

对称电耦合连接方式下的多尺度同步行为和转迁过程*

王海侠¹ 陆启韶²

(1. 南京理工大学理学院, 南京 210094) (2. 北京航空航天大学动力学与控制系, 北京 100191)

摘要 本文研究了改进的 ML 神经元模型在环式和链式两种对称连接结构下的多尺度同步转迁过程. 通过定义峰相位、簇相位、网络的平均峰频率差和平均簇频率差, 发现随着耦合强度的增加, 耦合神经元从互不相关到簇同步再到峰同步过渡, 最后达到几乎完全同步. 簇同步和峰同步属于相位同步的两种节律类型, 对应慢时间尺度的簇同步通常先于对应快时间尺度的峰同步出现, 且这两种节律同步模式互不包含, 在一定耦合强度范围内可以共存. 此外, 借助膜电位的峰峰间期放电序列的分岔图, 可观察到同步转迁过程中出现的复杂放电模式和分岔结构.

关键词 对称连接, 多尺度, 簇同步, 峰同步, 同步转迁

引言

近年来, 非线性系统中的同步现象得到了普遍的关注和深入的研究, 同步在宏观和微观领域中发挥着越来越重要的作用^[1-3]. 人脑中普遍存在着同步放电行为, 这些病态同步可导致帕金森症、震颤、癫痫等神经生理疾病^[4], 不同的同步区域对应着不同的神经认知和病理状态^[5-6]. 多个神经元由于突触耦合作用, 通过同步放电形式将信息从一个神经元传给其他神经元, 但为了执行不同的生理功能, 其联系方式也多种多样, 有的形成链状、环状、全局结构^[7], 有的则以小世界^[8]、无标度结构^[9]进行连接, 这就形成了具有不同拓扑结构的复杂神经元动态网络, 这些网络的整体行为和个体动力学特性对同步有很大影响.

神经元系统是一个由快慢变量构成的多时间尺度系统, 簇放电和峰放电是两种主要的放电节律模式, 对应地, 同步也分为簇同步和峰同步. 所谓簇同步是所有耦合神经元簇放电模式中的每簇开始和结束的时间几乎一致, 即慢变量的同步; 而峰同步则意味着每个放电尖峰都在同一时刻出现, 同一时刻结束, 即快变量的同步. 这两种节律同步都属于相位同步的范畴, 二者在一定耦合强度范围内可以共存. 由于神经元的多尺度性和复杂性, 神经元耦合系统相位同步的研究在借鉴目前电路系统同步的一些理论和思想方法的基础上必须发展新的

理论对其进行重新认识, 特别是相位同步发生的动力学机制, 簇同步和峰同步的刻画方法及其同步转迁过程中相应的分岔转迁机制的研究. 文献[10-13, 6]通过引入相位函数、相似函数和相关系数等统计量, 结合分岔方法对两个电、化学耦合非全同神经元的同步转迁过程和分岔结构进行了研究. 本文在此基础上进一步考虑对称电耦合连接方式对同步转迁过程的影响.

本文以三个具有小参数不匹配的环式和链式连接结构的神经网络为例, 通过引入合适的峰相位和簇相位函数, 从平均峰频率差和平均簇频率差考察峰同步和簇同步发生的临界值和同步转迁过程, 并借助膜电位的峰峰间期放电序列的分岔图研究耦合强度对神经元放电模式的影响.

1 模型描述

二维 ML 模型由于在不同的参数集合下能表现出不同类型的可兴奋性而被广泛研究, 为了探究神经元的簇动力学行为, Izhikevich 将二维 ML 模型进行改进, 将膜电位方程中的电流 I 变成由一个动力学方程控制的线性反馈的电流项 $-u$, 从而得到下面的三维方程^[14]:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -u - g_l(V - V_l) - g_k w(V - V_k) - g_{ca} m_\infty(V)(V - V_{ca}) \\ \dot{w} &= \lambda(V)(w_\infty(V) - w) \\ \dot{u} &= \mu(0.2 + V) \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} m_{\infty}(V) &= \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{V - v_1}{v_2}\right) \\ w_{\infty}(V) &= \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{V - v_3}{v_4}\right) \\ \lambda(V) &= \frac{1}{3} \cosh \frac{V - v_3}{2v_4} \end{aligned} \quad (2)$$

称上面的方程组为改进的 ML 模型(简称 MML 模型). 这里 V 代表膜电位, w 代表恢复变量, u 是慢变调节电流, μ 是时间尺度因子, 这里取 $\mu = 0.005$, 因此, u 是比 V, w 慢变的变量. 其他参数取值为: $V_l = -0.5, V_{ca} = 1, g_l = 0.5, g_k = 2, g_{ca} = 1.2, v_1 = -0.01, v_2 = 0.15, v_3 = 0.1, v_4 = 0.05$. 通过调节不同的控制参数, MML 模型能呈现出丰富的分岔结构^[15]和快慢型周期簇放电类型^[14,16], 更好的体现出慢变量调节下的多稳现象.

本文主要研究三个具有参数不匹配的耦合神经元的同步转迁过程, 耦合动力学方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= -u_i - g_l(V_i - V_l) - g_k w_i(V_i - V_{ki}) - \\ &g_{ca} m_{\infty i}(V_i)(V_i - V_{ca}) + C \sum_{j=1}^3 g_{ij} V_j \\ \dot{w}_i &= \lambda_i(V_i)(w_{\infty i}(V_i) - w_i) \\ \dot{u}_i &= \mu(0.2 + V_i) \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} m_{\infty i}(V_i) &= \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{V_i - v_1}{v_2}\right) \\ w_{\infty i}(V_i) &= \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{V_i - v_3}{v_4}\right) \\ \lambda_i(V_i) &= \frac{1}{3} \cosh \frac{V_i - v_3}{2v_4} \end{aligned} \quad (4)$$

这里下标 i 代表第 i 个神经元, $C > 0$ 代表电耦合强度, V_{ki} 代表不匹配的参数. 本文中选取环式和链式两种对称连接方式进行研究, 其耦合矩阵分别为

$$G_r = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, G_c = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 相位的定义

对于单时间尺度系统, 通常有三种定义相位函数的方法: Poincare 截面法^[9,11,12,17,18]、轨道投影法^[10,17,18]和 Hilbert 变换法^[17-19], 神经元模型是具有快慢放电模式的多时间尺度系统, 因此需要修改相位函数的定义. 当神经元的快变量 V 达到局部最

大值时, 将此时间记录为第 k 个峰放电开始的时刻(图 1(a)所示), 得到峰放电对应的时间序列为 $\{t_k\}$, 于是神经元在时刻 t 的峰相位定义为:

$$\phi_s(t) = 2\pi k + 2\pi \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \quad (t_k < t < t_{k+1}) \quad (5)$$

这是一个分段线性递增函数, 式(5)意味着每经过一次峰放电, 峰相位就增加 2π . 类似地, 若神经元的慢变量 u 达到局部最大值时, 将此刻记录为第 k 个簇放电开始的时刻(图 1(b)所示), 从而得到簇放电对应的时间序列为 $\{\tau_k\}$, 所以神经元在时刻 t 的簇相位定义为:

$$\phi_b(t) = 2\pi k + 2\pi \frac{t - \tau_k}{\tau_{k+1} - \tau_k} \quad (\tau_k < t < \tau_{k+1}) \quad (6)$$

式(6)意味着每经过一次簇放电, 簇相位增加 2π . 我们将(5)、(6)中的 $t_{k+1} - t_k$ 和 $\tau_{k+1} - \tau_k$ 分别称为膜电位的峰峰间期序列和簇簇间期序列, 记为 ISIs 和 IBIs. 对于神经元 i 和 j , 若 $ISIs_i = ISIs_j$, 则意味着耦合神经元几乎同时发放峰脉冲串, 即峰同步发生. 若 $IBIs_i = IBIs_j$, 则代表耦合神经元每簇开始和结束的時刻几乎相同, 即簇同步发生.

基于相位函数 $\phi(t)$ 的定义, 我们引入频率 $\omega(t) = \dot{\phi}(t)$ 和平均频率 $\Omega(t) = \langle \dot{\phi}(t) \rangle$, 对于多个神经元的耦合网络, 定义网络的平均相位差和平均频率差分别为^[8,19]:

$$\Delta\phi(t) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^n |\phi_j(t) - \phi_1(t)| \quad (7)$$

$$\Delta\Omega(t) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^n |\langle \dot{\phi}_j(t) - \dot{\phi}_1(t) \rangle| \quad (8)$$

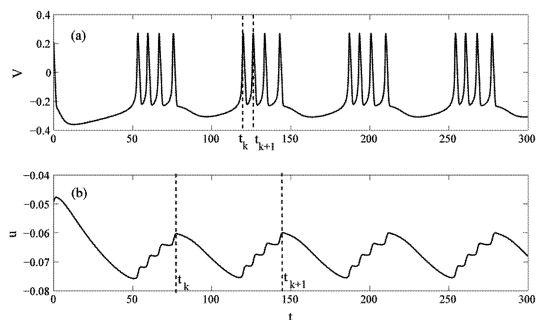


图1 (a)快变量 V 和(b)慢变量 u 的时间历程图

Fig. 1 Time series of (a) the fast variable V and (b) the slow variable u

这里 $\langle \cdot \rangle$ 表示对时间取平均. 对于耦合网络, 若平均相位差满足 $|\Delta\phi(t)| < 2\pi$, 或平均频率

差 $\Delta\Omega(t) \rightarrow 0$, 则相位同步发生.

3 同步转迁

我们选取两组参数集合. 情形 1: $V_{k1} = -0.8$, $V_{k2} = -0.75$, $V_{k3} = -0.7$, 此时单个神经元都呈现周期簇放电模式, 且每簇中分别含有四个、五个和六个峰脉冲. 情形 2: $V_{k1} = -1$, $V_{k2} = -0.96$, $V_{k3} = -0.92$, 此时单个神经元都呈现峰放电模式, 且对应周期 1 峰放电、周期 2 峰放电和混沌峰放电模式.

3.1 环式连接

图 2 和图 3 给出了环式连接方式下三个耦合神经元的峰峰间期序列关于耦合强度的分岔图和平均峰频率差、平均簇频率差的变化图.

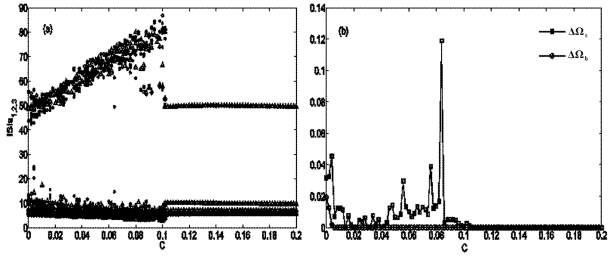


图 2 (a) 耦合神经元的峰峰间期序列 $ISIs_{1,2,3}$ 关于耦合强度 C 的分岔图 (b) 平均峰频率差 $\Delta\Omega_s$ 和平均簇频率差 $\Delta\Omega_b$ 关于耦合强度 C 的变化图

Fig. 2 (a) The bifurcation diagram of $ISIs_{1,2,3}$ vs. coupling strength C (b) Dependence of the mean spike frequency difference $\Delta\Omega_s$ and the mean burst frequency difference $\Delta\Omega_b$ on the coupling strength C

对于情形 1, 由图 2 知当耦合强度较小时, 耦合神经元不同步放电. 随着耦合强度的增加, 平均簇频率差逐渐减小, 当达到 $C = 0.006$ 时, $\Delta\Omega_b \rightarrow 0$, 簇同步发生, 并一直保持下去, 此时平均峰频率差出现小幅度波动. 由于受到耦合强度的影响, 系统中的快慢变量相互制约, 使得耦合神经元的放电模式发生改变, 当 $C < 0.05$ 时, 神经元仍然保持周期簇放电模式, 但每簇中峰的个数发生变化. 当 $C > 0.05$ 时, 周期簇放电开始变为不规则的混沌簇放电, 波形也发生了很大改变. 当耦合强度进一步增大到 0.103 时, $\Delta\Omega_s \rightarrow 0$, 此时峰同步出现, 耦合神经元的放电模式又回到周期簇放电状态.

对于情形 2, 由于耦合前单个神经元都是峰放电模式, 耦合使得峰放电极易变为簇放电, 随着耦合强度的增加, 放电模式从比较杂乱到周期 4 再到

周期 2 过渡(图 3(a)). 在耦合强度的很大范围内, 平均峰频率差都出现较大的波动, 直到 $C = 0.074$ 时, $\Delta\Omega_s \rightarrow 0$, 此时所有神经元同步峰放电(图 3(b)).

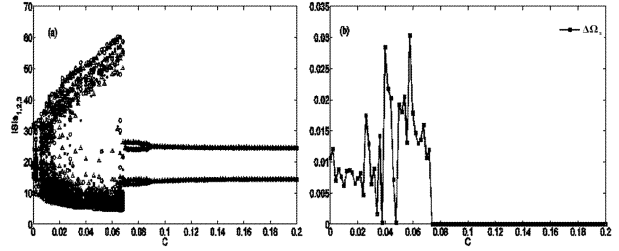


图 3 (a) 耦合神经元的峰峰间期序列 $ISIs_{1,2,3}$ 关于耦合强度 C 的分岔图 (b) 平均峰频率差 $\Delta\Omega_s$ 关于耦合强度 C 的变化图

Fig. 3 (a) The bifurcation diagram of $ISIs_{1,2,3}$ vs. coupling strength C (b) Dependence of the mean spike frequency difference $\Delta\Omega_s$ on the coupling strength C

3.2 链式连接

对于情形 1, 图 4 给出了链式连接方式下三个耦合神经元的峰峰间期序列关于耦合强度的分岔图和平均峰频率差、平均簇频率差的变化图.

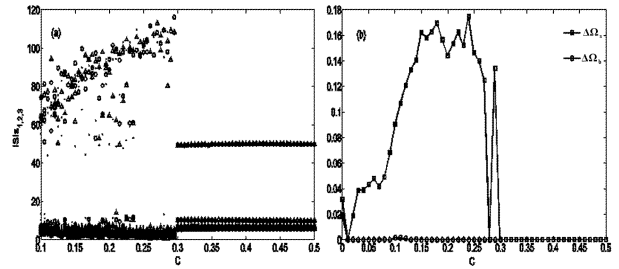


图 4 (a) 耦合神经元的峰峰间期序列 $ISIs_{1,2,3}$ 关于耦合强度 C 的分岔图 (b) 平均峰频率差 $\Delta\Omega_s$ 和平均簇频率差 $\Delta\Omega_b$ 关于耦合强度 C 的变化图

Fig. 4 (a) The bifurcation diagram of $ISIs_{1,2,3}$ vs. coupling strength C (b) Dependence of the mean spike frequency difference $\Delta\Omega_s$ and the mean burst frequency difference $\Delta\Omega_b$ on the coupling strength C

由于耦合作用的影响, 神经元始终保持簇放电模式, 分岔结构类似于图 2(a). 当 $C = 0.02$ 时, $\Delta\Omega_b \rightarrow 0$, 簇同步发生, 此时平均峰频率差变化幅度较大. 当耦合强度进一步增大到 0.3 时, $\Delta\Omega_s \rightarrow 0$, 此时发生峰同步(图 4(b)).

对于情形 2, 峰峰间期序列关于耦合强度的分岔图和平均峰频率差如图 5 所示. 由图 5 可知链式连接方式下的分岔结构类似于环式(图 3(a)), 峰放电模式受到耦合强度的影响迅速变为簇放电模式(图 5(a)). 当耦合强度 $C = 0.22$ 时, 平均峰频

率 $\Delta\Omega_s \rightarrow 0$, 此时发生峰同步(图5(b)).

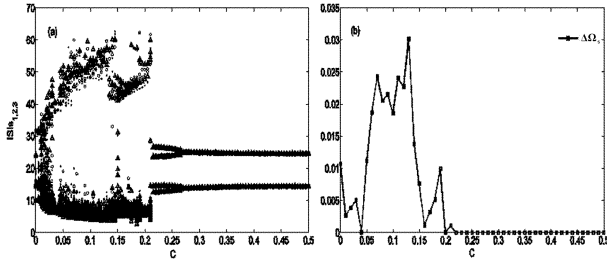


图5 (a) 耦合神经元的峰峰间期序列 $ISI_{1,2,3}$ 关于耦合强度 C 的分岔图 (b) 平均峰频率差 $\Delta\Omega_s$ 关于耦合强度 C 的变化图

Fig.5 (a) The bifurcation diagram of $ISI_{1,2,3}$ vs. coupling strength C (b) Dependence of the mean spike frequency difference $\Delta\Omega_s$ on the coupling strength C

以上结果表明在环式和链式连接方式下两组情形的耦合神经元均从不同步到簇同步再到峰同步转迁,且转迁过程中出现了丰富的放电模式.由簇同步和峰同步发生时耦合强度的临界大小可知,对于同一情形的耦合神经元而言,链式连接方式下簇同步或峰同步的临界值约为环式连接方式下簇同步或峰同步临界值的3倍,即环式结构更有利于网络系统达到相位同步,这与对称连接方式对完全同步的影响一致^[7].

4 结论

本文通过研究三个具有小参数不匹配的环式和链式耦合的MML神经元的簇同步、峰同步及其同步转迁过程,揭示了耦合强度、连接方式和放电模式对同步转迁过程的影响.随着耦合强度的增加,神经元之间的关系从互不相关到簇同步再到峰同步,最后达到几乎完全同步,这一过程体现了同步转迁的多时间尺度性.对于处在不同放电状态的单个神经元,峰放电相对于簇放电模式对耦合强度更敏感,主要体现在峰放电极易变为簇放电,而簇放电由于受到耦合强度的影响会在每簇所含的峰的个数和波形上发生改变.结果还表明环式连接比链式连接更容易使神经元达到簇同步和峰同步,且链式结构下的同步临界值大于环式结构下同步的临界值,约为3倍关系,这与规则对称连接对完全同步的影响一致.

参 考 文 献

1 Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. Synchronization : A

Universal Concept in Nonlinear Science . Cambridge: Cambridge University Press, 2001, 1 ~ 7

- 2 Singer W. Neuronal synchrony : A versatile code for the definition of relations. *Neuron*, 1999, 24:49 ~ 65
- 3 Gray C M. The temporal correlation hypothesis of visual feature integration; still alive and well. *Neuron*, 1999, 24: 31 ~ 47
- 4 Milton J, Jung P. Epilepsy as a dynamic disease. Berlin: Springer-Verlag, 2003, 1 ~ 14
- 5 Dzakpasu R, Zochowski M. Discriminating differing types of synchrony in neural systems. *Physica D*, 2005, 208:115 ~ 122
- 6 Komarov M A, Osipov G V, Suykens J A K. Variety of synchronous regimes in neuronal ensembles. *Chaos*, 2008, 18:037121-1 ~ 18
- 7 Wang H X, Lu Q S, Wang Q Y. Complete synchronization in coupled chaotic HR neurons with symmetric coupling schemes. *Chin. Phys. Lett.*, 2005, 22(9):2173 ~ 2175
- 8 Li C G, Chen G R. Phase synchronization in small-world networks of chaotic oscillators. *Physica A*, 2004, 341:73 ~ 79
- 9 Batista C A S, et al. Bursting synchronization in scale-free networks. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 41:2220 ~ 2225
- 10 Shuai J W, Durand D M. Phase synchronization in two coupled chaotic neurons. *Phys. Lett. A*, 1999, 264:289 ~ 297
- 11 Shi X, Lu Q S. Rhythm synchronization of coupled neurons with temporal coding scheme. *Chin. Phys. Lett.*, 2007, 24(3):636 ~ 639
- 12 Shi X, Lu Q S. Phase synchronization in electrically coupled different neuronal pacemakers with the Chay model. *Chin. Phys. Lett.*, 2005, 22(3):547 ~ 550
- 13 Wang Q Y, et al. Synchronization transition in gap-junction-coupled leech neurons. *Physica A*, 2003, 387: 4404 ~ 4410
- 14 Izhikevich E M. Neural excitability, spiking and bursting. *Int. J. Bifur. Chaos*, 2000, 10: 1171 ~ 1266
- 15 王海侠,陆启韶,郑艳红. 神经元模型的复杂动力学:分岔与编码. *动力学与控制学报*, 2009, 7(4):293 ~ 296 (Wang H X, Lu Q S, Zheng Y H. Complex dynamics of the neuronal model: bifurcation and encoding. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(4):293 ~ 296 (in Chinese))
- 16 Wang H X, Lu Q S, Wang Q Y. Bursting and synchroni-

- zation transition in the coupled modified ML neurons. *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat*, 2008, 13: 1668 ~ 1675
- 17 Boccaletti S, et al. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 2002, 366: 1 ~ 101
- 18 Hramov A E, Koronovskii A A. Time scale synchronization of chaotic oscillators. *Physica D*, 2005, 206: 252 ~ 264
- 19 Wang Q Y, Lu Q S. Phase synchronization in small world chaotic neural networks. *Chin. Phys. Lett.*, 2005, 22(6): 1329 ~ 1332

MULTI-TIME-SCALE SYNCHRONIZATION AND TRANSITIONS WITH SYMMETRICAL AND ELECTRICAL COUPLING SCHEMES *

Wang Haixia¹ Lu Qishao²

(1. School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

(2. Department of Dynamics and Control, Beihang University, Beijing 100191)

Abstract This paper studied the multi-time-scale synchronization and transitions of symmetrically coupled modified ML neurons with chain and ring coupling schemes. By defining the functions of spike phase, burst phase, mean frequency difference of spike and burst, we find that, with the increase of coupling strength, the coupled neurons can transit from irrelevancy to burst synchronization, then to spike synchronization and finally to a nearly complete synchronized state. Burst and spike synchronization belong to phase synchronization, and spike synchronization corresponding to the fast time scale may take place before burst synchronization, which corresponds to the slow time scale. Moreover, these two forms of rhythm synchronization don't involve each other, but may coexist within certain limits of coupling strength. Besides, with the help of ISIs bifurcations, some complex firing patterns and bifurcations can be found during the synchronization transitions.

Key words symmetrical coupling, multi-time-scale, burst synchronization, spike synchronization, synchronization transition