

# 超混沌吕系统的滞后投影同步与参数识别\*

王华俊<sup>1,2</sup> 宁娣<sup>3</sup>

(1. 句容市实验高级中学, 句容 212400) (2. 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072)

(3. 中南民族大学数学与统计学学院, 武汉 430074)

**摘要** 研究了超混沌吕系统的滞后投影同步与系统参数识别. 在响应系统中加入适当的非线性控制器, 利用 Lyapunov 稳定性方法和 Barbalat 引理进行理论分析证明, 实现了驱动响应系统之间所有变量的全局滞后投影同步, 并能够对超吕系统的未知参数进行识别. 最后通过数值仿真对本文中提出的理论方法的正确性及可行性进行验证.

**关键词** 超吕系统, 滞后, 投影同步, 参数识别

## 引言

自从1963年 Lorenz 发现第一个混沌系统<sup>[1]</sup>以来, 很多混沌系统和超混沌系统相继被提出<sup>[2-9]</sup>, 这激起了人们极大的研究兴趣, 例如四维超混沌 Rössler 系统<sup>[6]</sup>, 超混沌蔡氏电路<sup>[7]</sup>, 超混沌陈系统<sup>[2,8]</sup>, 超混沌吕系统<sup>[9]</sup>等等. 由于超混沌系统具有高容量、高安全, 高效率的特点. 它被广泛应用于保密通讯<sup>[10]</sup>, 激光, 神经网络, 生物网络等等. 因此, 研究超混沌系统具有重要的意义.

1990年 Pecora 和 Carroll<sup>[11]</sup>做出关于耦合混沌系统同步性研究的开创性工作, 混沌系统的同步在非线性科学研究掀起了新的研究热潮, 现有的文献中, 对混沌系统的同步现象研究大致在以下几个方面<sup>[12]</sup>: 混沌系统完全(精确)同步(CS), 混沌系统相同步(PS), 混沌系统互同步(Mutual Synchronization)广义混沌同步(GS), 混沌系统延迟同步等.

1999年, Mainieri<sup>[13]</sup>等人在研究完全线性混沌系统中观察到一种新的同步现象—投影同步. DAOLIN XU 等人通过对耦合的驱动—响应系统中的响应系统加入控制把投影同步拓展到更一般的非线性系统<sup>[14]</sup>. 此前, 投影同步的研究只局限于局部线性的系统, 如 Lorenz 系统.

投影同步按照同步的时间可分为滞后(或延迟)投影同步, (即时)投影同步, 预期投影同步. 很多实际情况下, 系统的参数是未知的, 或者是部分

已知的, 这就增加了我们相应研究工作以及进一步研究工作的难度. 因此, 如果能识别系统的未知参数, 将对我们处理实际复杂问题带来更大的积极因素. 此前, 张群娇分析了超混沌 Rössler 和超混沌 Lorenz 系统的全局混合投影同步<sup>[15]</sup>. 刘慧等人研究了一个新的超混沌系统的滞后投影同步和参数识别<sup>[16]</sup>.

2005年, 陈爱敏等人在文献[9]中提出了超混沌吕系统, 简称超吕系统. 本文是对他们所提出的超吕系统的投影同步和参数识别问题进行研究分析. 正文内容共分为四个部分: 第一部分讨论参数已知情况下的超吕系统的滞后投影同步; 第二部分讨论参数未知情况下的超吕系统的滞后投影同步和参数识别; 第三部分是进行仿真实验, 对第一、二部分的理论进行验证. 第四部分是对本次研究的总结.

## 1 超吕系统的滞后投影同步

投影同步是指驱动响应系统按照一个尺度因子演化, 即系统的对应分量成比例. 依如下形式定义投影同步:

考虑如下形式的混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) & \rightarrow (\text{驱动系统}) \\ \dot{y} = g(x, y) + u & \rightarrow (\text{响应系统}) \end{cases}$$

其中

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T \\
 g(y) &= (g_1(x, y), g_2(x, y), \dots, g_n(x, y))^T \\
 f_i: R^n &\rightarrow R^n, g_i: R^n \times R^n \rightarrow R^n, (i=1, 2, \dots, n) \\
 u &= (u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in R^n \text{ 是控制器.}
 \end{aligned}$$

**定义 1:** 对于上述的驱动和响应系统, 如果存在常数  $\lambda$ , 使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - \lambda y_i(t)| = 0, (i=1, 2, 3, \dots, n)$  则称驱动 - 响应系统投影同步.

特别地, 当  $\lambda = -1$  时, 称为全局反同步; 当  $\lambda = 1$  时, 称为全局完全同步. 因此, 投影同步可以看做是完全同步的一种推广.

我们首先给出超吕系统的表达式如下所示

$$\begin{cases}
 \dot{x} = a(y - x) + u \\
 \dot{y} = -xz + cy \\
 \dot{z} = xy - bz \\
 \dot{u} = xz + du
 \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x, y, z, u$  是变量,  $a, b, c, d$  是常数. 并且当  $a = 36, b = 3, c = 20, -0.35 < d \leq 1.3$  时上述系统为超混沌状态<sup>[9]</sup>.

我们再考虑它的响应系统

$$\begin{cases}
 \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1) + u_1 + f_1 \\
 \dot{y}_1 = -x_1 z_1 + cy_1 + f_2 \\
 \dot{z}_1 = x_1 y_1 - bz_1 + f_3 \\
 \dot{u}_1 = x_1 z_1 + du_1 + f_4
 \end{cases} \quad (2)$$

其中  $f_1, f_2, f_3, f_4$  是非线性控制器, 使得系统(1)和(2)投影同步.

我们定义误差变量

$$\begin{aligned}
 e_1(t) &= x_1(t) - \lambda x(t - \tau) \\
 e_2(t) &= y_1(t) - \lambda y(t - \tau) \\
 e_3(t) &= z_1(t) - \lambda z(t - \tau) \\
 e_4(t) &= u_1(t) - \lambda u(t - \tau)
 \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\lambda \neq 0$  表示尺度因子, 表示延迟时间.

将(1)和(2)代入(3), 我们得到如下误差系统

$$\begin{cases}
 \dot{e}_1(t) = ae_2(t) - ae_1(t) + e_4(t) + f_1 \\
 \dot{e}_2(t) = -x_1(t)z_1(t) + \lambda x(t - \tau)z(t - \tau) + ce_2(t) + f_2 \\
 \dot{e}_3(t) = x_1(t)y_1(t) - \lambda x(t - \tau)y(t - \tau) - be_3(t) + f_3 \\
 \dot{e}_4(t) = x_1(t)z_1(t) - \lambda x(t - \tau)z(t - \tau) + de_4(t) + f_4
 \end{cases} \quad (4)$$

**定义 2:** 对于驱动系统(1)和响应系统(2), 如果存在常数  $\lambda$ , 使得误差系统(4)满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e_i(t)| = 0, (i=1, 2, 3, 4)$ , 则称驱动 - 响应系统(1)和(2)全局滞后(或延迟)投影同步.

特别的, 如果  $\tau = 0$ , 则称驱动 - 响应系统(1)和(2)全局投影同步. 如果  $\tau < 0$ , 则称驱动 - 响应系统(1)和(2)全局预期投影同步.

**定理 1:** 对于超吕系统(1), 其中  $a, b, c, d$  为已知. 如果系统(2)中的控制器设计为

$$\begin{cases}
 f_1(t) = -z_1(t)e_4(t) \\
 f_2(t) = -le_2(t) + \lambda z(t - \tau)(x_1(t) - x(t - \tau)) \\
 f_3(t) = -\lambda y(t - \tau)(x_1(t) - x(t - \tau)) \\
 f_4(t) = -\lambda x(t - \tau)(z_1(t) - z(t - \tau)) - ke_4(t)
 \end{cases} \quad (5)$$

若  $a > 0, b > 0, l > c + \frac{a}{4}, k > d + \frac{l - c}{4a(l - c) - a^2}$ , 则误差系统(4)的零解是全局渐近稳定的, 即系统(2)和系统(1)是滞后投影同步的.

证明: 构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2}(e_1(t)^2 + e_2(t)^2 + e_3(t)^2 + e_4(t)^2)$$

根据误差系统(4),

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= e_1 \dot{e}_1(t) + e_2 \dot{e}_2(t) + e_3 \dot{e}_3(t) + e_4 \dot{e}_4(t) \\
 &= e_1(t)(ae_2(t) - ae_1(t) + e_4(t) + f_1) + e_2(t)(-x_1(t)z_1(t) + \lambda x(t - \tau)z(t - \tau) + ce_2(t) + f_2) \\
 &\quad + e_3(t)(x_1(t)y_1(t) - \lambda x(t - \tau)y(t - \tau) - be_3(t) + f_3) + e_4(t)(x_1(t)z_1(t) - \lambda x(t - \tau)z(t - \tau) + de_4(t) + f_4) \\
 \therefore x_1(t)y_1(t) - \lambda x(t - \tau)y(t - \tau) &= e_1(t)e_2(t) + \lambda e_1(t)y(t - \tau) + \lambda x(t - \tau)e_2(t) + (\lambda^2 - \lambda)x(t - \tau)y(t - \tau) \\
 x_1(t)z_1(t) - \lambda x(t - \tau)z(t - \tau) &= e_1(t)e_3(t) + \lambda e_1(t)z(t - \tau) + \lambda x(t - \tau)e_3(t) + (\lambda^2 - \lambda)x(t - \tau)z(t - \tau)
 \end{aligned}$$

结合(5)代入化简得:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= -ae_1^2 - (l - c)e_2^2 - be_3^2 - (k - d)e_4^2 + ae_1e_2 + e_1e_4 = \\
 &-(e_1, e_2, e_3, e_4) \begin{pmatrix} a & -\frac{a}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{a}{2} & l - c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & k - d \end{pmatrix} (e_1, e_2, e_3, e_4)^T
 \end{aligned}$$

$$\because a > 0, b > 0, l > c + \frac{a}{4}, k > d + \frac{l - c}{4a(l - c) - a^2}$$

$\therefore \dot{V}(t)$  负定.

根据 Lyapunov 稳定性理论<sup>[17]</sup>, 误差系统(4)的零

解是全局渐近稳定的.

所以,当  $t \rightarrow \infty$  时,  $e_1(t) \rightarrow 0, e_2(t) \rightarrow 0, e_3(t) \rightarrow 0, e_4(t) \rightarrow 0$ . 于是,系统(1)和(2)达到全局滞后投影同步.

## 2 参数未知情况下的滞后投影同步与参数识别

上面的讨论是基于驱动系统的系数是已知的情形,接下来我们探究驱动系统参数  $a, b, c, d$  未知时对它们的识别情况. 对于超吕系统(1), 它的响应系统可以描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \hat{a}(y_1 - x_1) + u_1 + f_1 \\ \dot{y}_1 = -x_1 z_1 + \hat{c}y_1 + f_2 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \hat{b}z_1 + f_3 \\ \dot{u}_1 = x_1 z_1 + \hat{d}u_1 + f_4 \end{cases} \quad (6)$$

其中  $f_1, f_2, f_3, f_4$  是非线性控制器,使得超吕系统(1)和(6)滞后投影同步.

$\hat{a}(t), \hat{b}(t), \hat{c}(t), \hat{d}(t)$  是对参数系数  $a, b, c, d$  的估计,满足当  $t \rightarrow \infty$  时,有

$$\hat{a}(t) \rightarrow a, \hat{b}(t) \rightarrow b, \hat{c}(t) \rightarrow c, \hat{d}(t) \rightarrow d.$$

我们令  $\bar{a}(t) = \hat{a}(t) - a, \bar{b}(t) = \hat{b}(t) - b, \bar{c}(t) = \hat{c}(t) - c, \bar{d}(t) = \hat{d}(t) - d$ ,将(6)和(1)代入(3), 我们可以得到如下误差动力系统.

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = ae_2(t) - ae_1(t) + e_4(t) + f_1 + \bar{a}(t)(y_1(t) - x_1(t)) \\ \dot{e}_2(t) = -x_1(t)z_1(t) + \lambda x(t-\tau)z(t-\tau) + ce_2(t) + f_2 + \bar{c}(t)y_1(t) \\ \dot{e}_3(t) = x_1(t)y_1(t) - \lambda x(t-\tau)y(t-\tau) - be_3(t) + f_3 - \bar{b}(t)z_1(t) \\ \dot{e}_4(t) = x_1(t)z_1(t) - \lambda x(t-\tau)z(t-\tau) + de_4(t) + f_4 + \bar{d}(t)u_1(t) \end{cases} \quad (7)$$

**定理 2:** 对于超吕系统(1), 响应系统(6)中的控制器设计如下:

$$\begin{cases} f_1(t) = -z_1(t)e_4(t) \\ f_2(t) = -le_2(t) + \lambda z(t-\tau)(x_1(t) - x(t-\tau)) \\ f_3(t) = -\lambda y(t-\tau)(x_1(t) - x(t-\tau)) \\ f_4(t) = -\lambda x(t)(z_1(t) - z(t-\tau)) - ke_4(t) \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $a > 0, b > 0, l > c + \frac{a}{4}, k > d + \frac{l-c}{4a(l-c) - a^2}$ .

然后使用如下的自适应律,

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}}(t) = -e_1(t)(y_1(t) - x_1(t)) \\ \dot{\hat{b}}(t) = z_1(t)e_3(t) \\ \dot{\hat{c}}(t) = -y_1(t)e_2(t) \\ \dot{\hat{d}}(t) = -u_1(t)e_4(t) \end{cases} \quad (9)$$

则误差动力系统(7)的零解是全局渐近稳定的. 即,系统(6)和(1)是渐近达到滞后投影同步的. 此外,如果  $y_1(t) \rightarrow x_1(t), z_1(t), y_1(t)$  和  $u_1(t)$  线性无关,那么当  $t \rightarrow \infty$  时,未知参数  $a, b, c, d$  可以被  $\hat{a}(t), \hat{b}(t), \hat{c}(t), \hat{d}(t)$  识别.

证明:构造一个正定的 Lyapunov 函数如下

$$V(t) = \frac{1}{2}(e_1(t)^2 + e_2(t)^2 + e_3(t)^2 + e_4(t)^2) + \frac{1}{2} \times (\bar{a}(t)^2 + \bar{b}(t)^2 + \bar{c}(t)^2 + \bar{d}(t)^2)$$

根据误差系统(7)和控制器(8),

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_1(t)\dot{e}_1(t) + e_2(t)\dot{e}_2(t) + e_3(t)\dot{e}_3(t) + e_4(t)\dot{e}_4(t) + \bar{a}(t)\dot{\bar{a}}(t) + \bar{b}(t)\dot{\bar{b}}(t) + \bar{c}(t)\dot{\bar{c}}(t) + \bar{d}(t)\dot{\bar{d}}(t) \\ &= e_1(t)(ae_2(t) - ae_1(t) + e_4(t) + f_1 + \bar{a}(t)(y_1(t) - x_1(t))) + e_2(t)(-x_1(t)z_1(t) + \lambda x(t-\tau)z(t-\tau) + ce_2(t) + f_2 + \bar{c}(t)y_1(t) + e_3(t)(x_1(t)y_1(t) - \lambda x(t-\tau)y(t-\tau) - be_3(t) + f_3 - \bar{b}(t)z_1(t)) + e_4(t)(x_1(t)z_1(t) - \lambda x(t-\tau)z(t-\tau) + de_4(t) + f_4 + \bar{d}(t)u_1(t)) + \bar{a}(t)\dot{\bar{a}}(t) + \bar{b}(t)\dot{\bar{b}}(t) + \bar{c}(t)\dot{\bar{c}}(t) + \bar{d}(t)\dot{\bar{d}}(t) \end{aligned}$$

根据(8)代入化简得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -ae_1^2 - (l-c)e_2^2 - be_3^2 - (k-d)e_4^2 + ae_1e_2 + e_1e_4 = \\ &= -a(e_1 - \frac{e_2}{2} - \frac{e_4}{2a})^2 + \frac{a}{2}(e_2 + \frac{e_4}{a})^2 - (l-c)e_2^2 - be_3^2 - (k-d)e_4^2 \leq -a(e_1 - \frac{e_2}{2} - \frac{e_4}{2a})^2 + \frac{a}{2}(e_2^2 + \frac{e_2^2}{a} + \frac{e_4^2}{a^2}) - (l-c)e_2^2 - be_3^2 - (k-d)e_4^2 = \\ &= -a(e_1 - \frac{e_2}{2} - \frac{e_4}{2a})^2 - (l-c - \frac{a+1}{2})e_2^2 - be_3^2 - (k-d - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2})e_4^2 \end{aligned}$$

$$\because a > 0, b > 0, l > c + \frac{a}{4}, k > d + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \dot{V}(t) \leq 0, \text{ 即 } V(t) \text{ 单调递减}$$

$$\therefore \text{ 当 } t > 0 \text{ 时, } V(t) \leq V(0)$$

又显然  $V(t) \geq 0$

$\therefore 0 \leq V(t) \leq V(0), t \in [0, +\infty)$ , 即  $V(t)$  有界, 且  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t)$  存在

$$\text{令 } M = \min \left\{ a, l - c - \frac{a}{2} - \frac{1}{2}, b, k - d - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{则 } \dot{V}(t) \leq -M \left\{ \left( e_1(t) - \frac{e_2(t)}{2} - \frac{e_4(t)}{2a} \right)^2 + e_2(t)^2 + e_3(t)^3 + e_4(t)^2 \right\}$$

$$\therefore 0 \leq e_i(t)^2 \leq -\frac{\dot{V}(t)}{M} \quad (i = 2, 3, 4), 0 \leq \left( e_1(t) - \frac{e_2(t)}{2} - \frac{e_4(t)}{2a} \right)^2 \leq -\frac{\dot{V}(t)}{M}$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} e_i(t)^2 dt \leq -\frac{1}{M} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{V}(\theta) d\theta = \frac{1}{M} (V(0) - \lim_{t \rightarrow \infty} V(t)) < +\infty \quad (i = 2, 3, 4)$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} \left( e_1(t) - \frac{e_2(t)}{2} - \frac{e_4(t)}{2a} \right)^2 dt \leq -\frac{1}{M}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{V}(\theta) d\theta = \frac{1}{M} (V(0) - \lim_{t \rightarrow \infty} V(t)) < +\infty$$

$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} V(t)$  存在

$\therefore e_i(t)$  有界,  $(i = 2, 3, 4)$

由误差系统(7), 可知  $\dot{e}_i(t)$  有界

$$\therefore \text{根据 Barbalat 引理}^{[18,19,20]}, \lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0 \quad (i = 2, 3, 4). \text{ 同理, } \lim_{t \rightarrow \infty} \left( e_1(t) - \frac{e_2(t)}{2} - \frac{e_4(t)}{2a} \right) = 0$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$$

于是, 超吕系统(1)和(6)全局滞后投影同步. 另外, 根据(9)并结合上述结论, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $\dot{a}(t) \rightarrow 0, \dot{b}(t) \rightarrow 0, \dot{c}(t) \rightarrow 0, \dot{d}(t) \rightarrow 0$ .

假设对于每个  $i = 1, 2, 3, 4, \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_i(t)$  存在. 由于  $\dot{e}_i(t)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 则  $\dot{e}_i(t)$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续  $(i = 1, 2, 3, 4)$ . 由于  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, (i = 1, 2, 3, 4)$ , 根据 Barbalat 引理<sup>[18,19,20]</sup>, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_i(t) = 0, (i = 1, 2, 3, 4)$$

根据(7)和(8)我们得到, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\bar{a}(t)(y_1(t) - x_1(t)) + \bar{c}(t)y_1(t) + \bar{b}(t)z_1(t) + \bar{d}(t)u_1(t) = 0$ . 根据定理的已知条件,  $y_1(t) - x_1(t), z_1(t)$  和  $u_1(t)$  线性无关, 于是得到: 当  $t \rightarrow \infty$  时,

$$\bar{a}(t) \rightarrow 0, \bar{b}(t) \rightarrow 0, \bar{c}(t) \rightarrow 0, \bar{d}(t) \rightarrow 0.$$

那么, 超吕系统(1)和(6)达到全局滞后投影同步时, 系统未知参数  $a, b, c, d$  可以被  $\hat{a}(t), \hat{b}(t), \hat{c}(t), \hat{d}(t)$  识别.

### 3 数值仿真

例 3.1 参数已知情况下超吕混沌系统的(滞后)投影同步

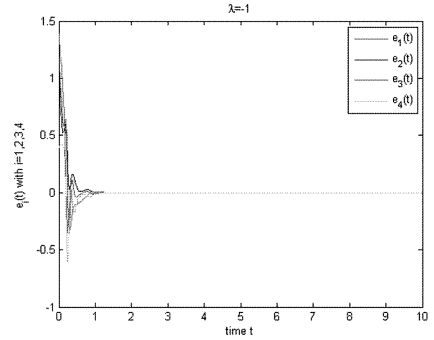


图 1(a)  $\tau = 0, \lambda = -1$  时的投影误差

Fig. 1(a) Projective error with  $\tau = 0, \lambda = -1$

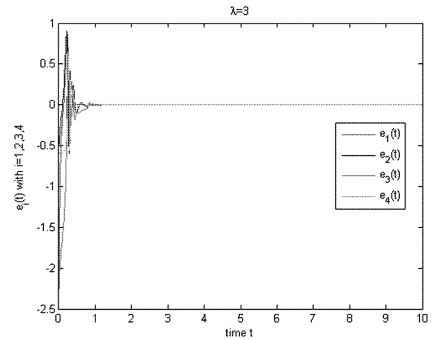


图 1(b)  $\tau = 0, \lambda = 3$  时的投影误差

Fig. 1(b) Projective error with  $\tau = 0, \lambda = 3$

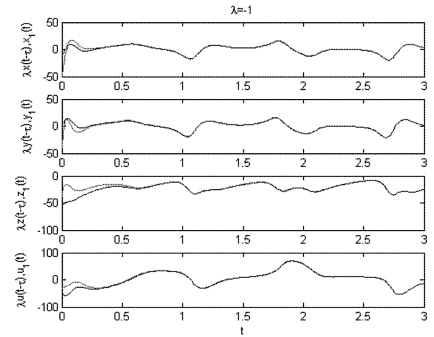


图 2(a)  $\tau = 0.3$  时的滞后投影同步

Fig. 2(a) Projectively Lag synchronization with  $\tau = 0.3$

在这部分, 我们将通过数值仿真来验证定理 1 的正确性. 我们取  $a = 36, b = 3, c = 20, d = -0.2, l = 30, k = 0.5$ . 显然  $a > 0, b > 0, l > c + \frac{a}{4}, k > d +$

$$\frac{l - c}{4a(l - c) - a^2}, \text{ 满足定理 1 的条件, 当延迟时间 } \tau = 0 \text{ 时, 系统(1)和(2)按尺度因子 } \lambda = -1 \text{ 和 } \lambda = 3$$

投影同步得到系统四个分量对应的投影误差变化如图 1(a)、(b)所示. 图 2 演示了延迟时间  $\tau = 0.3$

时系统(1)和(2)的滞后投影同步情况.

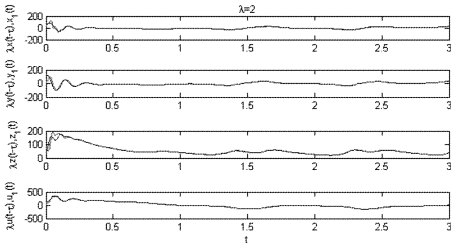


图 2(b)  $\tau = 0.3$  时的滞后投影同步

Fig. 2(b) Projectively Lag synchronization with  $\tau = 0.3$

### 例 3.2 超吕系统参数未知情况下的滞后投影同步与参数识别.

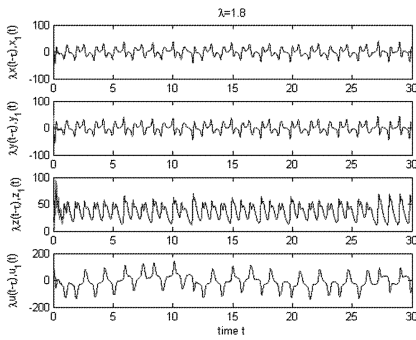


图 3(a) 参数未知时的滞后投影同步

Fig. 3(a) Projectively lag synchronization of the hyperchaos system with unknown parameters

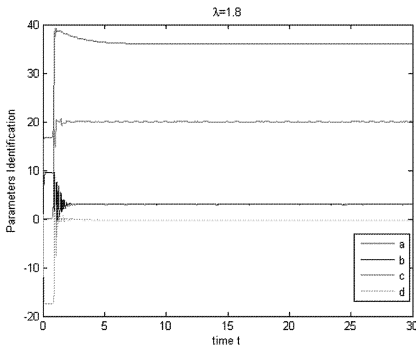


图 3(b) 系统参数识别

Fig. 3(b) System's Parameters identification

在本例中,我们通过数值仿真来验证定理 2 的正确性. 我们取  $a = 36, b = 3, c = 20, d = -0.26, l = 45, k = 0.5, \lambda = 1.8, \tau = 0.7$ . 满足  $a > 0, b > 0, l > c + \frac{a+1}{2}, k > d + \frac{l}{2a} + \frac{1}{2}$ . 图 3(a) 展示了驱动响应系统的滞后投影同步图. 图 3(b) 是对参数  $a, b, c, d$  的识别情况. 从图 3(c) 也可以看出,  $y_1(t) - x_1(t), z_1(t), y_1(t), u_1(t)$  的极限不为零, 并且可以看出它们是线性无关的. 因此能够实现滞后投影同步, 并识别  $a, b, c, d$  的值.

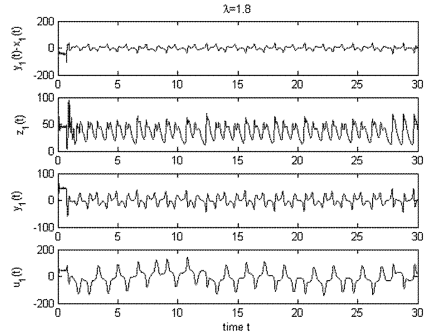


图 3(c) 测试  $y_1(t) - x_1(t), z_1(t), y_1(t)$  和  $u_1(t)$  的变化

Fig. 3(c) test the variation of  $y_1(t) - x_1(t), z_1(t), y_1(t), u_1(t)$

## 4 结论

本文研究了超吕系统的滞后投影同步与参数识别问题. 通过对超吕系统加非线性控制器, 利用 Lyapunov 稳定性理论以及 Barbalat 引理, 我们得到了定理 1 和定理 2 的结论. 定理 1 给出了超吕系统滞后投影同步的判定方法. 定理 2 给出了基于投影同步的参数识别方法, 有了这一方法, 我们事先可以不需要知道系统的参数. 在推导定理 1、2 的过程中, 我们发现, 控制器中的反馈增益  $l$  和  $k$  是与系统参数有关的,  $y_1(t) - x_1(t), z_1(t), y_1(t)$  和  $u_1(t)$  的线性无关性是利于系统参数识别的. 另外, 与文献[10]相比, 本文中设计的控制器较为简单, 因而能以更低的物理代价实现, 大大降低了应用成本. 在做仿真实验时, 我们验证了定理 1 和定理 2 的正确性和可行性. 综上所述, 超吕系统是可以实现全局的滞后投影同步并可以对其系统参数进行识别的, 这对我们在处理许多类似的系统同步问题过程中具有重要的借鉴或指导意义.

## 参 考 文 献

- 1 Lorenz E N. Deterministic non-periods flows. *J. Atmos. Sci.*, 1963, 20:130 ~ 141
- 2 Chen G, Dong X. From chaos to order; Methodologies, perspectives and applications. WorldScientific, Singapore, 1998
- 3 Lü J, Chen G. A new chaotic attractor coined. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 2002, 12(3) : 659 ~ 661
- 4 Lü J, Chen G, Cheng D Z. A new chaotic system and beyond: the general Lorenz-like system. *Int. Bifurc. Chaos*, 2004, 14(5) : 1507 ~ 1537
- 5 Wang X Y, Wang M J. A hyperchaos generated from Lorenz system. *Physica A*, 2008, 387(14) : 3751 ~ 3758

- 6 Rössler O. An equation for the hyperchaos. *Phys. Lett. A*, 1979, 71: 155 ~ 157
- 7 Cafagna D, Grassi G. New 3D-scroll attractors in hyperchaotic Chua's circuits forming a ring. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 2003, 13(10): 2889 ~ 2903
- 8 Zhou T, Tang Y, Chen G. Complex dynamical behaviors of the chaotic Chen's system. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 2003, 9: 2561 ~ 2574
- 9 Chen A M, Lu J A, Lü J, Yu S M. Generating hyperchaotic Lü attractor via state feedback control. *Physica A*, 2006, 364: 103 ~ 110
- 10 林美丽,袁正中. 带有不确定性的不同超混沌系统的同步及其在保密通信中的应用. *动力学与控制学报*, 2009, 7(3): 239 ~ 244 (Lin M L, Yuan Z Z. Synchronization between two different hyperchaotic systems with uncertainties and its application to secure communications. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(3): 239 ~ 244 (in Chinese))
- 11 Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett*, 1990, 64: 821 ~ 824
- 12 刘杰,陈士华,陆君安. 统一混沌系统的投影同步与控制. *物理学报*, 2003, 52(7): 1595 ~ 1605 (Liu J, Chen S H, Lu J A. Projective synchronization and control of unified chaotic systems. *Journal of physics*, 2003, 52(7): 1595 ~ 1605 (in Chinese))
- 13 Mainieri R, Rehacek J. Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems. *Phys Rev Lett*, 1999, 82(15): 3042 ~ 3045
- 14 X D, Li Z. Controlled projective synchronization in non-partially linear chaotic systems. *Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(6): 1395 ~ 1402
- 15 张群娇. 超混沌 Rössler 和超混沌 Lorenz 系统的全状态混合投影同步. *动力学与控制学报*, 2009, 7(2): 148 ~ 152 (Zhang Q J. Full state projective synchronization of hyperchaotic Rössler system and hyperchaotic Lorenz system. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(2): 148 ~ 152 (in Chinese))
- 16 Liu H, Lu J A, Zhang Q J. Projectively lag synchronization and uncertain parameters identification of a new hyperchaotic system. *Nonlinear Dyn*, 2010, 62: 427 ~ 435
- 17 陈士华,陆君安. 混沌动力学初步. 武汉: 武汉水利电力大学出版社, 1998 (Chen S H, Lu J A. Preliminary of the chaotic dynamics. Wuhan: Wuhan water power university press Press, 1998 (in Chinese))
- 18 Popov V M. Hyperstability of control systems. Springer, New York, 1973
- 19 Khalil H K. Nonlinear System, 3rd edn. Prentice Hall, New York, 2002
- 20 闵颖颖,刘允刚. Barbalat 引理及其在系统稳定性分析中的应用. *山东大学学报(工学版)*, 2007, 37(1): 56 ~ 60 (Ming Y Y, Liu Y G. The application in the system stability analysis of Barbalat lemma. *Journal of Shandong University (Engineering Science)*, 2007, 37(1): 56 ~ 60 (in Chinese))

## PROJECTIVELY LAG SYNCHRONIZATION AND UNKNOWN PARAMETERS IDENTIFICATION OF HYPERCHAOTIC Lü SYSTEM\*

Wang Huajun<sup>1,2</sup> Ning Di<sup>3</sup>

(1. Jurong Experimental Senior Middle School, Jurong 212400, China)

(2. School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

(3. School of Mathematics and Statistics, South-central University for Nationalities, Wuhan 430074, China)

**Abstract** This paper researched the Projectively lag synchronization and unknown parameters identification of hyperchaotic Lü system. Projection lag synchronization is realized between the driver and response system by adding appropriate nonlinear controller into response system and applying Lyapunov stability method and Barbalat lemma. And the unknown parameters of hyperchaotic Lü system also can be identified. Finally, several numerical simulations were given to test and verify the correctness and feasibility of the methods proposed.

**Key words** hyperchaotic Lü system, lag, projective synchronization, parameters identification