

转盘偏置对转子系统动力学特性的影响研究*

王美令 韩清凯

(东北大学机械学院, 沈阳 110819)

摘要 以 Jeffcott 转子系统为对象, 研究转盘在转轴上不同偏置安装位置所引起的陀螺效应, 以及对转子系统固有特性和弯曲振动模式的影响规律. 基于所建立的集中质量模型, 数值计算和比较的结果表明, 不同的转盘安装偏置量会对转子系统临界转速和不平衡响应产生明显影响. 偏置程度越大, 陀螺效应对临界转速及不平衡响应的影响越大, 而在转子系统完全对称的情况下, 陀螺效应则可以忽略.

关键词 转子系统, 转盘偏置, 陀螺效应

引言

旋转机械在航空、能源等部门大量应用, 其转子系统的动力学研究和振动分析非常重要. 其中由于陀螺效应的存在, 一般情况下都会使得转子系统动力学特性变得复杂^[1-3].

在目前的转子系统动力学研究中, 虽然人们都注意到高转速和转子不对称情况下的陀螺效应不能忽略^[4], 但是, 在许多简化模型中, 还是往往会低估陀螺效应的影响^[5,6]. 例如, 文献[7-8]建立了转子系统力学模型, 进行转子动力学特性分析并未考虑陀螺效应; 文献[9]中建立了非对称柔性转子系统模型, 为简化模型亦未考虑陀螺效应; 文献[10,11]分析了转子陀螺效应对进动角速度、振型以及临界角速度的影响. 然而, 这些研究均是考虑了陀螺效应, 而对陀螺效应对转子系统影响规律的研究相对较少.

在本文中, 建立了考虑转盘偏置引起的陀螺效应的转子系统集中质量模型. 通过对转盘不同偏置情况下的数值仿真计算, 比较分析了陀螺效应对转子系统临界转速和不平衡振动响应的影响规律.

1 转盘偏置转子系统的建模

如图1所示的转盘偏置 Jeffcott 转子系统, 转轴两端为刚性支承, 转轴长为 l , 转盘距左支点 A 处的距离为 a , 转盘的质量、极转动惯量、直径转动惯量分别为 m 、 J_p 、 J_d , 以转盘中心 O' 的坐标 x 、 y 和转

角 θ_x 、 θ_y 表示转盘在运动过程中任意瞬时的位置.

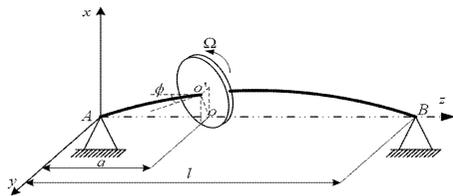


图1 转盘偏置转子模型图

Fig. 1 Model of the offset rotor system

当转子系统以角速度 Ω 转动时, 其轴线与两支点的连线有一夹角 ϕ , 转盘对其中心 O' 的动量矩为 $H = J_p \Omega$, 它与轴线 AB 的夹角也是 ϕ . 设其自然振动频率为 ω , 则转盘中心 O' 与轴线 AB 所构成的平面绕 AB 轴有涡动角速度 ω . 由于涡动的存在, 转盘的动量矩 H 将不断地改变方向, 因此, 存在惯性矩 $M = -(\omega \times H) = H \times \omega = J_p \Omega \times \omega$, 该惯性矩的方向与平面 $O'AB$ 垂直, 大小为 $M = J_p \Omega \omega \sin \phi \approx J_p \Omega \omega \phi$, 这一惯性力矩即为陀螺力矩.

在不计外力、考虑陀螺力矩的情况下, 由质心定理和动量矩定理得到的转子系统的运动微分方程为^[4]

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_1 + \Omega J \dot{u}_2 + K u_1 &= 0 \\ M\ddot{u}_2 - \Omega J \dot{u}_1 + K u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $u_1 = \{x \ \theta_y\}^T$, $u_2 = \{y \ -\theta_x\}^T$ 为广义坐标向量; $M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_d \end{bmatrix}$ 为质量矩阵; K 为刚度矩阵; $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_p \end{bmatrix}$ 为陀螺效应矩阵. 其中, 可以由转盘质量 m

2010-12-29 收到第1稿, 2011-04-08 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(50775028)

和转盘半径 R 计算得到圆盘的极转动惯量 $J_p = 1/2mR^2$ 和直径转动惯量 $J_d = 1/2J_p$, 进而可以确定质量矩阵 M 和陀螺效应矩阵 J .

刚度矩阵 K 通过柔度系数法求得. 当转盘中心点 O' 受集中力 F 作用时, 由 Euler 梁变形理论可知该点的线位移和角位移分别为^[5]

$$\begin{aligned} x &= \frac{F}{3EI}a^2(l-a)^2 \\ \theta_y &= \frac{F}{3EI}a(l-a)(l-2a) \end{aligned} \quad (2)$$

式中, E, I 分别为转轴的杨氏模量和截面惯性矩. 当转盘中心点 O' 受力矩 M 作用时, 该点的线位移和角位移分别为

$$\begin{aligned} x &= \frac{M}{3EI}a(l-a)(l-2a) \\ \theta_y &= \frac{M}{3EI}(l^2 - 3al + 3a^2) \end{aligned} \quad (3)$$

通过计算单位力、单位力矩引起的线位移和角位移可得到如下柔度系数矩阵

$$B = \frac{1}{3EI} \begin{bmatrix} a^2(l-a)^2 & a(l-a)(l-2a) \\ a(l-a)(l-2a) & l^2 - 3al + 3a^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

通过对柔度系数求逆, 即 $K = B^{-1}$, 可以得到相应的刚度矩阵 K .

2 临界转速计算

用复向量表示转子系统转盘中心的位移, 令 $U = u_1 + iu_2$, 式(1)可记为

$$MU - i\Omega JU + KU = 0 \quad (5)$$

这是 2 个具有复系数的二阶线性微分方程组. 设其解为

$$U = U_0 e^{i\omega t} \quad (6)$$

式中, U_0 是位移振幅向量, 且各元素都是复数, ω 为转子的涡动频率. 把式(6)代入式(5)可得

$$(-M\omega^2 + J\Omega\omega + K)U_0 = 0 \quad (7)$$

得频率方程

$$| -M\omega^2 + J\Omega\omega + K | = 0 \quad (8)$$

当 $\omega = \Omega$ 时, 轴线弯曲平面的进动为同步正向涡动. 类似地, $\omega = -\Omega$ 时则为同步反向涡动. 在计算转子系统临界转速时, 通常只考虑同步正向涡动时的临界转速, 也就是将 $\Omega = \omega$ 代入式(8), 可得

$$| -(M - J)\omega^2 + K | = 0 \quad (9)$$

对于不计陀螺力矩的影响的情况, 即 $J = 0$, 式(8)可简化为

$$| -M\omega^2 + K | = 0 \quad (10)$$

由此可见, 在不计陀螺力矩时, 转子系统的同步正向涡动的临界转速就是其静止时横向固有频率.

3 陀螺效应对转盘偏置转子系统临界转速的影响

为研究并比较转盘偏置引起的陀螺效应对转子系统临界转速的影响, 选取如表 1 所示的仿真参数.

表 1 转盘偏置转子系统的参数

Table 1 Parameters of the offset rotor system

Parameter	Mass of disc (Kg)	Radius of disc (m)	Elastic modulus (N/m^2)	Diameter of shaft (m)	Length of shaft (m)
value	20	0.12	2.06e11	0.03	0.75

选取转盘距左支点 A 处的距离分别为转轴长度的 $1/2, 1/3, 1/3, 1/7$, 分别作出这四种偏置情况下的转子系统的 Campbell 图, 如图 2 所示, 其中标记 F 和 B 的曲线分别为考虑陀螺效应的正向和反向涡动情况, 标记 NGE 的虚线即为不考虑陀螺效应的情况.

在图 2 中, 虚线所表示的不考虑陀螺效应时的涡动角速度, 随着自转角速度增大而呈直线变化. 作 $\omega = \Omega$ 的直线与各曲线相交, 得到的交点对应的转速是不考虑陀螺效应时的临界转速以及考虑陀螺效应时的同步正向、反向涡动临界转速.

由图 2 可以看出, 当 $a = l/2$ 时, 不考虑陀螺效应时的转子系统一、二阶临界转速为 34.6873Hz 、 216.7959Hz . 考虑陀螺效应时, 转子系统反向同步涡动一、二阶临界转速为 34.6873Hz 、 125.1671Hz , 转子系统同步正向涡动临界转速为 34.6873Hz .

$a = l/3$ 时, 不考虑陀螺效应时的转子系统一、二阶临界转速为 38.7373Hz 、 231.6444Hz . 考虑陀螺效应时, 转子系统反向同步涡动一、二阶临界转速为 38.2Hz 、 135.9Hz , 转子系统同步正向涡动临界转速为 39.30Hz .

$a = l/5$ 时, 不考虑陀螺效应时的转子系统一、二阶临界转速为 51.8320Hz 、 283.3701Hz . 考虑陀螺效应时, 转子系统反向同步涡动一、二阶临界转速为 47.59Hz 、 178.3Hz , 转子系统同步正向涡动临界

转速为 56.70Hz.

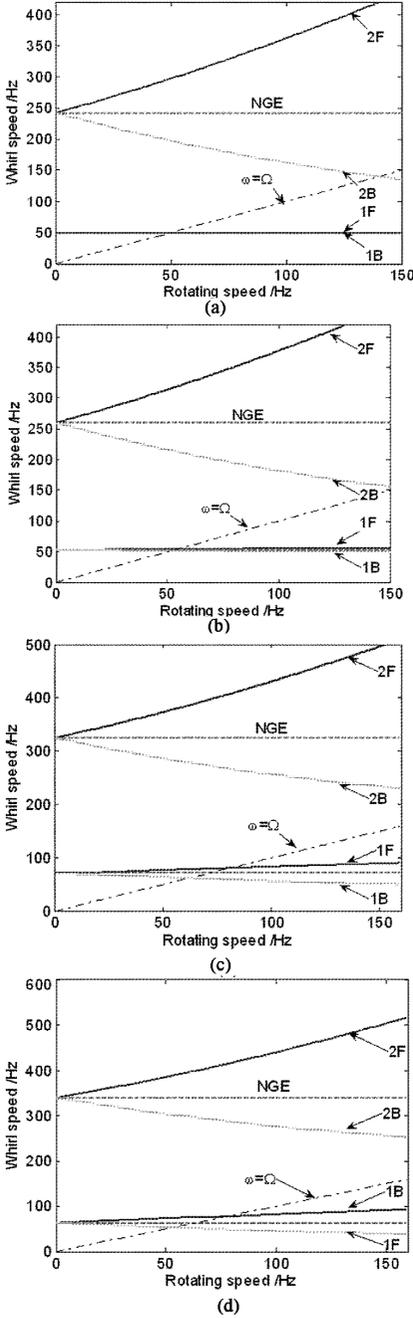


图2 转盘位置(a) = l/2; (b) a = l/3; (c) a = l/5; (d) a = l/7 时系统 Campbell 图

Fig. 2 Campbell diagram of the offset rotor system

when (a) a = l/2; (b) a = l/3; (c) a = l/5; (d) a = l/7

a = l/7 时, 不考虑陀螺效应时的转子系统一、二阶临界转速为 63.3105Hz、339.9160Hz. 考虑陀螺效应时, 转子系统反向同步涡动一、二阶临界转速为 61.2Hz、421.4Hz, 转子系统同步正向涡动临界转速为 184.92Hz.

以上四种情况, 不考虑陀螺效应时转子系统临界转速有两阶, 考虑陀螺效应时, 同步正向涡动临

界转速仅一阶, 同步反向涡动临界转速有 2 阶. 在 Campbell 图中, 一阶正向涡动曲线与直线 $\omega = \Omega$ 相交, 而二阶正向涡动曲线与之不相交. 转盘偏置转子系统在正向涡动时, 由于陀螺力矩的作用随着自转角速度 Ω 的增大, 二阶正向涡动角速度也急剧增大, 且总是大于自转角速度 Ω , 不存在 $\omega = \Omega$ 的情况, 故二阶涡动曲线与直线 $\omega = \Omega$ 不相交.

定义临界转速偏差

$$err = \frac{\omega_{ng} - \omega_g}{\omega_g} \times 100\% \quad (11)$$

式中, err 为临界转速偏差, ω_{ng} 为不考虑陀螺效应时转子系统一阶临界转速, ω_g 为考虑陀螺效应时转子系统一阶同步正向涡动临界转速. 不考虑陀螺效应和考虑陀螺效应时转子系统一阶临界转速对比如表 2 所示.

表 2 陀螺效应对一阶临界转速的影响

Table 2 Gyroscopic effects on the first critical speed

Disc location	Critical speed ω_{ng} without gyroscopic effects (Hz)	Critical speed ω_g with gyroscopic effects (Hz)	Offset of critical speed err
$a = l/2$	34.3554	34.3554	0%
$a = l/3$	38.3666	38.9231	-1.43%
$a = l/5$	51.3360	56.16	-8.58%
$a = l/7$	63.3105	78.6357	-19.49%

从表 2 可知, 转盘偏置的位置不同, 由此引起的陀螺效应对转子系统一阶临界转速的影响就不同, 考虑陀螺效应与不考虑陀螺效应时的一阶临界转速的偏差存在很大不同. 而当转子圆盘位于转轴中央 ($a = l/2$) 时, 陀螺效应对于一阶临界转速没有影响. 转子圆盘的偏置程度越大, 陀螺效应越明显, 由此引起的一阶临界转速的偏差也就越大, 越明显.

4 陀螺效应对转盘偏置转子系统不平衡响应的影

在转子系统不平衡振动响应计算时, 要考虑阻尼因素的存在. 引入系统阻尼和转盘质量不平衡, 转子系统的运动方程式(1)改写为如下形式

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_1 + \Omega J\dot{u}_2 + C\dot{u}_1 + Ku_1 &= Q\cos(\Omega t) \\ M\ddot{u}_2 - \Omega J\dot{u}_1 + C\dot{u}_2 + Ku_2 &= Q\sin(\Omega t) \end{aligned} \quad (12)$$

式中, $Q = \{m_e e \Omega^2 \quad 0\}^T$ 是不平衡力向量, 其中 m_e 为偏心质量, e 为偏心距. C 是系统阻尼矩阵.

系统阻尼矩阵 C 由如下比例阻尼假设来计

算^[12]

$$C = \alpha M + \beta K \tag{13}$$

式中,

$$\alpha = 2 \left(\frac{\xi_2}{\omega_2} - \frac{\xi_1}{\omega_1} \right) / \left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right) \beta = 2 (\xi_2 \omega_2 - \xi_1 \omega_1) / (\omega_2^2 - \omega_1^2) \tag{14}$$

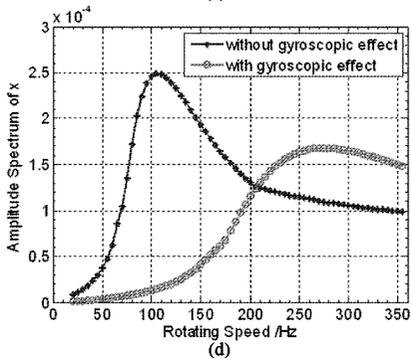
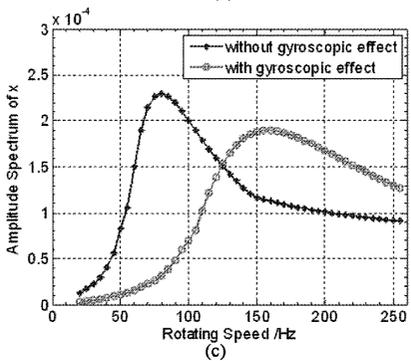
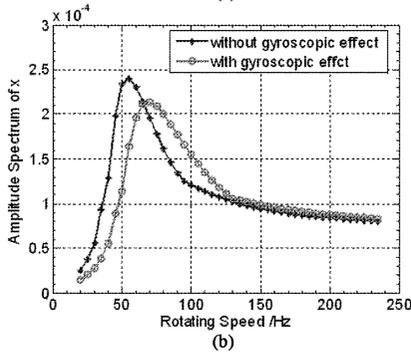
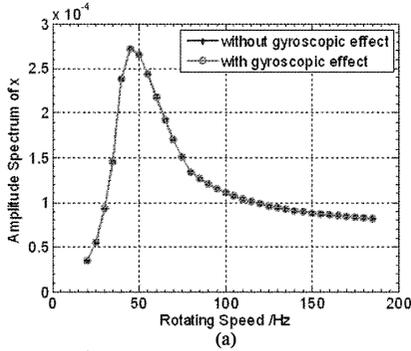


图3 转盘位置(a) = l/2; (b) a = l/3; (c) a = l/5; (d) a = l/7 时系统转速 - 幅值图

Fig. 3 Rotating speed - Amplitude diagram of the offset rotor system when (a) a = l/2; (b) a = l/3; (c) a = l/5; (d) a = l/7

式中, ω_1, ω_2 分别是转子系统不计陀螺效应时的第一、第二固有频率, ξ_1, ξ_2 分别为对应两个固有频率的阻尼系数, 在这里可以分别取作 0.05, 0.08.

选取转盘存在偏心质量 0.01Kg, 偏心距 0.1m, 针对转盘距左支点 A 处的距离 a 分别为转轴长度的 1/2、1/3、1/3、1/7, 四种情况, 并分别作出转子系统不平衡振动响应的转速幅值图, 结果如图 3 所示.

由图 3(a) 可以看出, 当转盘位置在 a = l/2 时, 考虑陀螺效应和不考虑陀螺效应时的转速 - 幅值曲线重合, 这是转子系统完全对称的情况. 从图 3(b) - (d) 可以看出, 当转盘位置从 a = l/3 变化到 a = l/7 时, 考虑陀螺效应和不考虑陀螺效应时的转速 - 幅值曲线出现不同程度的偏移. 转盘偏置程度越大, 振动响应的转速幅值曲线的变化程度越大, 也就是陀螺力矩对系统振动响应的影响越大. 但是, 当转速超过某一值时, 考虑陀螺效应时的幅值较之不考虑陀螺效应时的幅值要小, 且两者相互靠近.

5 结论

基于建立的转盘偏置转子系统集中质量模型, 进行数值计算和比较, 结果表明, 转盘位置在转轴上的安装偏置所引起的陀螺效应会对转子系统的动力学特性产生明显影响.

(1) 考虑陀螺效应与不考虑陀螺效应所引起的一阶临界转速的偏差存在很大不同, 转盘偏置程度越大, 临界转速偏差也越大, 而在转盘位于转轴中央且转子系统完全对称时, 陀螺效应对于转子系统一阶临界转速没有影响.

(2) 转盘偏置程度越大, 陀螺力矩对转子系统振动响应的的影响越大, 而在转盘位于转轴中央且转子系统完全对称时, 陀螺效应对于转子系统振动响应几乎没有影响.

参 考 文 献

- 1 Muszynska A. Rotordynamics. Taylor & Francis Group, 2005:79 ~ 80
- 2 Vance J M. Rotordynamics of Turbomachinery . A Wiley - Interscience Publication, 1988:120 ~ 125
- 3 闻邦椿, 顾家柳, 夏松波, 王正. 高等转子动力学. 北京:

- 机械工业出版社,2000:151 ~ 153 (Wen B C, Gu J L, etc, *Advanced rotor dynamics*. Beijing: China Machine Press, 2000:151 ~ 153 (in Chinese))
- 4 钟一谔,何衍宗,王正等. 转子动力学. 北京:清华大学出版社,1984:8 ~ 11 (Zhong Y, He Y Z, Wang Z. *Rotor dynamic*. Beijing: Tsinghua University Press, 1984:8 ~ 11 (in Chinese))
- 5 Genta G. *Dynamics of rotating systems*. Springer, 2005:93 ~ 98
- 6 张文. 转子动力学理论基础. 北京:科学出版社,1990:96 ~ 99 (Zhang W. *Theoretical basis of Rotor Dynamic*. Beijing: Science Press, 1990:96 ~ 99 (in Chinese))
- 7 陈恩利,何田,郑猛,刘献栋. 滚动轴承-转子系统支承松动时的复杂运动研究. 动力学与控制学报,2004,2(4):49 ~ 55 (Chen E L, He T, Zheng M, Liu X D. Study on complicated motions of roll element bearing - rotor system with pedestal looseness. *Journal of Dynamic and Control*,2004,2(4):49 ~ 55 (in Chinese))
- 8 丁千,陈予恕. 转子碰摩运动的非稳态分析. 航空动力学报,2000,15(2):191 ~ 195 (Ding Q, Chen Y S. Non-stationary analysis of rotor/casing rubbing. *Journal Of Aerospace Power*, 2000, 15(2):191 ~ 195 (in Chinese))
- 9 刘占生,黄森林,苏杰先,黄文虎. 非对称柔性转子系统的动力特性分析. 振动工程学报,2002,15(2):210 ~ 214 (Liu Z S, Huang S L, Su J X, Huang W H. Dynamic analysis of unsymmetrical flexible rotor system. *Journal of Vibration Engineering*, 2002, 15(2):210 ~ 214 (in Chinese))
- 10 隋永枫,吕和祥. 陀螺效应对转子横向振动的影响分析. 计算力学学报,2003,20(6):711 ~ 714 (Sui Y F, Lü H X. Influence of gyroscopic term to the vibration of rotor system. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, 20(6):711 ~ 714 (in Chinese))
- 11 Dutt J K, Nakra B C. Dynamics of rotor shaft system on flexible supports with gyroscopic effects. *Mechanics Research Communications*, 1995, 22(6):541 ~ 545
- 12 韩清凯,于涛,王德友,等. 故障转子系统非线性振动分析与诊断方法. 北京:科学出版社,2010:156 ~ 158 (Han Q K, Yu T, Wang D Y. Nonlinear vibration analysis and fault diagnosis of rotor system. Beijing: Science Press, 2010:156 ~ 158 (in Chinese))

RESEARCH ON THE EFFECT OF OFFSET DISC ON DYNAMIC CHARACTERISTICS OF ROTOR SYSTEM*

Wang Meiling Han Qingkai

(Northeastern University, Shenyang 110819, China)

Abstract Based on the Jeffcott rotor system, the gyroscopic effects caused by different disc offset installation positions in the shaft were studied, and the law of gyroscopic effect on the inherent characteristics of the rotor system and the bending vibration modes was investigated. The results from numerical calculation and comparison show that there appear obvious effects of different disc offset installation positions on the rotor system critical speed and the unbalanced response. The greater the degree of disc offset, the greater the gyroscopic effect on the critical speed and the unbalanced response. However, the gyroscopic effect can be ignored when the rotor system is completely symmetrical.

Key words rotor system, disc offset, gyroscopic effect