第 9 卷第 3 期 2011 年 9 月
1672-6553/2011/09(3)/219-3
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 9 No. 3
Sep. 2011

关于一类 Lagrange 函数族的存在条件

丁光涛
（安徽师范大学物理与电子信息学院，芜湖 241000）

摘要 研究力学系统的 Lagrange 函数族，根据从第一积分直接构造 Lagrange 函数的方法，提出一类 Lagrange 函数族的结构，导出这类 Lagrange 函数族的存在条件和直接构造方法. 举例说明所得结果的应用.

关键词 分析力学， 逆问题， Lagrange 函数族， 第一积分

引言

近来在变分法逆问题研究中，得到一些力学系统与其第一积分相关的 Lagrange 函数族[1,2]，文献[2]给出从第一积分直接构造 Lagrange 函数的新方法，这种方法不仅可以得到简单的一维系统 Lagrange 函数族，而且可以导出复杂的多维系统的函数族[3-6]. 本文在此基础上进一步研究如下问题：(ⅰ)这类 Lagrange 函数族的结构；(ⅱ)这类与第一积分相关的 Lagrange 函数族的存在条件；(ⅲ)构造这类 Lagrange 函数族的直接方法. 最后，举出 2 个例子说明所得到结果的应用.

1 力学系统 Lagrange 函数族的结构和存在条件

研究力学系统

$$\ddot{q}_\alpha = Q_\alpha(t,q,\dot{q}),(\alpha=1,\cdots,n) \tag{1}$$

其一个第一积分为

$$I = I(t,q,\dot{q}) = const \tag{2}$$

根据文献[2]，系统的 Lagrange 函数族如下

$$L = A(t,q)F(I(t,q,\dot{q})) + B_\alpha(t,q)\dot{q}_\alpha + B_0(t,q) \tag{3}$$

其中 $A(t,q)$、$B_\alpha(t,q)$ 和 $B_0(t,q)$ 为修正因子，F 为宗量 I 的某个函数，满足一定的连续可微条件以及规则性条件

$$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\dot{q}_\alpha\partial\dot{q}_\beta}\right) \neq 0 \tag{4}$$

修正因子 A、B_α 和 B_0 由下列方程确定

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\right)\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial A}{\partial q_\alpha}F-2A\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}-A\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_\beta}\frac{\partial Q_\beta}{\partial\dot{q}_\alpha}+\frac{\partial B_\alpha}{\partial t}+\left(\frac{\partial B_\alpha}{\partial q_\beta}-\frac{\partial B_\beta}{\partial q_\alpha}\right)\dot{q}_\beta-\frac{\partial B_0}{\partial q_\alpha}=0 \tag{5}$$

如果方程(5)的解中存在如下情况

$$B_\alpha(t,q)=0,\quad B_0(t,q)=0 \tag{6}$$

那么对应的 Lagrange 函数(3)将写成

$$L = A(t,q)F(I(t,q,\dot{q})) \tag{7}$$

而因子 $A(t,a)$ 满足如下方程

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\right)\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial A}{\partial q_\alpha}F-2A\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}-A\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_\beta}\frac{\partial Q_\beta}{\partial\dot{q}_\alpha}=0 \tag{8}$$

利用复合函数求导法则，方程(8)可以写成

$$\frac{dF}{dI}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\right)\frac{\partial I}{\partial\dot{q}_\alpha}-2A\frac{\partial I}{\partial q_\alpha}-A\frac{\partial I}{\partial\dot{q}_\beta}\frac{\partial Q_\beta}{\partial\dot{q}_\alpha}\right]-\frac{\partial A}{\partial q_\alpha}F=0 \tag{9}$$

方程(9)表明，若因子 A 仅是时间 t 的函数，即

$$\frac{\partial A}{\partial q_\alpha}=0\quad(\alpha=1,\cdots,n) \tag{10}$$

则方程(9)能否成立已与 $F(I)$ 的函数形式无关，而且从条件(4)可以断定 $\frac{dF}{dI}\neq 0$，即从方程(9)可以导出下列方程

$$\frac{dA}{dt}\frac{\partial I}{\partial\dot{q}_\alpha}-A\left(2\frac{\partial I}{\partial\dot{q}_\alpha}+\frac{\partial I}{\partial\dot{q}_\beta}\frac{\partial Q_\beta}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)=0 \tag{11}$$

根据上述，我们得到系统(1)是否存在与第一积分(2)相关的 Lagrange 函数族的判据如下：

判据： 系统(1)及其第一积分 I，如果对所有自由度都满足下列条件

2010-12-06 收到第 1 稿，2010-12-26 收到修改稿.

$$2\frac{\partial I}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_\beta}\frac{\partial Q_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha}=f(t)\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_\alpha},(\alpha=1,\cdots,n) \quad (12)$$

则系统(1)存在如下形式的 Lagrange 函数族

$$\bar{L}=A(t)F(I(t,q,\dot{q})) \quad (13)$$

式中 F 为满足条件(4)的第一积分 I 的任意光滑函数,因子 $A(t)$ 由下式给出

$$A(t)\ =\ \exp[\int f(t)\mathrm{d}t] \quad (14)$$

从条件(12)可以导出如下推论:如果

$$2\frac{\partial I}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_\beta}\frac{\partial Q_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha}=0,(\alpha=1,\cdots,n) \quad (15)$$

则因子 A 为常数.

综合以上的讨论,我们得到如下结果:

(ⅰ)一个力学系统(1)及其某一个第一积分 I,可能构造出具有式(13)结构的一类 Lagrange 函数族;

(ⅱ)这个 Lagrange 函数族存在的条件是式(12)成立;

(ⅲ)条件(12)成立时,由式(14)求得因子 $A(t)$,就构造出 Lagrange 函数族(13).

应当指出,系统(1)是否存在式(13)类型的 Lagrange 函数族,与第一积分 I 密切相关,条件(12)对第一积分 I 成立,对另一个积分 I 就不一定成立. 此外,对高维系统 Lagrange 函数族存在的条件(12)难成立,但是仍然有可能存在 Lagrange 函数族.

2 两个系统的 Lagrange 函数族

例 1 广义相对论中 Buchdahl 方程[1]

$$\ddot{x}=\frac{3\dot{x}^2}{x}+\frac{\dot{x}}{t}=Q(t,x,\dot{x}) \quad (16)$$

方程一个第一积分为

$$I=\frac{\dot{x}}{tx^3}=const \quad (17)$$

将式(16)中 $Q(t,x,\dot{x})$ 和式(17)中 $I(t,x,\dot{x})$ 代入式(12),得

$$2\frac{\partial I}{\partial x}+\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}}=\frac{1}{t}(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}) \quad (18)$$

即条件(12)成立,且由式(14)得到

$$A=t \quad (19)$$

故 Buchdahl 方程的 Lagrange 函数族为

$$\bar{L}=tF(\dot{x}/tx^3),\quad \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\neq 0 \quad (20)$$

这是一个新结果. 此外,方程(16)还可以得到另一个第一积分

$$I'=\frac{\dot{x}t}{x^3}\ +\frac{1}{x^2}\ =const \quad (21)$$

但是,I' 也满足条件(12),可以构成另一个对应的 Lagrange 函数族.

例 2 2 维非线性非保守系统[3]

$$m\ddot{q}_1+\gamma(q_1\dot{q}_1^2+2q_2\dot{q}_1\dot{q}_2-q_1\dot{q}_2^2)=0$$
$$m\ddot{q}_2+\gamma(q_2\dot{q}_2^2+2q_1\dot{q}_1\dot{q}_2-q_2\dot{q}_1^2)=0 \quad (22)$$

上式可以写成

$$\ddot{q}_1=Q_1=-\frac{\gamma}{m}(q_1\dot{q}_1^2+2q_2\dot{q}_1\dot{q}_2-q_1\dot{q}_2^2)=0$$

$$\ddot{q}_2=Q_2=-\frac{\gamma}{m}(q_2\dot{q}_2^2+2q_1\dot{q}_1\dot{q}_2-q_2\dot{q}_1^2)=0 \quad (23)$$

直接积分得

$$I=\mathrm{In}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{\gamma}{m}(q_1^2+q_2^2) \quad (24)$$

将 I 和 Q_1、Q_2 代入式(15),可以验证对 q_1 和 qj_2 条件(15)式都成立,取常数因子 $A=1$,得到系统(22) Lagrange 函数族为

$$\bar{L}=F\left[\mathrm{In}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{\gamma}{m}(q_1^2+q_2^2)\right] \quad (25)$$

这也是一个新的结果. 文献[3]中所给的 Lagrange 函数

$$L=\exp\left[\frac{\gamma}{m}(q_1^2+q_2^2)\right]\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) \quad (26)$$

仅为上述函数族中一个函数.

参 考 文 献

1 Cie liński J L, Nikiciuk T. A direct approach to the construction of standard and non-standard Lagrangiqns for dissipative-like dynamical systems with variable coefficients. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2000,43:175205

2 丁光涛. 从第一积分构造 Lagrange 函数的直接方法. 动力学与控制学报,2011,9(2):102~106(Ding G T. A direct approach to construction of the Lagrangian from the first integral. *Journal of Dynamics and Control*, 2011,9(2):102~106(in Chinese)

3 Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics Ⅱ. New York:Spinger-Verlag. 1983

4 丁光涛. 一阶 Lagrange 力学逆问题的直接解法. 动力学与控制学报, 2010,8(3):193~196 (Ding G T. Direct solutions for inverse problem of first order Lagrangian me-

chanics. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(3): 193－196 (in Chinese))

5 丁光涛. 从运动方程构造 Lagrange 函数的直接方法. 动力学与控制学报, 2010, 8(4): 305～310 (Ding G T. A direct approach to the construction of Lagrangians form the motion equation. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(4): 305～310 (in Chinese))

6 丁光涛. Birkhoff 系统的 Hamilton 化. 动力学与控制学报, 2010, 8(1): 8～11 (Ding G T. Hamiltonization of birkhoffian systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(1): 8～11 (in Chinese))

ON THE EXISTENCE CONDITIONS FOR A CLASS OF THE LAGRANGIANS FAMILIES

Ding Guangtao

(*College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu* 241000, *China*)

Abstract In this paper, the Lagrangians familiy in mechamics was studied. Based on the direct approach to the construction of Lagrangian from first integral, the structure of a class of families of Lagrangians was presented. The existence conditions and the direct constuction method of this class of families were obtained. Two examples were given to illustrate the application of the results.

Key words analytical mechanics, inverse problem, family of Lagrangians, first integral

Received 6 December 2010, revised 26 December 2010.