

求旋转椭球形贮箱内液体小幅晃动基频的一种新方法*

杨旦旦 岳宝增

(北京理工大学宇航学院力学系,北京 100081)

摘要 针对旋转椭球形贮箱内液体小幅晃动,建立了原点位于与箱于箱内静液面接触线处相切的圆锥的顶点的球坐标系,用高斯超几何级数解析表达速度势和波高的模态函数,通过伽辽金方法把变分方程转变为一个标准的特征值问题形式的频率方程,求解了不同尺寸比例的椭球形贮箱在不同的充液比和不同的 Bond 数情况下液体小幅晃动的基频,把所求结果和已有的理论和实验结果进行对照。

关键词 变分原理, 高斯超几何级数, 晃动基频

引言

航天器上大量液体的存在及其工况的多样复杂性,导致液体的低频晃动可能与航天器的结构模态或控制系统的特征频率相交藕,使航天器产生共振等动力学不稳定现象,因此微重力下液体晃动的频率一直是航天器动力学与控制问题研究的热点.微重力情况下,考虑表面张力的效应,静止液面是向上弯曲的,如图 1 所示。

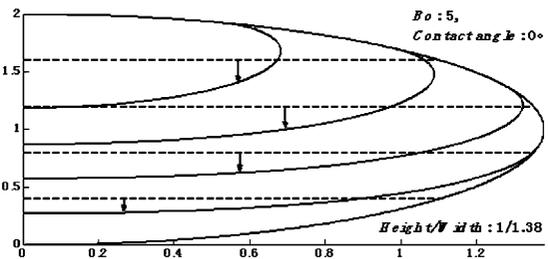


图1 微重力下旋转椭球形贮箱内静液面形状
Fig. 1 Meniscus in spheroid tanks in microgravity

本文基于微重力下液体在贮箱中的静止形状,用高斯超几何级数作为液体势函数和波高的模态函数研究了椭球形贮箱内液体的晃动基频.为避免柱坐标系出现的静止液面轴向坐标是径向坐标的二值函数和满足箱壁处液体位移与箱壁相切的相容性条件,采用了坐标原点位于与箱于箱内静液面接触线处相切的圆锥的顶点的球坐标系,通过对拉普拉斯方程的推导,得到液体势函数和波高函数的解析模态表达,同时把箱壁上须满足的边界条件转

化为只需在箱壁与液体接触线处满足的简单边界条件,这样就有利于利用伽辽金方法求解液体晃动频率.严格意义上说,这是一种近似的方法,但由于即使对很小的接触角存在的误差都很小^[1],因此不碍于问题的求解.所得结果和其他方法计算所得结果及实验结果进行对照,验证了本文的方法的正确性。

1 液体小幅晃动的模型

1.1 计算模型

使用如图 2 所示的球坐标系,静液面,受扰液面,和箱壁用下式表示:

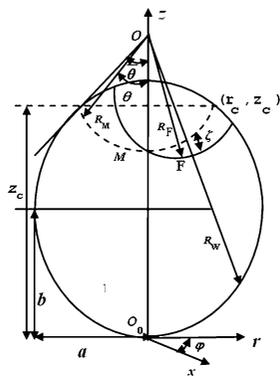


图2 旋转椭球形贮箱和坐标系

Fig. 2 Spheroid tank and coordinate systems

$$\begin{aligned} M: R &= R_M(\theta); \\ F: R &= R_F(\theta, \varphi, t) = R_M(\theta) + \zeta(\theta, \varphi, t); \\ W: R &= R_W(\theta) \end{aligned}$$

使用球坐标系有如下优点: $R_M(\theta), R_F(\theta), \zeta$

2010-12-22 收到第 1 稿,2011-04-09 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11072030)

可表示成 θ, φ 的单值函数;满足箱壁处的液体位移沿着箱壁切线;可以得到势函数和波高的解析模态表达.

1.2 变分原理

由文献[1]的变分原理的推导,可得控制液体小幅晃动的变分方程为下式:

$$\begin{aligned} & \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{\theta}} \varepsilon \int_{R_M}^{R_W} \nabla^2 \phi \delta\phi R^2 \sin(\theta) dR d\theta d\varphi - \\ & \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{\theta}} \varepsilon \left(\frac{\partial\phi}{\partial R} \right) \Big|_{R=R_W} - \frac{R_{W\theta}}{R_W^2} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \Big|_{R=R_W} \Big) \times \\ & \delta\phi \Big|_{R=R_W} R_W^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi + \\ & \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{\theta}} \varepsilon \left(\frac{\partial\phi}{\partial R} \right) \Big|_{R=R_M} - \frac{R_{M\theta}}{R_M^2} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \Big|_{R=R_M} - \\ & \frac{\partial\zeta}{\partial t} \delta\phi \Big|_{R=R_M} R_M^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi + \\ & \int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{\theta}} \left\{ \varepsilon \rho_f \frac{\partial\phi}{\partial t} \Big|_{R=R_M} - \rho_f g \zeta \cos(\theta) - \right. \\ & \sigma [S_M^{(1)}(\theta)\zeta + S_M^{(2)}(\theta) \frac{\partial\zeta}{\partial\theta} + \\ & S_M^{(3)}(\theta) \frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2} + S_M^{(4)}(\theta) \frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2}] \Big\} \times \\ & \delta\zeta R_M^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \varepsilon \sigma [R_M(R_M^2 + \\ & R_{M\theta}^2)^{-3/2} (R_M \frac{\partial\zeta}{\partial\theta} - \\ & R_{M\theta}\zeta) \Big] \Big|_{\theta=\bar{\theta}} \delta\zeta \Big|_{\theta=\bar{\theta}} R_M(\bar{\theta}) \sin(\bar{\theta}) d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

各物理量含义同文献[1]. 定义特征频率 $\omega_g^* = \sqrt{g^*/b^*}$, 无重力时, $\omega_g^* = \sqrt{\sigma^*/(\rho_f b^*{}^3)}$, 引入如下无量纲量以求解无量纲晃动频率:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi^*/(b^*{}^2 \omega_g^*), \zeta = \zeta^*/b^*, t = \omega_g^* t^*, \\ \{R, R_M(\theta), R_W(\theta)\} &= \{R^*, R_M^*(\theta), R_W^*(\theta)\}/b^*, \\ \{S_{1M}, S_{2M}, S_{3M}, S_{4M}\} &= (b^*)^2 \{S_{1M}^*, S_{2M}^*, S_{3M}^*, S_{4M}^*\}, \\ \{dF, dW\} &= \{dF^*, dW^*\}/b^*{}^2 \end{aligned}$$

1.3 模态函数的确定和特征频率方程

液体速度势和波高可用级数表示如下^[1]:

$$\begin{aligned} \phi(R, \theta, \varphi, t) &= i\omega \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \left(\frac{R}{l_a} \right)^{\alpha_{1k}} + b_k \left(\frac{R}{l_b} \right)^{\alpha_{2k}} \times \right. \\ & \quad \left. \Theta_k(\theta) \cos(m\varphi) e^{i\omega t} \right\}; \\ \zeta(R, \theta, \varphi, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Theta_k(\theta) \cos(m\varphi) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2)$$

取级数式(2)的前 \bar{k} 项代入(1)式,考虑对 a_k, b_k, c_k 的变分,得到如下的齐次方程:

$$\begin{pmatrix} M_{aa} & M_{ab} & M_{ac} \\ -\omega^2 M_{ba} & M_{bb} & M_{bc} \\ M_{ca} & M_{cb} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{cc} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3)$$

由式(3)的前两式可得 a, b 与 c 的关系,代入到第三式,得如下形式的特征频率方程:

$$[-\omega^2 M + K] \{c\} = \{0\} \quad (4)$$

求解此特征值问题即得到液体晃动的频率.

2 数值计算的结果

取 m 为 1, 计算所得的最小频率即为基频. 用本文方法计算了宽高比分别为 1、1.3639、1.6667、1.4142、1.99 的旋转椭球在接触角为 0° , 充液比分别为 25%、50%、75%、15.625%、84.375% 时小幅晃动基频随 Bond 数的变化,如图 2 所示,和已有实验结果^[2,3] 对照比较吻合,验证了本文方法的正确性.

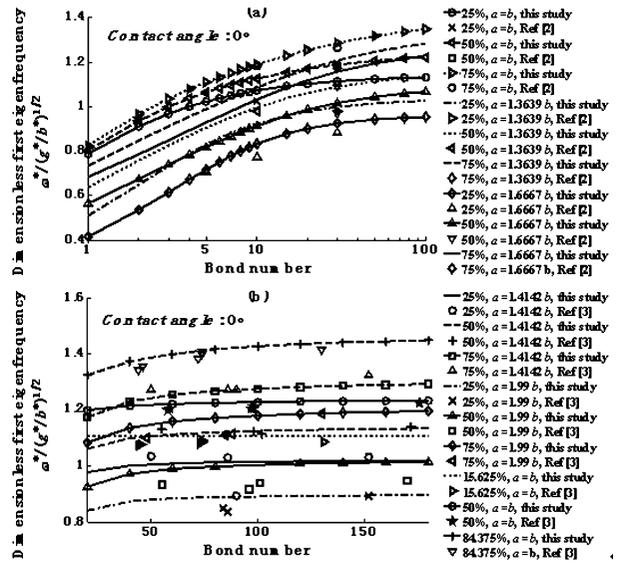


图3 本文计算的基频和实验结果的对比
Fig. 3 The comparison of the present and experimental results for first eigenfrequency

液体体积和箱的体积之比是衡量充液比的一个标准,静液面的最高点的 Z 坐标 Z_c 一定程度衡量了充液比,因此,本文计算了球箱内接触角为 5° 时不同 Bond 数下的液体晃动基频随 Z_c 的变化关系,如图 4 所示. 图 4(b) 的无量纲频率是图 4(a) 的倍. 当 Z_c 较小时,图 4(a) 的无量纲频率随 Bond 数增大而迅速减小,图 4(b) 的无量纲频率则随 Bond 数增大而增大.

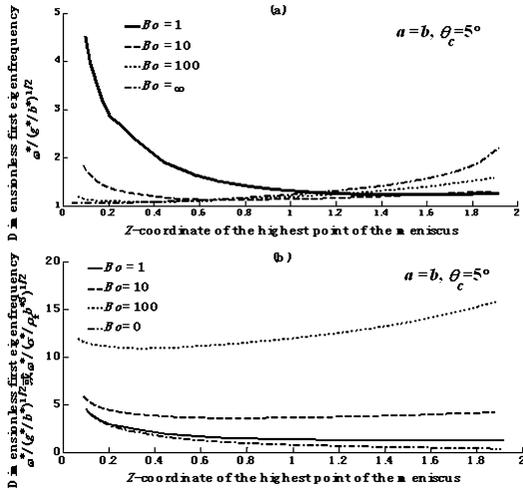


图4 无量纲频率随最高点 z 坐标的变化

Fig. 4 Variation of first eigenfrequency with Z_c

Bond 数很小时,晃动频率随 Z_c 变化的关系如图 5 所示.

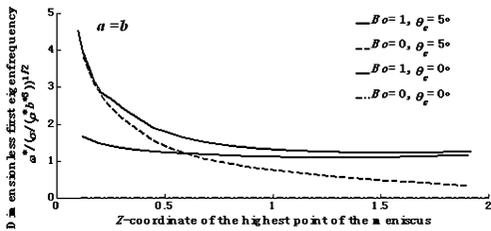


图5 接触角对基频的影响

Fig. 5 Influence of contact angle on first eigenfrequency

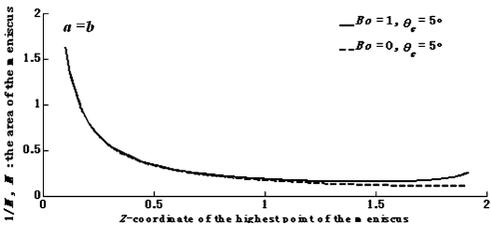


图6 1/M 的值, M 为静液面面积

Fig. 6 Value of $1/M$, M is the area of the meniscus

当 Bond 数为 0,接触角为 0°时,晃动频率非常接近于 0,由于数值精度的原因,得不到准确值 0. 此时晃动相当于不改变表面能的刚性位移. 当 Bond 数为 1,接触角为 0°时,无量纲晃动频率接近于 1,此时, $\sqrt{\sigma^*/(\rho_f b^{*3})} = \sqrt{g^*/(Bo b^*)} = \sqrt{g^*/b^*}$,因此,晃动近似于悬挂点在箱中心,质量在箱底的摆. 对于接触角为 5°,Bond 数为 0 或 1 时,晃动频率随 Z_c 减小显著增加. 如图 6 所示,静液面面积的倒数 $1/M$ 随 Z_c 的变化和图 5 频率随 Z_c 的变化趋势差不多. 因此,小 Bond 数下,接触角

为 5°时,液体可以看成是在表面张力作用下沿箱壁移动的一层膜,膜的表面积越大,晃动频率越小.

Bond 数为 0 和 1,接触角为 5°时,频率随充液体积比的变化如图 7 所示,可见,除了充液比非常小(静液面非常微薄,重力影响非常微弱)外,两者之间区别明显.

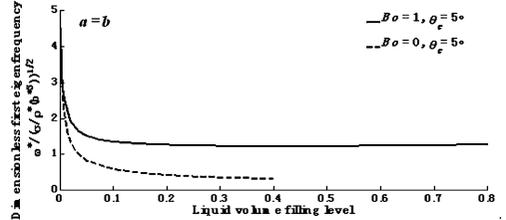


图7 Bond 数为 0 和 1 时,特征频率随充液体积比的变化($Z_c \le 1.9$)

Fig. 7 Variation of first eigenfrequency with liquid volume filling level when Bond number is 0 or 1 ($Z_c \le 1.9$)

最后,本文计算了 $a = 0.75b$ 和 $a = 1.35b$ 的椭球形贮箱内液体在不同的充液体积比和不同的 Bond 数情况下晃动的无量纲基频(接触角为 5°),如图 8 所示,并和文献[4]、[5]进行比较,结果也比较吻合,再次验证了本文的方法的正确性.

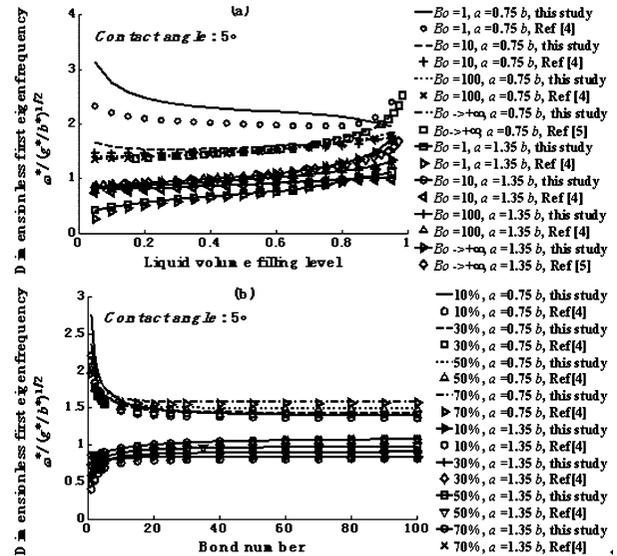


图8 无量纲基频随充液比和 Bond 数的变化

Fig. 8 Variation of first eigenfrequency with liquid volume filling level and Bond number

值得一提的是本文求基频时的 k 取 1,若取收敛值,求得的基频比其他文献偏高. 绝大部分情况下,为 1 求得的基频在所有的求得的基频中最小. 这样的取法有其合理性,因为航天器结构振动的频率一般比液体晃动的频率低,为判断是否产生共振,取为 1 是更安全的取法.

3 结论

本文用高斯超几何级数构造液体速势和晃动波高的模态函数,通过伽辽金方法把液体小幅晃动的变分方程转换为特征值方程求解液体小幅晃动基频,求解速度快,和其他理论及实验结果对照基本吻合,是一种求解液体小幅晃动基频的新方法.如果液体作非小幅晃动,须研究其非线性晃动,如文献[6].

参 考 文 献

- 1 Utsumi M. Low-Gravity propellant slosh analysis using spherical coordinates. *Journal of Fluids and Structures*, 1998, 12: 57 ~ 83
- 2 Coney T A, Salzman J A. Lateral sloshing in oblate spheroidal tanks under reduced and normal gravity conditions. *NASA TN D*, 1971, 6250: 1 ~ 17
- 3 Dodge F T, Garza L R. Simulated low-gravity sloshing in

- spherical, ellipsoidal, and cylindrical tanks. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1970, 7(2): 204 ~ 206
- 4 王照林,邓重平.失重力时球形内液体晃动特性的研究. *空间科学学报*, 1985, 5(4): 294 ~ 302 ((Wang Z L, Deng Z P. Sloshing of liquid in spherical tank at low-gravity environments. *Chinese Journal of Space Science*, 1985, 5(4): 294 ~ 302 (in Chinese))
 - 5 余延生. 一类 Cassini 贮箱液体小幅晃动问题的研究 [博士学位论文]. 哈尔滨工业大学, 2004 (Yu Y S. Study on small amplitude sloshing in a kind of Cassini tank. Harbin; Harbin Institute of Technology, 2004 (in Chinese))
 - 6 贺元军,王萍萍,王本利,马兴瑞. 谐波平衡法求解俯仰运动矩形贮箱中液体非线性晃动. *动力学与控制学报*, 2004, 2(4): 29 ~ 34 (He Y J, Wang P P, Wang B L, Ma X R. Nonlinear sloshing of liquid in rectangular container under pitching excitation by harmonic balance method. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(4): 29 ~ 34 (in Chinese))

SOLVING THE FIRST EIGENFREQUENCY OF LIQUID SLOSHING IN ELLIPSOIDAL TANKS USING ANALYTICAL METHOD*

Yang Dandan Yue Baozeng

(Department of Mechanics, School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract A spherical coordinates was built, whose origin is at the top of the cone tangent to the container at the contact line of the meniscus with the container wall. The velocity potential and the liquid surface displacement were determined analytically in terms of the Gauss hypergeometric series. The variational principle was transformed into a frequency equation in the form of a standard eigenvalue problem by the Galerkin method. The first eigenfrequency solved by this method was compared with that from other theoretical and experimental methods. Large calculations prove that this method is effective in solving the small amplitude sloshing eigenfrequency of liquid.

Key words variational principle, Gauss hypergeometric series, first eigenfrequency of sloshing