 从而 t^β 条新边的建立给整个网络的边权带来一个总的增量 ηt^β . 所有的连接按照如下的机制改变连接权重:

$$w_{ij} \rightarrow \begin{cases} w_{ij} + 1, & \text{概率为 } \eta t^\beta p_{ij} \\ w_{ij}, & \text{概率为 } 1 - \eta t^\beta p_{ij} \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$p_{ij} = \frac{2w_{ij}}{\sum_l s_l} \quad (3)$$

决定了边权 w_{ij} 增长的概率.

此处的边权演化机制部分受到了文献[12]的启发, 但我们的演化机制与文献[12]中的演化机制有着简单的不同. 在文献[12]中, p_{ij} 与节点 i 和 j 的点强度有关, 并且在每一步中边权的总增量 W 是固定的. 但在我们的模型中, p_{ij} 是与连接节点 i 和 j 的边的边权 w_{ij} 有关, 并且在每一步中边权的总增量 ηt^β 是变化的, 并且与时间 t 和加速增长参数 $\beta(0 \leq \beta < 1)$ 有关.

2 理论分析

运用平均场理论^[13], 我们可以获得网络的度、点强度以及边权的分布.

假设 $s_i(t)$ 是连续变化的, 则 $s_i(t)$ 的变化率推导如下:

(1) 在拓扑演化机制中, 新节点 n 与已有节点 i 连接的择优概率由(1)式确定, 这时有:

$$\frac{ds_i}{dt} = t^\beta \frac{s_i}{\sum_l s_l} \quad (4)$$

(2) 在边权演化机制中, 与节点 i 直接相连的边的边权的更新所引起的变化率为:

$$\frac{ds_i}{dt} = \sum_{j \in v(i)} \frac{\eta t^\beta 2w_{ij}}{\sum_l s_l} \quad (5)$$

其中 $v(i)$ 是节点 i 的近邻集合.

因此, 在 t 时刻节点 i 的点强度 s_i 的变化率方程可以表示为:

$$\begin{aligned} \frac{ds_i}{dt} &= t^\beta \frac{s_i}{\sum_l s_l} + \sum_{j \in v(i)} \frac{\eta t^\beta 2w_{ij}}{\sum_l s_l} = t^\beta \frac{s_i}{\sum_l s_l} + \\ &2\eta t^\beta \frac{s_i}{\sum_l s_l} = \frac{(2\eta + 1)(\beta + 1)}{2\eta + 2} \frac{s_i}{t} \end{aligned} \quad (6)$$

上一表达式最后一个等号成立是因为:

$$\sum_l s_l \approx \int t^\beta 2(1 + \eta) dt = \frac{2(1 + \eta)}{\beta + 1} t^{\beta+1} \quad (7)$$

方程(6)的初始条件为: $s_i(t = t_i) = t_i^\beta$, 所以解方程(6)得:

$$s_i(t) = t_i^\beta \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{(2\eta+1)(\beta+1)}{2\eta+2}} \quad (8)$$

由方程(8)我们可以得到:

$$p(s_i(t) < s) = p(t_i > s^{-\frac{2\eta+2}{2\eta+1-\beta}} \left(\frac{2\eta+1}{2\eta+1-\beta} \right)) \quad (9)$$

假定节点 i 加入系统的时间服从均匀分布, 所以有:

$$p(t_i) = \frac{1}{N_0 + t} \quad (10)$$

把上式代入(9)式得:

$$\begin{aligned} p(t_i > s^{-\frac{2\eta+2}{2\eta+1-\beta}} \left(\frac{2\eta+1}{2\eta+1-\beta} \right)) &= 1 - p(t_i \leq s^{-\frac{2\eta+2}{2\eta+1-\beta}} \\ &\left(\frac{2\eta+1}{2\eta+1-\beta} \right)) = 1 - \frac{1}{N_0 + t} s^{-\frac{2\eta+2}{2\eta+1-\beta}} \left(\frac{2\eta+1}{2\eta+1-\beta} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

因此得节点 i 的点强度分布为:

$$p(s) = \frac{\partial p(s_i(t) < s)}{\partial s} = \frac{1}{N_0 + t} \frac{2\eta + 2}{2\eta + 1 - \beta} s^{-\frac{2\eta+2}{2\eta+1-\beta}} s^{-\frac{4\eta+3-\beta}{2\eta+1-\beta}} \quad (12)$$

由此可知, 节点 i 的点强度分布服从幂律分布: $p(s) \sim s^{-\gamma}$, 其中幂律指数为

$$\gamma = \frac{4\eta + 3 - \beta}{2\eta + 1 - \beta} \quad (13)$$

类似地, 在 t 时刻节点 i 的度 k_i 的变化率方程可以表示为:

$$\frac{dk_i}{dt} = t^\beta \frac{s_i}{\sum_l s_l} = \frac{1 + \beta}{2 + 2\eta} \frac{s_i}{t} \quad (14)$$

上式表明:

$$k_i(t) = \frac{1}{2\eta + 1} s_i(t) \quad (15)$$

由(15)式可得到点强度与度服从幂律关系: $s \sim k^\theta$, 其中 $\theta = 1$. 正由于点强度和度服从线性关系, 所以节点的度与点强度服从相同的幂律分布.

最后给出边权的变化率方程为:

$$\frac{d\omega_{ij}}{dt} = \frac{\eta t^\beta 2\omega_{ij}}{\sum_i s_i} = \frac{\eta(\beta+1)}{1+\eta} \frac{\omega_{ij}}{t} \quad (16)$$

其初始条件为 $\omega_{ij}(t_{ij}) = 1$, 因此有

$$\omega_{ij}(t) = \left(\frac{t}{t_{ij}}\right)^{\frac{\eta(\beta+1)}{1+\eta}} \quad (17)$$

类似与点强度分布 $p(s)$ 的解法, 我们可以得到边权分布 $p(w)$ 也服从幂律分布 $p(w) \sim w^{-\alpha}$, 其中 $\alpha = (2\eta + \eta\beta + 1) / [\eta(\beta + 1)]$.

3 数字仿真

为了检验理论预测的正确性, 我们对该模型生成的网络进行了进一步的数字仿真. 在仿真过程中, 我们令参数 η 和 β 取不同的值, 令 $N_0 = 3, N = 1000$. 从图 1 可看出节点的点强度 s_i 与度 k_i 服从线性关系.

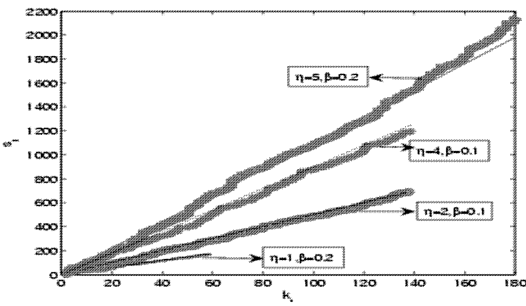


图 1 某一初始节点的点强度 s_i 与度 k_i 的关系;

细直线表示理论预测: $s_i = (2\eta + 1)k_i$

Fig.1 Strength s_i versus k_i of one initial node; the straight lines are the predictions: $s_i = (2\eta + 1)k_i$

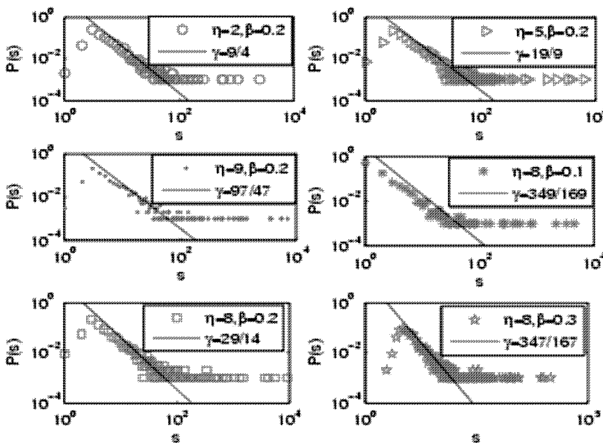


图 2 点强度分布图; 细直线表示理论预测: $p(s) \sim s^{-\gamma}$.

其中幂律指数 $\gamma = (4\eta + 3 - \beta) / (2\eta + 1 - \beta)$

Fig.2 Probability distribution $p(s)$ of the nodes strength s ; the straight lines are the predicted power laws $s^{-\gamma}$ with $\gamma = (4\eta + 3 - \beta) / (2\eta + 1 - \beta)$

图 2 表明点强度分布 $p(s)$ 服从幂律关系, 并

且该分布具有低头和胖尾现象, 这与许多的实证研究结果相符^[14]. 从图 3 可以看出度分布 $p(k)$ 也服从幂律分布 $p(k)$. 图 4 表明边权分布 $p(w)$ 也服从幂律分布, 并且该分布也具有低头和胖尾现象. 所有这些数字仿真都和理论预测相吻合.

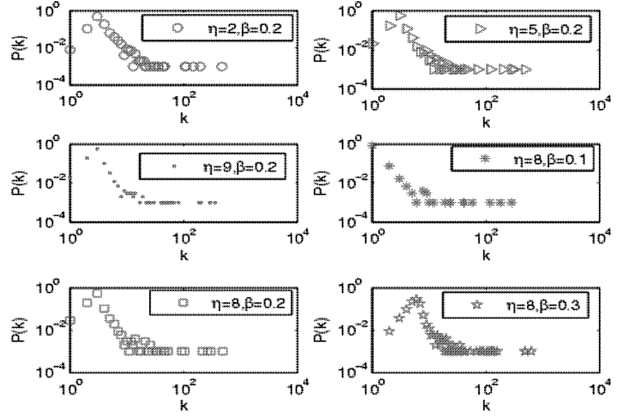


图 3 度分布图

Fig.3 Probability distribution $p(k)$ of the degree k

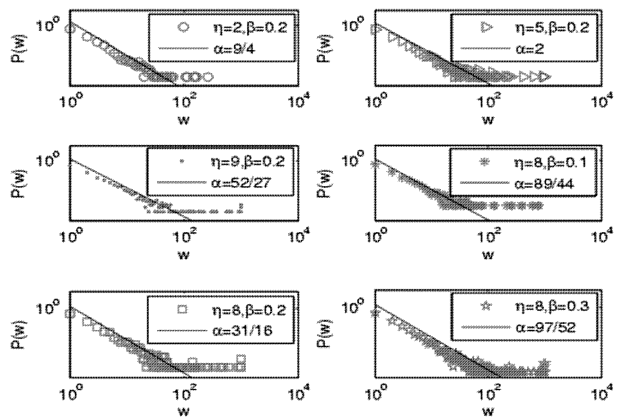


图 4 边权分布图; 细直线表示理论预测 $p(w) \sim w^{-\alpha}$

其中 $\alpha = (2\eta + \eta\beta + 1) / [\eta(\beta + 1)]$

Fig.4 Probability distribution $p(w)$ of the connection weight w ; the straight lines are the predicted power laws $w^{-\alpha}$ with $\alpha = (2\eta + \eta\beta + 1) / [\eta(\beta + 1)]$

4 结束语

这篇论文提出了一个具有边权全局演化特征的加速增长的加权网络模型. 在这个模型中, 我们定义了两个机制: 拓扑增长机制和边权演化机制. 理论分析和数字仿真均表明该模型具有如下性质:

- (1) 该模型的度、点强度和边权分布均为幂律分布;
- (2) 上述幂律指数均与网络参数 η 和 β 有关;
- (3) 这些分布均具有低头和胖尾现象, 这与许

多的实证研究结果相符;

(4) 点强度高度依赖于度,且它们之间服从线性关系.

参 考 文 献

- 1 Faloutsos M, Faloutsos P, Faloutsos C. On power-law relationships of the Internet topology. *Comput. Commun. Rev.*, 1999, 29 (4): 251 ~ 262
- 2 Huberman B A. The laws of the web. Cambridge: MIT Press, 2001
- 3 Scott J. Social network analysis: a handbook. London: Sage Publications, 2000
- 4 Jeong H, Tombor B, Albert R, Oltvai Z N, Barabási A L. The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*, 2000, 407 (6804): 651 ~ 654
- 5 陈关荣,许晓明. 复杂网络理论与应用. 香港:上海系统科学出版社,2008 (Chen G R, Xu X M. Complex networks theory and applications. Hongkong: Shanghai SystemScience Press, 2008 (in chinese))
- 6 Yook S H, Jeong H, Barabási A L, Tu Y. Weighted evolving networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, 86 (25): 5835 ~ 5838
- 7 Antal T, Krapivsky P L. Weight-driven growing networks. *Phys. Rev. E*, 2005, 71 (2): 026103 ~ 026108
- 8 Zheng D, Trimper S, Zheng B, Hui P M. Weighted scale-free networks with stochastic weight assignments. *Phys. Rev. E*, 2003, 67 (4): 040102 ~ 040105
- 9 Barrat A, Barthélemy M, Vespignani A. Weighted evolving networks: coupling topology and weight dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 92 (22): 228701
- 10 Mu J F, Sun H X, Pan J P, Zhou J. The 8th World Congress on Intelligent Control and Automation, 2010
- 11 Leskovec J, Kleinberg J, Faloutsos C. Graph evolution: densification and shrinking diameters. *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data*, 2007, 1 (1): 12 ~ 16
- 12 Wang W X, Wang B H, Hu B, Yan G, Ou Q. General dynamics of topology and traffic on weighted technological networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 94 (18): 188702 ~ 188705
- 13 A L Barabási, R Albert, H Jeong. Mean-field theory for scale-free random networks. *Physica A*, 1999, 272 (1-2): 173 ~ 187
- 14 Goh K I, Kahng B, Kim D. Nonlocal evolution of weighted scale-free networks. *Phys. Rev. E*, 2005, 72 (1): 017103 ~ 017106

ACCELERATING GROWING NETWORK MODEL WITH WIDELY WEIGHTED DYNAMICS *

Mu Junfen¹ Zhou Jin^{1,2}

(1. School of Electrical Engineering and Automation, School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China)

(2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract A new weighted network model with accelerating growth was presented. Compared with the previous models where weights are assigned statically or rearranged locally, this model allows the flows to be widely updated, and gives power-law distributions of degree, weight and strength, respectively. Particularly, the exponents are nonuniversal and depend on two network parameters. It turns out that the strength highly correlates with the degree and displays scale-free property, which is consistent with empirical evidence. Simulations were provided to demonstrate the theoretical results.

Key words weighted evolving network, widely weighted dynamics, accelerating network, power-law distributions