第 9 卷第 3 期 2011 年 9 月
1672-6553/2011/09(3)/222-5

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 9 No. 3
Sep. 2011

电机定转子刚体模型非线性振动研究

吴慧敏　贾启芬

（天津大学机械学院力学系，天津　300072）

摘要　建立了电机定转子耦合的刚体模型，针对电机变频启动时，电流存在高次谐波的情况，推导求解了高次谐波磁势，得到了电磁力的多种成分. 分析了电磁刚度对系统固有频率的影响，对系统垂直与水平振动相耦联的非线性共振进行了研究，得到了系统的一次近似解及稳态响应曲线，讨论了电磁参数和质量对共振的影响.

关键词　电机，　耦合，　电磁，　非线性，　共振

引言

电机的应用十分广泛，因而振动问题不容忽视. 文献[1]集中体现了我国在机电耦联振动领域的系统成果. 文献[3～4]根据电磁场理论，分析了电机瞬变过程与轴系的扭振、横振等问题及相关变化规律.

以上研究都涉及了电磁力的求解，但都是电流基波磁势引起的，未从理论上对变频启动引发的高次谐波磁势进行研究，针对这一情况，本文对极对数 $p=4$ 的低速电机进行研究，计算得到了高次谐波磁势，并研究了相应电磁力引发的单频共振问题.

本实验电机固定在基础上的模态实验结果说明定转子振动系统的振动固有频率在 450Hz 以下时做刚体运动. 通过滚动轴承带动转子一起运动，定转子间又由于气隙磁场的相互作用力耦合在一起. 当电机的电磁力频率和某一固有频率相同时，将发生共振. 下面对电机垂直与水平振动相耦联的强迫共振进行研究.

1　建立数学模型

图 1 为电机内部结构左视图. K_z, K_y 是定转子间的垂直与水平弹性系数，即他们是转子轴的弯曲刚度和滚动轴承弹性系数的合成；C_z, C_y 是电机座等效刚度，由材料力学计算得到；

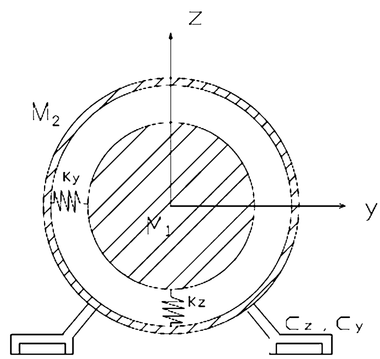

图 1　电机力学模型

Fig. 1　the mechanics model of Rotor

根据图 1 建立耦合模型的 Z、Y 向的振动方程. 如下：

$$\begin{cases} M_1\ddot{Z}_1 = -K_z(Z_1 - Z_2) + F_z \\ M_2\ddot{Z}_2 = -C_z Z_2 + K_z(Z_1 - Z_2) - F_z \\ M_1\ddot{Y}_1 = -K_y(Y_1 - Y_2) + F_y \\ M_2\ddot{Y}_2 = -C_y Y_2 + K_y(Y_1 - Y_2) - F_y \end{cases} \tag{1}$$

式中 Z_1, Y_1 为转子轴系沿 Z 轴、Y 轴的振动位移；Z_1, Y_2 为定子沿 Z 轴、Y 轴的振动位移；转子轴系的质量 M_1；定子系统的质量 M_2；定子铁芯长度 l_1；F_z, F_y 是定转子间气隙磁场的相互作用力即电磁力分别沿 Z 轴、Y 轴方向.

2　分析求解电磁力 F_z, F_y

电动机电源若采用变频调速启动之后，电流谐波较多，ω_1 为基频，假设

2011-03-28 收到第 1 稿，2011-05-14 收到修改稿.

$$I = \sum_{a=1}^{\infty} I_a \cos a\omega_1 t \quad (a = 1,2,3,\cdots,9) \tag{2}$$

则定子磁势：

$$f = 0.9 w_y \sum_{a=1}^{\infty} I_a \cos(a\omega_1 t)(\cos\frac{\pi}{\tau}x - \frac{1}{3}\cos3\frac{\pi}{\tau}x + \frac{1}{5}\cos5\frac{\pi}{\tau}x - \frac{1}{7}\cos7\frac{\pi}{\tau}x + \cdots \pm \frac{1}{\nu}\cos\nu\frac{\pi}{\tau}x) \tag{3}$$

故可计算推导出电源电流谐波引起的总磁势：

$$\begin{aligned} F = {} & F_0^1\cos(\omega_1 t - p\alpha - \varphi_0) + F_0^2\cos(2\omega_1 t + p\alpha - \varphi_0) + F_0^4\cos(4\omega_1 t - p\alpha - \varphi_0) + F_0^5\cos(5\omega_1 t + p\alpha - \varphi_0) + F_0^7\cos(7\omega_1 t - p\alpha - \varphi_0) + \\ & F_0^8\cos(8\omega_1 t + p\alpha - \varphi_0) + F_{\nu3}^3\cos(3\omega_1 t + 3p\alpha - \varphi_1) + F_\nu^3\cos(3\omega_1 t - 3p\alpha - \varphi_1) + \\ & F_{\nu3}^6\cos(6\omega_1 t + 3p\alpha - \varphi_1) + F_{\nu3}^6\cos(6\omega_1 t - 3p\alpha - \varphi_1) + F_{\nu3}^9\cos(9\omega_1 t + 3p\alpha - \varphi_1) + \\ & F_{\nu3}^9\cos(9\omega_1 t - 3p\alpha - \varphi_1) + F_{\nu5}^1\cos(\omega_1 t + 5p\alpha - \varphi_1) + F_{\nu5}^2\cos(2\omega_1 t - 5p\alpha - \varphi_1) + \\ & F_{\nu5}^4\cos(4\omega_1 t + 5p\alpha - \varphi_1) + F_{\nu5}^5\cos(5\omega_1 t - 5p\alpha - \varphi_1) \end{aligned} \tag{4}$$

式中 $F_0^1, F_0^2, F_0^4, F_0^5, F_0^7, F_0^8$ 为三相绕组基波合成磁势；$F_{\nu3}^3, F_{\nu3}^6, F_{\nu3}^9$ 和 $F_{\nu5}^1, F_{\nu5}^2, F_{\nu5}^3, F_{\nu5}^4, F_{\nu5}^5$ 为三相绕组三次谐波与五次谐波合成磁势.

定转子间气隙磁导[2]：

$$\begin{aligned} \Lambda = \Lambda_0 \{ & [1 + \frac{Y^2+Z^2}{2\sigma^2} + \frac{3(Y^2+Z^2)^2}{8\sigma^4}] + Y\cos\alpha[\frac{1}{\sigma} + \frac{3(Y^2+Z^2)}{4\sigma^3}] + \\ & [\frac{1}{\sigma} + \frac{3(Y^2+Z^2)}{4\sigma^3}] + [\frac{1}{\sigma} + \frac{3(Y^2+Z^2)}{4\sigma^3}]Z\sin\alpha + [\frac{Y^2+Z^2}{2\sigma^2} + \\ & \frac{Y^4-Z^4}{2\sigma^4}]\cos2\alpha + [\frac{YZ}{\sigma^2} + \frac{Y^3Z+Z^3Y}{\sigma^4}]\sin3\alpha + \frac{Y^3-3YZ^2}{4\sigma^3}\cos3\alpha - \frac{Z^3-3ZY^2}{4\sigma^3}\cos3\alpha - \\ & \frac{Z^3-3ZY^2}{4\sigma^3}\sin3\alpha + \frac{1}{8\sigma^4}(Y^4 - 6Z^2Y^2 + Z^4)\cos4\alpha + \frac{1}{2\sigma^4}(ZY^3 - YZ^3)\sin4\alpha \} \end{aligned} \tag{5}$$

将式(5)代入定转子间气隙磁场能量公式：

$$W_m = \frac{1}{2}RL\int_0^{2\pi} \Lambda F^2 \mathrm{d}\alpha \tag{6}$$

得电磁力：

$$\begin{cases} F_z = \dfrac{\partial W_m}{\partial Z} = \dfrac{RLB}{2\Lambda_0}\left(\dfrac{Z}{\sigma^2} - \dfrac{3Z^3}{2\sigma^4} + \dfrac{3ZY^2}{2\sigma^4}\right) \\ F_y = \dfrac{\partial W_m}{\partial Y} = \dfrac{RLB}{2\Lambda_0}\left(\dfrac{Y}{\sigma^2} - \dfrac{3Y^3}{2\sigma^4} + \dfrac{3YZ^2}{2\sigma^4}\right) \end{cases} \tag{7}$$

式(6)中只考虑了(5)中磁导的第一项，省略了其他的参数激发力项.

式中：

$$B = B_0 + B_1\cos(3\omega_1 t - 2\varphi_0) + B_2\cos(6\omega_1 t - 2\varphi_0) + B_3\cos(9\omega_1 t - 2\varphi_0) + B_4\cos(12\omega_1 t - 2\varphi_0)$$

Y_0, Z_0 为定转子的静偏心；ε_2 为转动偏心；s 为异步电动机的滑差；(Y_1, Z_1)，(Y_2, Z_2) 分别为转子和定子的振动位移.

3　整理定转子非线性振动方程组

3.1　化简振动方程

将电磁力表达式(7)代入振动方程组(1)，进行无量纲变换 $\begin{cases} Z_1 - Z_2 = (z_1 - z_2)\sigma \\ Y_1 - Y_1 = (y_1 - y_2)\sigma \end{cases}$，$z_0, y_0, \varepsilon_2$ 均为小量，略去小量 2 次以上高次项.

根据(7)式可知电磁力的频率成分可由 $B \cdot Y$ 和 $B \cdot Z$ 的结果确定. 略去参数项，可得到 $\omega = 402\text{Hz}$ 时，与定转子垂直振动的第二阶固有频率 k_4 相同，系统将激发起频率接近于 k_4 的、相应于第一主振动的振动，这时非共振频率 k_1、k_2、k_3 的振动将因为摩擦的存在而衰减. 因此方程整理化简为

$$\begin{cases} M_1\ddot{z}_1 + az_1 - az_2 = \varepsilon E_1\sin(\omega t - \varphi) + \varepsilon n_1[(z_1 - z_2)^3 - (z_1 - z_2)\cdot(y_1 - y_2)^2] \\ M_2\ddot{z}_2 + bz_2 - az_1 = \varepsilon E_1\sin(\omega t - \varphi) - \varepsilon n_1[(z_1 - z_2)^3 - (z_1 - z_2)\cdot(y_1 - y_2)^2] \\ M_1\ddot{y}_1 + cy_1 - cy_2 = \varepsilon E_1\cos(\omega t - \varphi) + \varepsilon n_1[(y_1 - y_2)^3 - (y_1 - y_2)\cdot(z_1 - z_2)^2] \\ M_2\ddot{y}_2 + dy_2 - cy_1 = \varepsilon E_1\cos(\omega t - \varphi) - \varepsilon n_1[(y_1 - y_2)^3 - (y_1 - y_2)\cdot(z_1 - z_2)^2] \end{cases} \tag{8}$$

式中 $E_1 = 0.041\dfrac{Rl_1}{2\Lambda_0\sigma^2}$，$n_1 = \dfrac{3\lambda}{2\sigma^2}$；

$\lambda_1\dfrac{Rl_1B_0}{2\Lambda_0\sigma^2}$，$a = Kz - \lambda_1$，$b = Cz + Kz - \lambda_1$，

$c = Ky - \lambda_1$，$d = Cy + Ky - \lambda_1$

3.2 电磁刚度 λ_1 对系统固有频率的影响

由式(8)可得系统的线性方程

$$\begin{cases} M_1\ddot{z}_1+az_1-az_2=0 \\ M_2\ddot{z}_2+bz_2-az_1=0 \\ M_1\ddot{y}_1+cy_1-cy_2=0 \\ M_2\ddot{y}_2+dy_2-cy_1=0 \end{cases}$$

,进而可求得系统的固有频率.

将未加电磁刚度 λ_1 求得的固有频率与加入电磁刚度后的固有频率进行比较可得到表1,将电磁刚度变化对系统固有频率的影响绘制曲线为图2.

表1 有无电磁刚度对系统固有频率的影响

Table 1 the effect to the vibration natural frequency

natural frequency (Hz)		k_1	k_2	k_3	k_4
electro-magnetic stiff λ_1	0	173	188	359	412
	λ_1	165	178	348	402

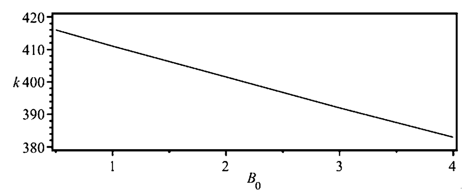

图2 电磁刚度变化对系统固有频率的影响型

Fig.2 the effect of electromagnetic stiffness

显然电磁刚度使系统的固有频率有所减小,并且对系统的固有频率的影响是不能忽略的.

4 非线性振动方程组的求解

4.1 求解非线性方程组:

根据文献[1]中的单频法进行求解:

令 $z_1=q_1, z_2=q_2, y_1=q_3, y_2=q_4$

设第一次近似时,对应接近第一主振动的单频振动的方程组(8)的特解为:

且是齐次方程组

$$\begin{cases} (a-k_2^2M_1)\psi_1^{(1)}-a\psi_2^{(1)}=0 \\ -a\psi_1^2+(b-k_2^2M_2)\psi_2^{(1)}=0 \\ (c-k_2^2M_1)\psi_3^{(1)}-c\psi_4^{(1)}=0 \\ -c\psi_3^2+(d-k_2^2M_2)\psi_4^{(1)}=0 \end{cases}$$

的非平凡解.

下面进一步计算在非线性强迫力作用下,对 $k_4=402\text{Hz}$ 产生的共振规律. 非线性项

$Q_{r0}^{(1)}(a,\phi)=Q_{r0}^{(1)}(\Psi_1^{(1)}a\cos\phi,\cdots,-\Psi_1^{(1)}ak\sin\phi,\cdots)(\theta+\nu=\phi, r=1,2,3,4)$

则这里时间的函数振幅 a 和相位 υ 由下列第一次近似方程组决定:

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt}=-\dfrac{1}{2\pi m_1k_4}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{4}\mu Q_{r0}^{(1)}(a,\phi)\times \\ \qquad \Psi_r^{(1)}\sin\phi d\phi-\dfrac{\sum_{r=1}^{4}\mu E_r\Psi_r^{(1)}}{m_1(k_4+\omega)}\cos\upsilon \\ \dfrac{d\upsilon}{dt}=k_4-\omega-\dfrac{1}{2\pi n_1k_4a}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{4}\mu Q_{r0}^{(1)}(a,\phi)\times \\ \qquad \Psi_r^{(1)}\cos\phi d\phi+\dfrac{\sum_{r=1}^{4}\mu E_r\Psi_r^{(1)}}{m_1a(k_4+\omega)}\sin\upsilon \end{cases}$$

其中 $m_1=\sum_r\sum_s a_{rs}\Psi_r^{(1)}\Psi_s^{(1)}$

整理可得:

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt}=-na-\dfrac{\mu E_1(\Psi_1^{(1)}-\Psi_2^{(1)})}{m_1(k_4+\omega)}\cos\upsilon \\ \dfrac{d\upsilon}{dt}=k_4-\omega-\dfrac{3n_1(\Psi_1^{(1)}-\Psi_2^{(1)})^4a^2}{8m_1k_4}+ \\ \qquad \dfrac{\mu E_1(\Psi_1^{(1)}-\Psi_2^{(1)})}{m_1a(k_4+\omega)}\sin\upsilon \end{cases} \tag{9}$$

求定常解,令 $\dfrac{da}{dt}=\dfrac{d\upsilon}{dt}=0$

消去 υ 可得到振幅与外力频率之间的关系式:

$$\frac{E_1^2(\Psi_1^{(1)}-\Psi_2^{(1)})}{m_1^2(k_4+\omega)^2a^2}=n^2+[\omega-k_4+\frac{3n_1(\Psi_1^{(1)}-\Psi_2^{(1)})^4a^2}{8m_1ak_4}]^2,$$

$$\sigma=k_4-\omega \tag{10}$$

4.2 稳态解的稳定性判定

在扰动运动中,将表示为

$$a=a_0+a_1, \upsilon=\upsilon_0+\upsilon_1 \tag{11}$$

式中:a_0,υ_0 为所研究的稳态运动,a_1,υ_1 是所研究的稳态运动相对于 a,υ 的微小偏离值.

将式(11)代入式(9),并展开成微小量 a_1,υ_1 的级数,只保留线性项,得到变分方程式:

$$\begin{cases} \dfrac{da_1}{dt}=-na_1+\dfrac{p}{k_4+\omega}\sin\upsilon_0\sin\upsilon_1 \\ \dfrac{d\upsilon_1}{dt}=-[\dfrac{2qa_0}{k_4}+\dfrac{p}{a_0^2(k_4+\omega)}\sin\upsilon_0]a_1+ \\ \qquad \dfrac{p}{a_0(k_4+\omega)}\cos\upsilon_0\sin\upsilon_1 \end{cases} \tag{12}$$

式中:

$$p=\frac{E_1(\Psi_1^{(1)}-\Psi_2^{(1)})}{m_1},q=\frac{3n_1(\Psi_1^{(1)}-\Psi_2^{(1)})^4}{8m_1}$$

稳定的充分必要条件是方程组(12)的特征方程 $\lambda^2+T_1\lambda+T_2=0$ 的根有负的实数部分,等价于

$$T_1<0,T_2>0$$

$$T_{!}\ =n-\frac{p}{a_0(k_4+\omega)}\cos\upsilon_0$$

$$T_2=-\frac{np}{a_0(k_4+\omega)}\cos\upsilon_0+[\frac{2qa_0}{k_4}+\frac{p}{a_0^2(k_4+\omega)}\sin\upsilon_0]\cdot\frac{p}{k_4+\omega}\sin\upsilon_0$$

把数值代入整理可得第一次近似解的稳定性范围为

$$0<a_0<0.0006$$

根据式(10)及近似解的稳定范围可得稳态振动 $a-\sigma$ 的图像,虚线表示不稳定区域,实线为稳定区域,如图 3 所示.

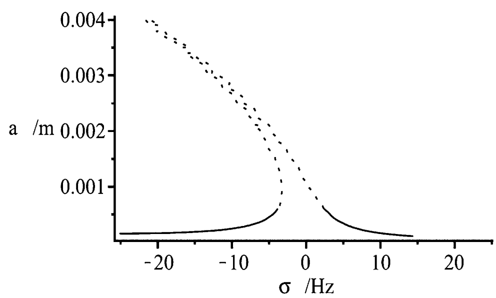

图 3　稳态振动的 $a-\sigma$ 曲线

Fig. 3　the curve of steady - state vibration

5　不同参数对非线性共振的影响

5.1　M_1 与 M_2 变化

通过式(9)知 $m_1=\sum_r\sum_s a_{rs}\Psi_r^{(1)}\Psi_s^{(1)}$, $\Psi_1^{(1)}\Psi_2^{(1)}$ 一定,M_1 与 M_2 取值不同,m_1 值也不同,得到的非线性共振规律也是不同的,如图 4.

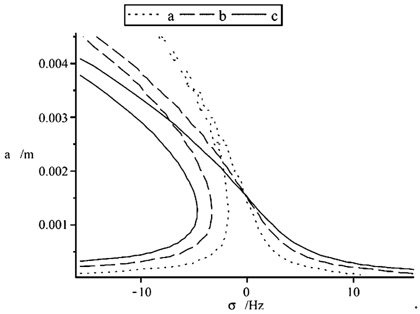

图 4　质量变化的 $a-\sigma$ 曲线

Fig. 4　the curve of variable quality

$a:M_1=200,M_2=320$;

$b:M_1=100,M_2=176$;

$c:M_1=80,M_2=128$

可以看出,质量相对取值的变化不会影响电磁力的非线性特性即软特性,但是会影响共振区的大小,质量取值越小,m_1 越小,共振区越大,振幅相应减小.

5.2　电磁力大小

电磁力大小表现为磁密基值 B_0 的变化,通过计算对应不同的 B_0 可得到曲线如图 5.

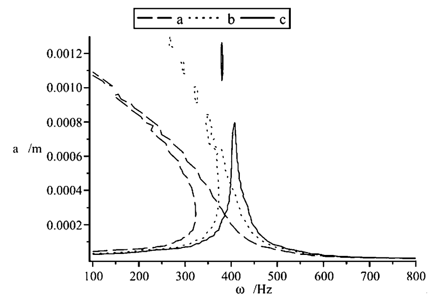

图 5　电磁力影响的 $a-\omega$ 曲线

Fig. 5　the curve of the effect of electro - magnetic force

$a:B_0=5$; $b:B_0=1.9$; $c:B_0=0.3$

磁密基值 B_0 增大时,气隙磁场的电磁力增大,电磁刚度增大,共振曲线的最大振幅值明显减小,固有频率降低.

参　考　文　献

1　邱家俊. 机电耦联动力系统的非线性振动. 北京:科学出版社,1996:141 ~ 153(Qiu J J. Nonlinear Vibrations of Coupled Mechanical and Electric Dynamic Systems. Beijing: Science Press, 1996:141 ~ 153(in Chinese))

2　邱家俊. 机电耦联动力学的研究进展. 力学进展. 1998, 28(4):453 ~ 460 (Qiu J J. Progress of coupled mechanical and electric dynamic. *Advances in mechanics*, 1998, 28(4):453 ~ 460 (in Chinese))

3　邱家俊. 机电分析动力学. 北京:科学出版社,1992(Qiu J J. Electromechanical analytical dynamic. Beijing: Science Press, 1992 (in Chinese))

4　邱家俊. 交流电动机启动过程的横振和扭振. 力学学报, 1989, 21(4):432 ~ 441 (Qiu J J. Transverse and torsional vibration of AC Motor in Starting Process. *Acta Mechanica Sinica*, 1989, 21(4):432 ~ 441 (in Chinese))

5　邱家俊. 高维机电耦联系统的非线性振动. 振动工程学报. 1994, 7(2):133 ~ 143 (Qiu J J. Nonlinear vibrations of high dimensional electromechanical coupling system. *Journal Of Vibration Engineering*, 1994, 7(2):133 ~ 143 (in Chinese))

6 Jia Q F, Qiu J J, Yu W. Stabilities analysis of electromechanical nonlinear vibration of electric machine. *Transactions of Tianjin University*, 2002,8(3):170 ~ 173

7 邱家俊, 段昊昱, 邱宇. 高维网机系统失稳振荡的分岔研究. 动力学与控制学报,2005,3(1):39 ~ 46 (Qiu J J, Duan H Y, Qiu Y. Study of unstable oscillation and bifurcation analysis of high - dimensions power system. *Journal of Dynamics and Contril*, 2005,3(1):39 ~ 46 (in Chinese))

STUDY ON NONLINEAR VIBRATION OF RIGID MODEL OF GENERATOR STATOR AND ROTOR

Wu Huimin Jia Qifen

(*School of Mechanical Engineering*, *Tianjin University*, *Tianjin* 300072, *China*)

Abstract A coupling rigid model for the generator stator and rotor was established. When the generator starts up in frequency conversion, there is high harmonic in electricity. In this condition, high harmonic magnetometive force was expressed and the component parts of electro - magnetic force were obtained. Then the effect of electro - magnetic stiff on the inherent frequency was analyzed. The nonlinear vibration of the vertical and horizontal coupling was studied, the first approximation solution and its corresponding steady - state solution were acquired, and the effect of electromagnetic damping and mass on resonance.

Key words generator, coupling, electro - magnetic, nonlinear, resonance

Received 28 March 2011, revised 14 May 2011.