第 9 卷第 3 期 2011 年 9 月
1672-6553/2011/09(3)/227-6
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 9 No. 3
Sep. 2011

双悬臂梁在简谐力作用下的碰撞动力学分析*

刘佳斌　龙新华
（上海交通大学机械与动力工程学院，上海　200240）

摘要　对带集中端质量柔性悬臂梁进行了理论建模，在此基础上得到了双悬臂梁碰撞模型. 通过对简谐激励力作用下悬臂梁碰撞运动的理论分析和实验论证，得到了该动力系统中被碰撞悬臂梁 $k = p/1$ 型周期碰撞运动，典型的周期碰撞有 $k = 1/1, k = 1/2, k = 2/2$ 等. 此外，建立了该动力系统碰撞情况下的 Poincare 映射，运用半解析法得到了该动力系统周期运动稳定性分析的 Floquet 特征乘子，对该动力系统在分岔点处进行了稳定性分析. 该结果对解释实际工程，如铣削过程中 的非线性现象及失稳机制有重要的指导作用.

关键词　非光滑系统，　柔性结构，　碰撞，　分岔，　稳定性

引言

非光滑动力学现象广泛存在于原子力显微镜、航天器铰接结构、机车的齿轮传动结构、冲击锤、高速列车的弓式受电器、铣削加工过程等机械、电力系统及实际应用工程中. 例如在低径向铣削率的铣削过程中，刀具和工件的周期性的接触和分离导致系统方程中存在非光滑项. 这些系统非线性动态行为与悬臂梁谐波振子遭受冲击作用下的动态行为有十分相似之处[1,2]. 因此，对悬臂梁这一类弹性结构在碰撞力作用下的动态行为研究显得十分重要. 沈凌杰等[3]实验对比研究了柔性梁线接触碰撞动力学行为. Virgin 和 Begley[4]研究单悬臂梁碰撞情况，得到了擦边分岔和混沌现象. Knudsen 和 Massih[5]研究了双边约束下单悬臂梁的碰撞运动，得到了混沌分岔图，并通过 Floquet 理论判断了周期解稳定性. Luo 和 Xie[6]理论实验研究了两自由度双边刚性约束下碰撞运动的周期稳定性，分岔和混沌现象. 考虑到实际工程中，两个相互接触的结构都为弹性结构，如铣削系统中，如果工件为薄壁结构，刀具和工件都为柔性结构，该系统类似于双悬臂梁碰撞系统. 基于此，本文对双悬臂梁碰撞系统非线性开展动力学研究，研究其动态行为及其演变规律. 首先通过理论建模和数值模拟的方法得到了双悬臂梁碰撞系统响应特征，分析了该动力系统典型倍频附近的非线性现象，并且运用不连续映射和 Floquet 理论对系统分岔点进行了稳定性分析，最后对典型非线性现象进行了实验论证.

1　模型建立

柔性悬臂梁碰撞运动是分段光滑系统，因此系统建模考虑两个因素，一是悬臂梁非碰撞阶段运动情况；另一个是悬臂梁碰撞瞬间的正确描述，合理正确的碰撞描述能建立正确的碰撞模型. 因此整个碰撞运动过程分两类建模.

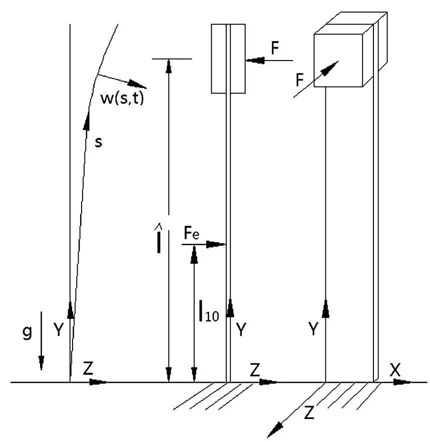

图 1　单自由度冲击研究模型

Fig. 1　The impact module of one - degree - of - freedom

建立悬臂梁非碰撞阶段运动模型，如图 1. 采用广义 Hamilton 原理，按照 Balachandran 和 Nayfeh[7]的研究中给出的步骤来求取方程. 建立连续系统的拉格朗日方程 L，并按照系统外延性约束条件进行展开. 得到如下方程：

2010-12-21 收到第 1 稿，2011-04-27 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(10702040)，国家重点基础研究计划项目(973 计划，2011CB706803)

$$L_{ang}=T-V-\frac{\lambda}{2}\int_0^{\hat{l}}\left[\left(1+\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2-1\right]\mathrm{d}s \tag{1}$$

T 是连续系统动能;V 是系统势能;λ 是拉格朗日乘子;$v(s,t)$ 是空间位置 s 和时间 t 的轴向位移函数;$w(s,t)$ 是横向位移函数;$\hat{l}$ 是从悬臂梁固支末端到小质量块中心处的长度.

图中力 F 是碰撞产生的接触作用力,非碰撞阶段时 $F=0$. 将接触作用力 F 算入边界条件,不考虑非线性约束条件,边界条件为:

$$\begin{cases} w(s,t)=0 & s=0\\ w'(s,t)=0 & s=0\\ EIw'''+mgw'=m\ddot{w}+F & s=\hat{l}\\ EIw'''+J_m\ddot{w}'=0 & s=\hat{l}\end{cases} \tag{2}$$

J_m 是顶端小质量块的质量惯性矩. 根据 Bernoulli－Euler 梁理论,得:

$$w(s,t)=\sum_r q_r(t)\phi_r(s) \tag{3}$$

$\phi_r(s)$ 是一个空间函数,式(4),$q_r(t)$ 是对应时间下的坐标.

$$\phi_1(s)=C_1\{\sin(\beta_r s)-\sinh(\beta_r s)]+ C_2/C_1[\cos(\beta_r s)-\cosh(\beta_r s)]\} \tag{4}$$

比率 C_2/C_1 和 β_r 由相关联的特征系统决定. 悬臂梁模型中端质量块的存在使得系统的第一阶与第二阶固有频率的差别变大. 理论模型和模态实验结果显示该系统的第一阶固有频率为 16Hz 附近而第二阶固有频率大于 120Hz,因此在外激励频率远小于 120Hz 的情况下,运用 Galerkin 投影方法,可整理式(1)得近似单自由度非线性常微分方程:

$$m_r\ddot{q}_r+k_rq_r+c_r\dot{q}_r+a_1q_r^3+a_2[\dot{q}_r^2q_r+q_r^2\ddot{q}_r]=0 \tag{5}$$

其中立方非线性项是由于悬臂梁的几何和惯性因素引起的,式(5)中非线性大小受 a_1 和 a_2 影响,其各系数由以下方程确定,式(6):

$$\begin{cases} m_r=\rho A+m\{\phi_1(s=\hat{l})\}^2\\ c_r=2m_r\zeta_r\omega_r\\ k_r=-EI\int_0^{\hat{l}}\phi'''_1\phi'_1\mathrm{d}s-mg\int_0^{\hat{l}}(\phi'_1)^2\mathrm{d}s+\rho A\hat{l}\int_0^{\hat{l}}\phi'''_1\phi'_1\mathrm{d}s-\rho Ag\int_0^{\hat{l}}(\phi'_1\phi_1+s\phi''_1\phi_1)\mathrm{d}s\\ a_1=EI\int_0^{\hat{l}}[\phi_1^{iv}(\phi'_1)^2\phi_1+4\phi'''_1\phi''_1\phi'_1\phi_1+(\phi''_1)^3\phi_1]\mathrm{d}s+\frac{3}{2}mg\int_0^{\hat{l}}(\phi'_1)^2\phi''_1\phi'_1\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\rho Ag\int_0^{\hat{l}}[(\phi'_1)^3\phi_1+\\ \quad 3(s-\hat{l})(\phi'_1)^2\phi''_1\phi_1]\mathrm{d}s\\ a_2=-m\int_0^{\hat{l}}\phi''_1\phi_1\mathrm{d}s\int_0^{\hat{l}}(\phi'_1)^2\mathrm{d}s+\rho A\int_0\phi''_1\phi_1\left(1+\frac{\partial}{\partial s}\right)[\int_{\hat{l}}^{s}\int_0^{s}(\phi'_1)^2\mathrm{d}\hat{s}\mathrm{d}s_2]\mathrm{d}s\end{cases} \tag{6}$$

式(6)中,阻尼因子 ζ_r 值由实验确定,ω_r 是与特定阶的模态有关的固有频率. 实际计算分析时,将悬臂梁参数代入,编程计算 a_1 和 a_2 值.

对于碰撞描述,有以下几点假设:

1) 碰撞是点接触碰撞.

2) 碰撞时两悬臂梁在碰撞处是正碰撞,没有摩擦、斜碰撞等.

3) 碰撞采用 Newton 弹性碰撞系数描述,式(7).

$$\dot{z}(t^+)=-r\dot{z}(t^-) \tag{7}$$

其中 $\dot{z}$ 是悬臂梁运动状态,t^- t^+ 分别表示碰撞瞬间前后,r 是弹性碰撞恢复系数,与两碰撞悬臂梁材料和环境有关.

建立双悬臂梁碰撞微分方程:

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{q}_{11}+k_{11}q_{11}+c_{11}\dot{q}_{11}+a_{11}q_{r1}^3+\\ \quad a_{12}[\dot{q}_{11}^2+q_{11}^2\ddot{q}_{11}]=F_{\phi1}\\ m_{11}\ddot{q}_{11}+k_{11}q_{11}+c_{11}\dot{q}_{11}+a_{11}q_{r1}^3+\\ \quad a_{12}[\dot{q}_{11}^2+q_{11}^2\ddot{q}_{11}]=0\\ \dot{z}(t)=\dot{z}(t) \qquad q_{21}\phi_{21}(\hat{l})-q_{11}\phi_{11}(\hat{l})<\Delta\\ \dot{z}(t^+)=-r\dot{z}(t^-) \quad q_{21}\phi_{21}(\hat{l})-q_{11}\phi_{11}(\hat{l})=\Delta\end{cases} \tag{8}$$

$m_{11},m_{21},c_{11},c_{21},k_{11},k_{21},q_{11},q_{21},a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 分别为受谐波激励碰撞梁和被碰撞梁的一介模态质量、阻尼、刚度、坐标及非线性项系数. F_{ϕ_1} 为模态坐标下的激励力,通过控制激振器控制外激励力 $F_e\cos(\Omega t)$ 振幅 F_e 与频率 Ω.

$$F_{\phi_1}=\phi(s=l_{10})F_e\cos(\Omega t) \tag{9}$$

2　数值模拟分析

由于该动力系统含有复杂的非线性因素,运用数值模拟分析的方法可以快速直接的求解出双悬臂梁在外激励力作用下碰撞响应. 数值模拟分析主要包括两个部分,一个是模拟分析整个碰撞过程,获得位移－时间图、相图以及分岔混沌图等;另一个是对分岔点值进行稳定性分析.

选取相同几何参数的两悬臂梁做碰撞分析,其参数如图 2. 计算式(5)中各个参数,表 1.

表 1　悬臂梁参数

Table 1　The parameters of the cantilevers

M(kg)	K(N/m)	ω(rad/s)	α_1	α_2	Φ_l
1.8824	1.9528E4	101.8542	－1.1440E7	－1.1392E2	4.7996

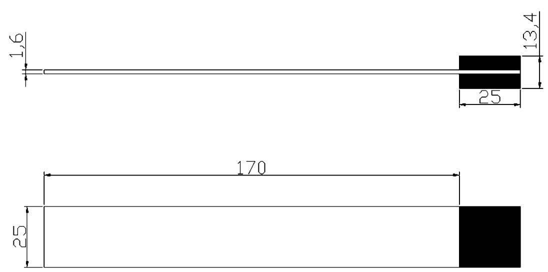

图 2　悬臂梁尺寸(mm)

Fig. 2　The physical dimensions of the cantilever

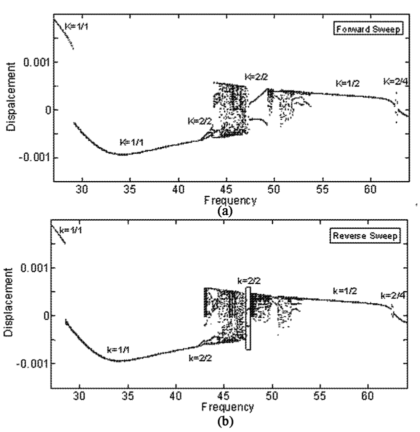

图 3　D＝30N,ζ＝0.01,Δ＝0.5E－4m,a)正向频率扫描,21Hz～70Hz,b)逆向频率扫描,21Hz～70Hz

Fig. 3　$D=30N,\zeta=0.01,\Delta=0.5E-4m$,a) forward sweep of excitation frequency, 21Hz～70Hz, b) reverse sweep of excitation frequency, 21Hz～70Hz

取弹性碰撞恢复系数 $r=0.8$,激励力振幅 $D=30N$,间隙 $\Delta=0.5E-4m$,约定两悬臂梁有相同的阻尼因子 $\zeta=0.01$,正向与逆向频率扫描范围为 27Hz～64Hz.

选取稳定运动状态下发生碰撞时该动力系统的状态量记录,得图 3 和图 4.

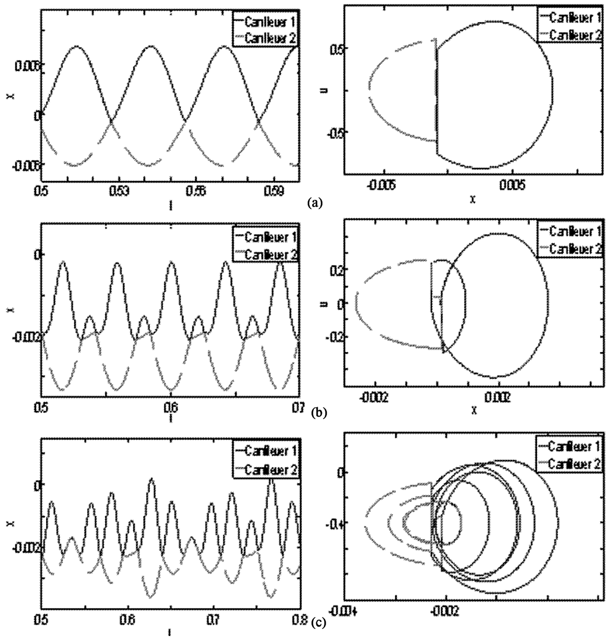

图 4　$D=30N,\zeta=0.01,\Delta=0.5E-4m$,正向频率扫描,不同的激励频率对应不同的碰撞类型:

a)35Hz,$k=1/1$,b)47.6Hz,$k=2/2$,c)43Hz,$k=4/4$

Fig. 4　$D=30N,\zeta=0.01,\Delta=0.5E-4m$,forward sweep of excitation frequency with different types of impact according to different excitation: a)35Hz,$k=1/1$,b)47.6Hz,$k=2/2$,c)43Hz,$k=4/4$

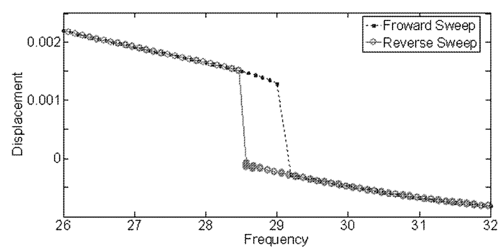

图 5　二倍频处的跳跃

Fig. 5　the jump phenomena nearby double－frequency

由图 3 分析,两悬臂梁在经过一倍频后,随着频率的增加或减小,其周期运动类型即碰撞类型发生了明显的变化,以 $k=p/l$ 表示,即一个周期是经过 l 次激励周期发生了 p 次碰撞,故由图 3(a)得,碰撞类型依次为 $k=1/1$,$k=2/2$,$k=1/2$,$k=2/4$,$k=1/2$ 等,逆向频率扫描类似,如图 3(b).

系统在倍频处附近以外的频域范围内,都有稳定的单碰撞周期运动,即 $k=1/l$,($l=1,2,3,\cdots$)型碰撞,并且经过一次倍频进入下一个稳定单周期碰撞,其激励周期增加一,即 $k=1/1$ 经过倍周期后变成 $k=1/2$. 系统在倍频附近则有丰富的非线性现

象. 在二倍频附近,发生了类似于光滑非线性系统中的跳跃现象,如图 5,但区别于光滑系统,这种跳跃是由于碰撞引起非光滑不连续而产生的. 分岔最为复杂是三倍频附近,即激励频率为 42.24Hz ~ 53.79Hz 范围,将图 3 中该频率域内局部放大,如图 6,与 Balachandran[7]得到的分岔图不同,由于两悬臂梁碰撞引起的强烈耦合作用,该频域内表现出更多的分岔类型和更大范围的混沌区间. 出现了 $k=2/2$、$k=4/4$ 和 $k=3/4$ 等碰撞周期,以及 3 段混沌区间. 对比图 6(a)(b),在 47.94Hz ~ 49.81Hz 频率范围内,初始条件的不同,得到了不同的稳定周期解和混沌.

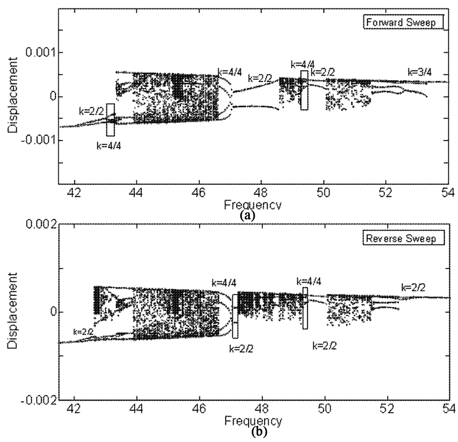

图 6　$D=30N,\zeta=0.01,\Delta=0.5E-4m$,a)正向频率扫描,b)逆向频率扫描

Fig. 6　$D=30N,\zeta=0.01,\Delta=0.5E-4m$,a) forward sweep of excitation frequency, b) reverse sweep of excitation frequency

3　稳定性分析

对于非光滑系统动力学,周期运动稳定性,分岔等极其重要的研究内容. 对于非光滑的动力系统的稳定性研究采用了类似于光滑系统的研究方法,通过定义周期解的 Poincaré 映射截面,将周期运动稳定性问题转化为 Poincaré 映射不动点稳定性问题,然后使用 Floquet 理论[9~10]判断其稳定性. Nordmark[11]和陆启韶[12~13]引入了局部映射方法,将非光滑动力系统转化为类似光滑动力系统的求解形式.

将常微分方程(8)写成状态方程形式,并假设该动力系统存在周期解 T,则状态方程可以看成常微分方程两点边界值问题:

$$\begin{cases}\dot{X}=F(X,t)\\ X(T)-X(0)=0\end{cases}\quad (X,t)\in R^4\times S^1 \tag{10}$$

其中 $X=[q_1\quad \dot{q}_1\quad q_2\quad \dot{q}_2\quad \varphi]$. 建立 Poincaré 映射,选取两悬臂梁碰撞前瞬间为 Poincaré 映射的截面 Σ:

$$\Sigma=\{(x,\dot{x},t)\in(R^4\times S)/H(x,\dot{x}^-,t)=0\} \tag{11}$$

其中 $H(x,\dot{x}^-,t)=0$ 为两悬臂梁碰撞条件. 碰撞过程采用局部映射的方法建立 Jacobian 矩阵,剩余的非碰撞光滑段则通过求解微分方程 Jacobian 矩阵直接计算得到. 由于该动力系统常微分方程复杂,实际求解过程中不能直接计算得到其光滑段的 Jacobian 矩阵解析解,因此采用数值积分的方式求解其数值解. 最后将求解得到的矩阵合并即为整个碰撞周期运动的映射矩阵. 引入 Floquet 理论,计算倍周期分岔点 42Hz 附近映射矩阵的特征值变化,如图 7.

由图 7 得,随着频率不断变大,稳定周期运动的映射矩阵一个特征值也不断接近单位圆中 -1,并且通过 -1 穿过单位圆,在特征值为 -1 时,系统发生了倍周期分岔,理论分析与数值模拟结果一致.

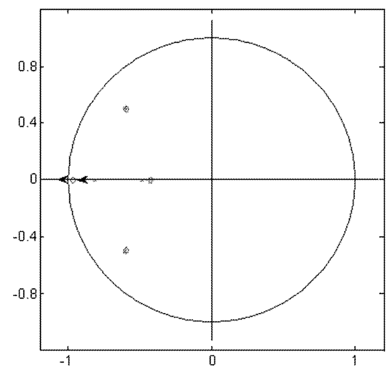

图 7　42Hz 附近的动力系统 Floquet 乘子

Fig. 7　Floquet multipliers of the dynamic system nearby 42Hz

4　实验论证

为了对理论结果进行研究及实验研究该系统的非线性现象,采用图 8 所示实验装置进行实验研究. 图中碰撞质量块之间间隙由水平可动的游标尺给定;实验时,在给定激振器的激振振幅下,调节激振器的激励频率,通过两个激光位移传感器测量不同外激频率下两悬臂梁的振动位移.

采用上述实验装置,实验得到了系统三倍频附近被碰撞梁典型频率处位移时间图和相图以及分岔混沌图,如图 9、10 所示.

实验中悬臂梁结构参数与数值模拟系统相同. 实验中,以激励力频率作为控制参数,得到其分岔

图如图 10a 所示. 由图 10 知系统在三倍频附近进入分岔混沌区时,实验与数值模拟的结果符合的很好,并且其分岔混沌区域也非常相近;对比图 9 与图 4(a)(c),在相近频域内发生相同碰撞类型时,实验结果和理论结果基本一致,因此进一步论证了该系统动力学模型的正确性.

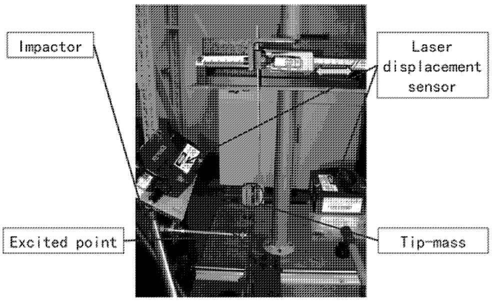

图 8　碰撞实验装置

Fig. 8　The impact experiment apparatus

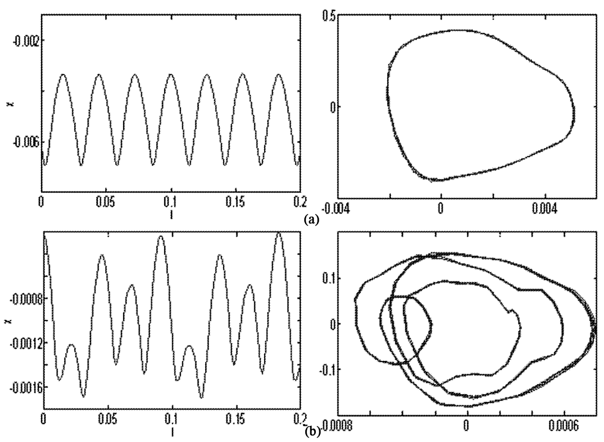

图 9　被碰撞梁实验结果,图 a)激励频率 36Hz,b)激励频率 43.5Hz

Fig. 9　The experimental results of the impacted cantilever

a) excited frequency 36Hz, b) excited frequency 43.5Hz

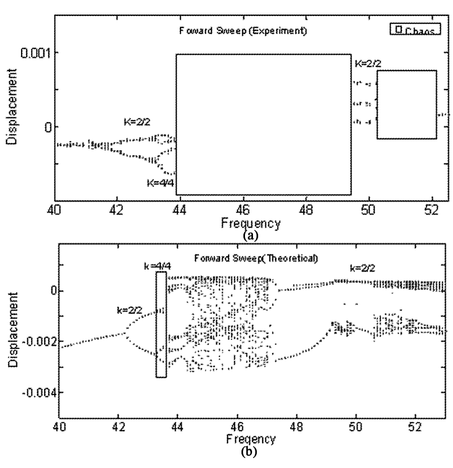

图 10　被碰撞梁分岔图 a)实验结果,b)数值模拟结果

Fig. 10　The impacted cantilever a) experimental result,

b) numerical result

5　结论

本文研究了柔性结构双悬臂梁碰撞运动,运用 Hamilton 原理和 Newton 碰撞理论,建立了系统碰撞运动模型,运用数值理论分析了该动力系统碰撞响应,分析了其发生在二倍频附近的弱非线性现象,以及发生在三倍频附近的非线性现象,得到了双悬臂梁耦合作用下的非线性振动响应;同时使用 Poincaré 映射和 Floquet 理论对该动力系统在倍周期分岔点处稳定性进行了理论分析和数值计算,得到了与数值模拟一致的结论.

参　考　文　献

1　丁旺才,谢建华. 碰撞振动系统分岔与混沌的研究进展. 力学进展, 2005, 35(4): 513 ~ 524(Ding W C, Xie J H. Advances of research on bifurcations and chaos in vibro-impact system. *Advances in Mechanics*, 2005, V35 (4): 513 ~ 524 (in Chinese))

2　陆启韶. 非光滑系统动力学研究进展. 中国力学学会学术大会 2005 论文摘要集(上), 2005(Lu Q S. Advances of Research on non-smooth dynamics. CCTAM2005 Abstract book(Ⅰ), 2005 (in Chinese))

3　沈凌杰,郭其威,刘锦阳,金征跃. 柔性梁线接触碰撞的动力学建模和实验研究. 动力学与控制学报, 2007, 5 (2): 147 ~ 153(Shen L J, Guo Q W, Liu J Y, Yu Z Y. Dynamic modeling and experiment technique for a flexible beam with cylindrical contact. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(2): 147 ~ 153(in Chinese))

4　Virgin L N, Begley C J. Grazing bifurcations and basins of attraction in an impact-friction oscillator. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1999, 130 (1-2): 43 ~ 57

5　Knudsen J, Massih A R. Impact oscillations and wear of loosely supported rod subject to harmonic load. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 278 (4-5): 1025 ~ 1050

6　Luo G W, Xie J H. Stability of periodic motion, bifurcations and chaos of a two-degree-of-freedom vibratory system with symmetrical rigid stops. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 273 (3): 543 ~ 568

7　Balachandran B, Nayfeh A H. Nonlinear motions of beam-mass structure. *Nonlinear Dynamics*, 1999, 1(1): 39 ~ 61

8　Balachandran B. Dynamics of an elastic structure excited by harmonic and aharmonic impactor motions. *Journal of

Vibration and Control, 2003, 9(3-4): 265 ~ 279

9 Nordmark A B. Nonperiodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 145(2): 279 ~ 297

10 金俐,陆启韶. 非光滑动力系统 Floquet 特征乘子的计算方法. 力学学报,2004,21(3): 21 ~ 26(Jin L, Lu Q S. Calculation methods of floquet multipliers for non-smooth dynamic system . *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2004,21(3): 21 ~ 26(in Chinese))

11 陆启韶,金俐. 具有刚性约束的非线性动力系统的局部映射方法. 固体力学学报,2005,26(2):132 ~ 138 (Lu Q S, Jin L. The local map method for non-smooth dynamical systems with rigid constraints . *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2005,26(2):132 ~ 138(in Chinese))

12 金栋平,胡海岩,碰撞振动与控制. 北京:科学出版社, 2005: 107 ~ 148(Jin D P, Hu H Y. Vibration and its control in vibro-impact system . Beijing: Science Press, 2005: 107 ~ 148 (in Chinese))

13 张伟,胡海岩. 非线性动力学理论与应用的新进展. 北京:科学出版社,2009: 142 ~ 200(Zhang W, Hu H Y. Advances of research on theory and applications of nonlinear dynamics . Beijing: Science Press,2009: 142 ~ 200(in Chinese))

DYNAMIC ANALYSIS ON VIBRO-IMPACT BETWEEN TWO CANTILEVERS EXCITED BY HARMONIC FORCE*

Liu Jiabin Long Xinhua

(*School of Mechanical Engineering*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200240, *China*)

Abstract The theoretical model of an elastic cantilever with tip-mass was established and on this basis, the model of vibro-impact between two cantilevers was obtained. Numerical analysis and experimental validation were taken to investigate the vibro-impact motions of cantilevers excited by harmonic force, and the $k = 1/1$, $k = 1/2$, $k = 2/2$ type of stable periodic motions of the impacted cantilever were presented. At the same time, Poincaré map was established and the Floquet multipliers of the periodic motions were obtained through semi-analytical method to determine the stability of the motions at the bifurcation point. These results are helpful to explore the nonlinear phenomena of system with impact such as milling processes.

Key words non-smooth system, elastic structure, impact, bifurcation, stability

Received 21 December 2010, revised 27 April 2011.

* National Natural Science Foundation of China (10702040), National Key Basic Research Program of China (973 Program, 2011CB706803)