

# 压电复合材料梁的全局分叉、混沌动力学分析\*

姚志刚<sup>1</sup> 张萌<sup>1</sup> 张伟<sup>2</sup> 张君华<sup>2</sup>

(1. 北京市工业技师学院, 北京 100023) (2. 北京工业大学机电学院, 北京 100124)

**摘要** 研究了简支压电复合材料层合梁在轴向、横向载荷共同作用下的非线性动力学、分叉和混沌动力学响应. 基于 von Karman 理论和 Reddy 高阶剪切变形理论, 推导出了压电复合层合梁的动力学方程. 利用 Galerkin 法离散偏微分方程, 得到二个自由度非线性控制方程, 并且利用多尺度法得到了平均方程. 基于平均方程, 研究了压电层合梁系统的全局动力学分析、动态分叉, 分析了系统各种参数对倍周期分叉的影响及变化规律. 结果表明, 压电复合材料层合梁周期运动的稳定性和混沌运动对外激励的变化非常敏感, 通过控制压电激励, 可以控制压电复合材料层合梁的振动, 保持系统的稳定性, 即控制系统产生倍周期分叉解, 从而阻止系统通过倍周期分叉进入混沌运动, 并给出了控制分叉图.

**关键词** 压电层合复合材料, 全局动力学, 混沌动力学

## 引言

压电复合材料具有可控性能好、比强度高、比刚度大和抗疲劳性能好等优点, 在航空和航天工程中得到了应用. 压电材料的频响范围宽, 可从几十赫兹到几百兆赫兹; 压电材料的输入输出均为电信号, 且功耗低, 易于测量与控制. 压电材料容易加工得很薄, 特别适合于柔性结构. 在复合材料中嵌入压电材料, 克服了传统的离散型传感器、控制器有可能被安装在结构振动模态的节点或节线上而造成的检测信号丢失、控制信号不起作用的问题, 使得材料既具有高的耦合系数、压电常数, 又具有低密度、低声阻抗和良好的柔韧性, 能够适应航天技术大型化、轻型化和柔性化的发展趋势. 美国研究的第五代战斗机中将采用的智能蒙皮和智能骨架, 其原理是在复合材料中埋入压电材料和形状记忆合金丝作为传感器和动作器, 用来感觉飞机的应力和应变, 并对此做出反应. 智能结构与飞机的飞行控制系统结合在一起, 充分发挥飞机的性能.

经典的各向同性 Euler 梁, 假设变形后梁的横截面仍垂直于变形后梁的中性轴, 忽略了剪切变形的影响.

关于梁的非线性动力学研究有以下一些进展. Nayfeh 等人<sup>[1]</sup>研究了两端固支梁在 3:1 内共振和

1:3 内共振情况下非线性模态的分叉. Sun 和 Huang<sup>[2]</sup>讨论了压电复合结构的反馈控制问题, 建立了含有压电层的三阶剪切变形层合梁模型, 并给出了近似解析解. Halim 和 Moheimani<sup>[3]</sup>研究一种能最大程度降低结构振动的分布式压电共振控制器, 用实验的方法, 以简支 Euler 梁为研究对象, 验证了控制器的有效性. Suire<sup>[4]</sup>研究了在横向激励下, 粘弹性梁的周期和混沌动力学. Abolghasemi<sup>[5]</sup>研究了粘弹性梁的稳定的极限环和混沌吸引子. Angelo<sup>[6]</sup>研究了平面梁的静态分叉、霍普分叉.

Rextuccio 等人<sup>[7]</sup>研究了一端为简支另一端可移动梁在简谐轴向载荷作用下的非线性动力学, 利用 Galerkin 方法和多尺度方法对系统的动力学响应进行了研究, 用数值积分方法研究了系统的周期运动和混沌运动. 张伟<sup>[8]</sup>研究了简支柔性梁在参数激励作用下具有五次非线性项的运动方程, 分析了参数位于不同的区域内时, 分叉响应曲线的不同形式. 丁虎<sup>[9]</sup>将运动车辆的车身模型化为 Euler-Bernoulli 梁, 研究了车辆运行速度、车体刚度、轮胎弹性系数对车体横向振动的前两阶固有频率以及相应模态的影响. 冯志华和胡海岩<sup>[10]</sup>研究了基础做直线运动的柔性梁, 发现平凡及非平凡解分支都存在 Hopf 分岔现象. 董兴建和孟光<sup>[11]</sup>基于一阶剪切变形理论, 在应变最大处配置制动器和传感器, 对

低阶系统设计了状态反馈. 姚志刚<sup>[12]</sup>研究了压电复合材料层合梁在共振情况下的非线性动力学响应.

本文研究了简支压电复合材料层合梁在轴向和横向载荷共同作用下的非线性动力学和混沌动力学响应,得到了系统随轴向、横向激励变化的动态分叉图,分析了轴向、横向激励对系统的影响,同时得到了系统随压电激励变化的控制分叉图,通过调节压电激励,可以抑制系统通过倍周期分叉进入混沌运动,有效的降低系统振动的幅值,保持系统运动的稳定性和可控性.

## 1 动力学方程的建立

考虑如图1所示压电复合材料层合梁,梁的长度为  $a$ ,选取 Reddy 高阶位移场如下式

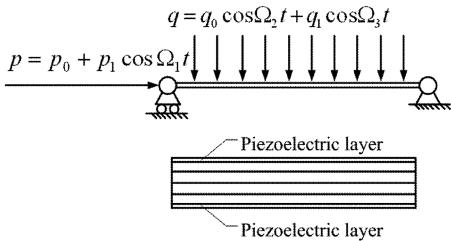


图1 压电层合梁动力学模型

Fig.1 The model of laminated composite piezoelectric beam

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) + z\phi_x(x, t) - \frac{z^3}{3h^2} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (1)$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (2)$$

我们在文献[12]中,根据 Reddy 的高阶剪切变形理论和 von Karman 理论,利用哈密顿原理得到动力学方程和边界条件,引入如下无量纲变换,并取横向振动位移的前两阶模态,利用 Galerkin 法进行离散,得到基于中面横向位移的运动方程如下

$$\begin{aligned} \ddot{w}_1 + c_3 \dot{w}_1 + \left( \frac{D_{11}\pi^4}{4} - \pi^2 p_0 + \frac{H_{11}\pi^4}{4} - \frac{5F_{11}\pi^4}{12} - \frac{\pi^6 h^2 H_{11} k_{15}}{48a^2} \right) w_1 + (2\pi^2 e_{31} G_0 + \frac{9\pi^4 D_{11}}{8} w_1^2 w_2 - \pi^2 p_1 \sin \Omega_1 t) w_1 + \frac{3\pi^4 D_{11}}{8} w_1^3 + \frac{27\pi^4 D_{11}}{4} w_1 w_2^2 = \frac{4}{\pi} (q_0 \cos \Omega_2 t + q_1 \cos \Omega_3 t) \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\ddot{w}_2 + c_3 \dot{w}_2 + \left( \frac{81D_{11}\pi^4}{4} - 9\pi^2 p_0 - \frac{135F_{11}\pi^4}{4} + \right.$$

$$\begin{aligned} & \frac{81H_{11}\pi^4}{4} - \frac{243\pi^6 h^2 H_{11} k_{15}}{16a^2} \Big) w_2 - (18\pi^2 e_{31} G_0 + 9\pi^2 p_1 \sin \Omega_1 t) w_2 + \frac{3\pi^4 D_{11}}{8} w_1^3 + \frac{243\pi^4 D_{11}}{8} w_2^3 + \frac{27\pi^4 D_{11}}{4} w_1^2 w_2 = \frac{4}{3\pi} (q_0 \cos \Omega_2 t + q_1 \cos \Omega_3 t) \end{aligned} \quad (3b)$$

选取适当的小参数进行摄动分析. 为了得到方程(3)的平均方程,我们使用多尺度法,考虑主参数共振和 1:9 内共振<sup>[12]</sup>,得到直角坐标形式的平均方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{2}c_3 x_1 + \left( \frac{1}{4}a_{13}p_1 - \frac{1}{2}a_{13}G_0 e_{31} - \frac{1}{2}\sigma_1 \right) x_2 - \frac{9}{64}a_{11}x_2(x_1^2 + x_2^2) - \frac{27}{16}a_{11}x_2(x_3^2 + x_4^2) \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -\frac{1}{2}c_3 x_2 + \left( \frac{1}{4}a_{13}p_1 - \frac{1}{2}a_{13}G_0 e_{31} + \frac{1}{2}\sigma_1 \right) x_1 + \frac{9}{64}a_{11}x_1(x_1^2 + x_2^2) + \frac{27}{16}a_{11}x_1(x_3^2 + x_4^2) - 2a_{12}q_0 \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -\frac{1}{2}c_3 x_3 - \frac{1}{18}\sigma_2 x_4 - \frac{81}{64}a_{11}x_4(x_3^2 + x_4^2) - \frac{3}{16}a_{11}x_4(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \quad (4c)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= -\frac{1}{2}c_3 x_4 + \frac{1}{18}\sigma_2 x_3 + \frac{81}{64}a_{11}x_3(x_3^2 + x_4^2) + \frac{3}{16}a_{11}x_3(x_1^2 + x_2^2) - \frac{2}{3}a_{12}q_1 \end{aligned} \quad (4d)$$

## 2 规范形计算

压电复合材料层合梁的四维平均方程(4)形式比较复杂,不利于理论分析,为了便于利用 Kovacic 和 Wiggins 提出的全局摄动方法分析压电复合材料层合梁的全局分叉和混沌动力学,需要对压电复合材料层合梁的平均方程(4)进行简化. 如果把激励幅值和作为摄动参数,不考虑此参数的平均方程(4)具有  $Z_2 \oplus Z_2$  和  $D_4$  对称性,这种对称性在规范形中也成立. 在全局分叉和混沌动力学分析中,我们把激励幅值  $q_0$  和  $q_1$  作为开折参数处理,则不考虑摄动参数的平均方程(4)有一个平凡解  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$ ,在此奇点处的平凡解对应的特征方程形式如下

$$(\lambda^2 + c_{33}\lambda + \Delta_1)(\lambda^2 + c_{33}\lambda + \Delta_2) = 0 \quad (5)$$

其中

$$\Delta_1 = \frac{1}{4}c_{33}^2 + \frac{1}{4}\sigma_1^2 - \frac{1}{16}a_{13}^2 p_1^2 +$$

$$\frac{1}{4}a_{13}^2 p_1 G_0 e_{31} - \frac{1}{4}a_{13}^2 G_0^2 e_{31}^2$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{4}c_{33}^2 + \frac{1}{169}\sigma_2^2 \quad (6)$$

当  $c_{33}=0$  和  $\Delta_1=0$  时,不考虑摄动参数的平均方程(4)有一对双零特征根和一对纯虚特征根

$$\lambda_{1,2}=0, \quad \lambda_{3,4}=\pm i\bar{\omega} \quad (7)$$

其中  $\bar{\omega}^2=\Delta_2$ .

令  $\sigma_1=\bar{\sigma}_1-f_2/2$  和  $f_2=1$ ,把  $\bar{\sigma}_1, f_2, \mu_1$  和  $\mu_2$  看作摄动参数,则不含摄动参数的平均方程变成如下形式

$$\dot{x}_1 = x_2 + 2a_{11}(x_3^2 + x_4^2)x_2 + 3a_{14}(x_1^2 + x_2^2)x_2 \quad (8a)$$

$$\dot{x}_2 = -2a_{11}(x_3^2 + x_4^2)x_1 - 3a_{14}(x_1^2 + x_2^2)x_1 \quad (8b)$$

$$\dot{x}_3 = -2\sigma_2 x_4 + 6a_{21}(x_3^2 + x_4^2)x_4 + 4a_{23}(x_1^2 + x_2^2)x_4 \quad (8c)$$

$$\dot{x}_4 = 2\sigma_2 x_3 - 6a_{21}(x_3^2 + x_4^2)x_3 - 4a_{23}(x_1^2 + x_2^2)x_3 \quad (8d)$$

方程(8)线性部分的 Jacobian 矩阵如下

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\sigma_2 \\ 0 & 0 & 2\sigma_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

利用 Zhang 等人<sup>[9]</sup>的 Maple 程序可以计算出耦合系统(8)的规范形如下

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (10a)$$

$$\dot{x}_2 = -3a_{14}x_1^3 - 2a_{11}x_1x_3^2 - 2a_{11}x_1x_4^2 \quad (10b)$$

$$\dot{x}_3 = -2\sigma_2 x_4 + 6a_{21}x_4^3 + 4a_{23}x_1^2x_4 + 6a_{21}x_3^2x_4 \quad (10c)$$

$$\dot{x}_4 = 2\sigma_2 x_3 - 6a_{21}x_3^3 - 4a_{23}x_1^2x_3 - 6a_{21}x_3x_4^2 \quad (10d)$$

这样包含摄动参数的规范形就可写成如下形式

$$\dot{x}_1 = -\bar{\mu}_1 x_1 + (1 - \bar{\sigma}_1)x_2 \quad (11a)$$

$$\dot{x}_2 = \bar{\sigma}_1 x_1 - \bar{\mu}_1 x_2 - 3a_{14}x_1^3 - 2a_{11}x_1x_3^2 - 2a_{11}x_1x_4^2 \quad (11b)$$

$$\dot{x}_3 = -\bar{\mu}_2 x_3 - \bar{\sigma}_2 x_4 + 6a_{21}x_4^3 + 4a_{23}x_1^2x_4 + 6a_{21}x_3^2x_4 \quad (11c)$$

$$\dot{x}_4 = \bar{\sigma}_2 x_3 - \bar{\mu}_2 x_4 - 6a_{21}x_3^3 - 4a_{23}x_1^2x_3 - 6a_{21}x_3x_4^2 - f_{12} \quad (11d)$$

$$\text{其中 } \bar{\mu}_1 = \frac{1}{2}\mu_1, \bar{\mu}_2 = \frac{1}{2}\mu_2, \bar{\sigma}_2 = 2\sigma_2.$$

引入如下变换

$$x_3 = I \cos \gamma, \quad x_4 = I \sin \gamma \quad (12)$$

把方程(12)代入方程(11)得

$$\dot{x}_1 = -\bar{\mu}_1 x_1 + (1 - \bar{\sigma}_1)x_2 \quad (13a)$$

$$\dot{x}_2 = \bar{\sigma}_1 x_1 - \bar{\mu}_1 x_2 - 3a_{14}x_1^3 - 2a_{11}x_1x_3^2 \quad (13b)$$

$$\dot{I} = -\bar{\mu}_2 I - f_{12} \sin \gamma \quad (13c)$$

$$\dot{\gamma} = \bar{\sigma}_2 I - 6a_{21}I^3 - 4a_{23}x_1^2 I - f_{12} \cos \gamma \quad (13d)$$

为了得到方程(13)的开折形式,引入如下线性变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{|a_{11}|}{2|a_{23}|}} \begin{bmatrix} 1 - \bar{\sigma}_1 & 0 \\ \bar{\mu}_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

将方程(14)代入方程(13)并且略去带有参数  $\bar{\sigma}_1$  的非线性项,得到如下方程

$$\dot{u}_1 = u_2 \quad (15a)$$

$$\dot{u}_2 = c_1 u_1 - c_2 u_2 - \alpha_1 u_1^3 - \beta_1 u_1 I^2 \quad (15b)$$

$$\dot{I} = -c_3 I - f_{12} \sin \gamma \quad (15c)$$

$$\dot{\gamma} = \bar{\sigma}_2 I - \alpha_2 I^3 - \beta_1 u_1^2 I - f_{12} \cos \gamma \quad (15d)$$

其中

$$c_1 = -\bar{\mu}_1^2 + \bar{\sigma}_1(1 - \bar{\sigma}_1), c_2 = 2\mu, c_3 = \bar{\mu}_2$$

$$\alpha_1 = 6a_{14}a_{11}, \beta_1 = 2a_{11}, \alpha_2 = 6a_{21}.$$

引入如下的尺度变换

$$c_2 \rightarrow \varepsilon c_2, \quad c_3 \rightarrow \varepsilon c_3, \quad \tilde{f}_{12} \rightarrow \varepsilon \tilde{f}_{12} \quad (16)$$

则规范形(15)写成带有扰动项的形式为

$$\dot{u}_1 = \frac{\partial H}{\partial u_2} + \varepsilon g^{u_1} = u_2 \quad (17a)$$

$$\dot{u}_2 = -\frac{\partial H}{\partial u_1} + \varepsilon g^{u_2} = c_1 u_1 - \alpha_1 u_1^3 - \beta_1 u_1 I - \varepsilon c_2 u_2 \quad (17b)$$

$$\dot{I} = \frac{\partial H}{\partial \gamma} + \varepsilon g^I = -\varepsilon c_3 I - \varepsilon f_{12} \sin \gamma \quad (17c)$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{\partial H}{\partial I} + \varepsilon g^\gamma = \bar{\sigma}_2 I - \alpha I^3 - \beta_1 u_1^2 I - \varepsilon f_{12} \cos \gamma \quad (17d)$$

方程(17)的 Hamilton 函数形式如下

$$H(u_1, u_2, I, \gamma) = \frac{1}{2}u_2^2 - \frac{1}{2}c_1 u_1^2 + \frac{1}{4}\alpha_1 u_1^4 + \frac{1}{2}\beta_1 u_1^2 I^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_2 I^2 + \frac{1}{4}\alpha_2 I^4 \quad (18)$$

其中  $g^{u_1}, g^{u_2}, g^I, g^\gamma$  是耗散扰动项,并且

$$g^{u_1} = 0, \quad g^{u_2} = -c_2 u_2,$$

$$g^I = -c_3 I - f_{12} \sin \gamma, \quad g^\gamma = -f_{12} \cos \gamma \tag{19}$$

3 非线性动力学与分叉分析

本节利用数值方法对平均方程(4)进行模拟分析,得到系统的非线性动力学响应.

图2是系统第一阶模态和第二阶模态响应随着外激励变化的分叉图,图中的系统初始条件和参数值为  $x_{10}=0.64, x_{20}=0.23, x_{30}=1.52, x_{40}=-0.87, c_3=0.2, \sigma_1=2.86, \sigma_2=4.62, a_{11}=194.13, a_{12}=1.5, a_{13}=1.13, p_1=207.4, q_0=1.4, G_0=0.0$ .

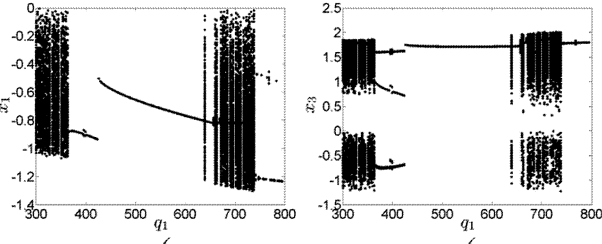


图2 横向激励分叉图

Fig. 2 The bifurcation for the transverse load of

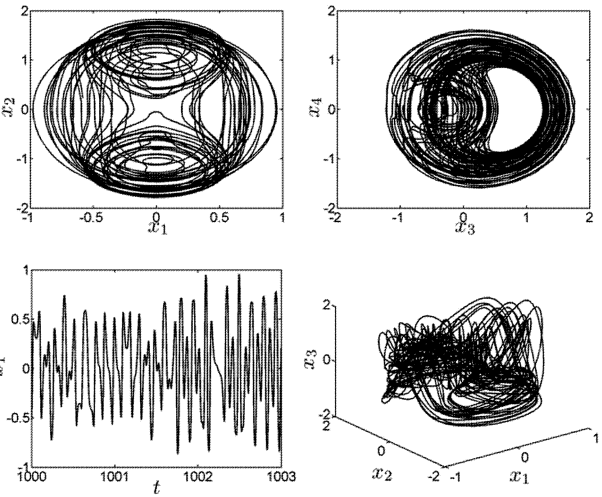


图3 时系统的混沌响应

Fig. 3 The chaotic motion of the system when

从图2中可以看出,系统的响应经历了从混沌→周期→混沌的过程,响应的幅值有跳跃现象出现,由图4中我们知道这种跳跃现象的机理是在两个模态中发生了能量转换.只改变图2中的外激励  $q_1$ ,系统的初始条件和其他参数都不变,当  $q_1=330$ ,系统会出混沌运动如图3所示.当增大外激励为  $q_1=420$ ,系统由混沌运动变为周期运动,如图4所示.继续增大外激励为  $q_1=460$ ,两端简支压电复合材料层合梁的运动形式仍然是周期运动,当增大外激励为  $q_1=700$ ,系统由周期运动变为混沌运动.

当外激励从380到620时,系统会出现周期运动,

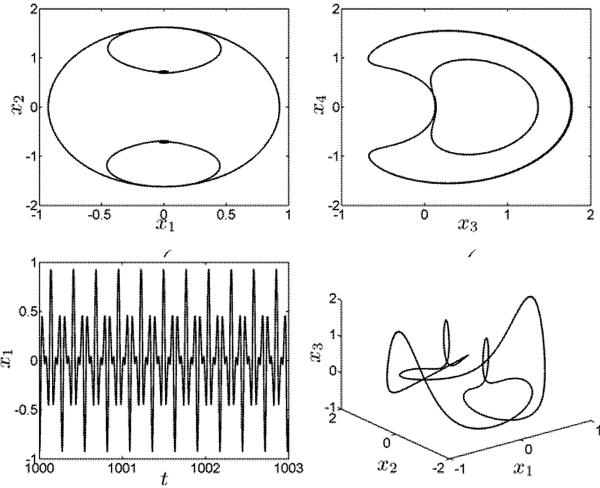


图4 时系统的周期响应

Fig. 4 The periodic motion of the system when

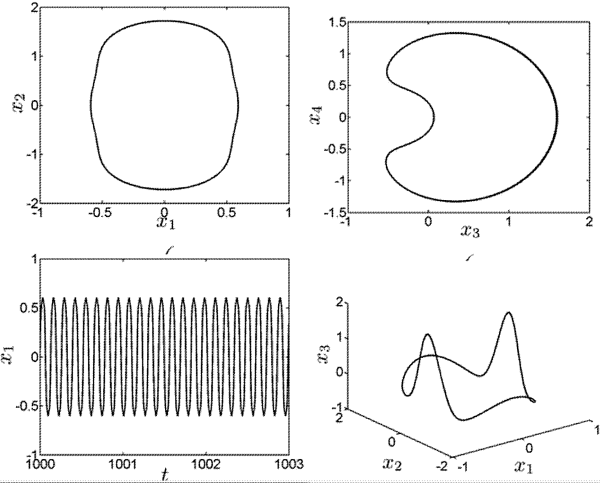


图5 时系统的周期响应

Fig. 5 The periodic motion of the system when

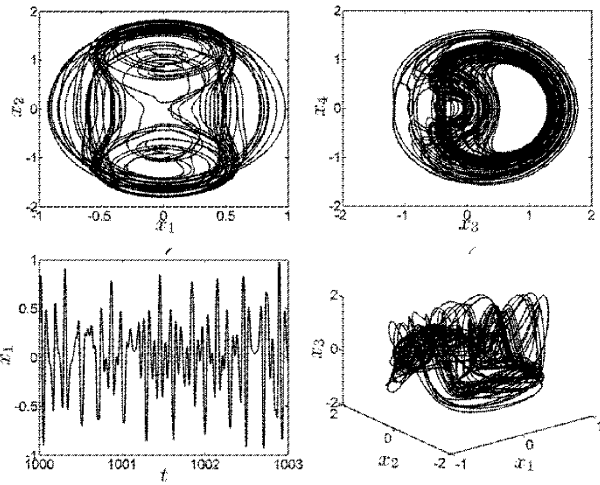


图6 时系统的混沌响应

Fig. 6 The chaotic motion of the system when

这与图4和图5中的周期运动相符合,当外激励继

续增大,从 620 到 750 时,系统会由周期运动演化为混沌运动,这一结论与图 6 相对应.

图 7 是系统第一阶模态和第二阶模态响应随着轴向激励变化的分叉图,其中  $q_1 = 400.5$ ,其它参数值同图 2.

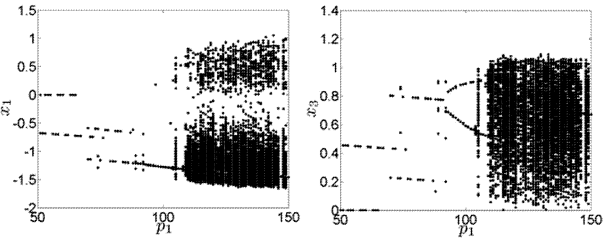


图 7 轴向激励分叉图  
Fig. 7 The bifurcation for the axial load of

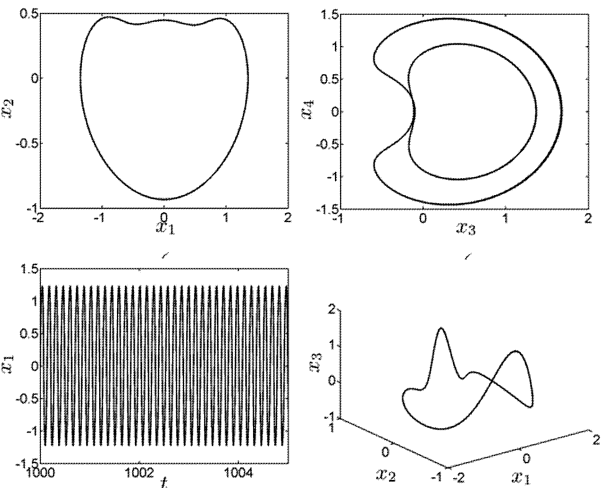


图 8 时系统的周期响应  
Fig. 8 The periodic motion of the system when

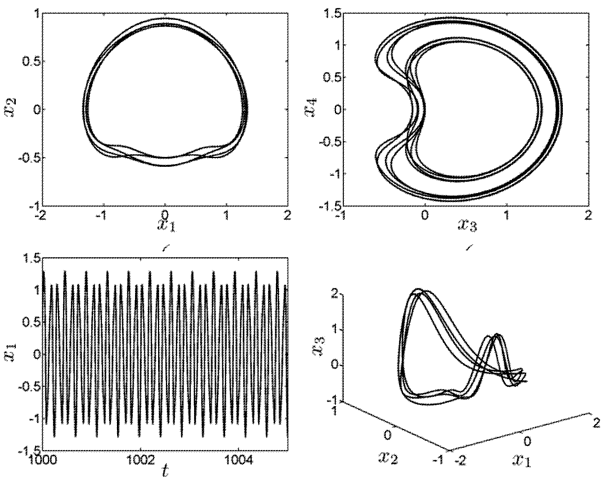


图 9 时系统的周期响应  
Fig. 9 The periodic motion of the system when

从图 7 中可以看出,随着轴向激励的变化,系统的响应经历了从周期→概周期→混沌的过程,周

期响应的幅值也有跳跃现象出现,如图 8(d) 所示. 图 7 中混沌发生的区域为  $q_1 = (110, 150)$ ,周期发生的区域为  $q_1 = (50, 110)$ .

只改变图 7 中的轴向激励  $p_1$ ,系统的初始条件和其他参数都不变,当  $p_1 = 75$ ,系统的单倍周期运动如图 8 所示. 当增大外激励为  $p_1 = 82$ ,系统由单倍周期变为三倍周期运动,如图 9 所示. 从图 9(d) 中可以看出系统有明显跳跃现象.

继续增大外激励为  $p_1 = 130$ ,压电复层合梁的运动形式系统由周期运动变为混沌运动,如图 10 所示,从图 10(d) 中可以看出系统有明显跳跃现象.

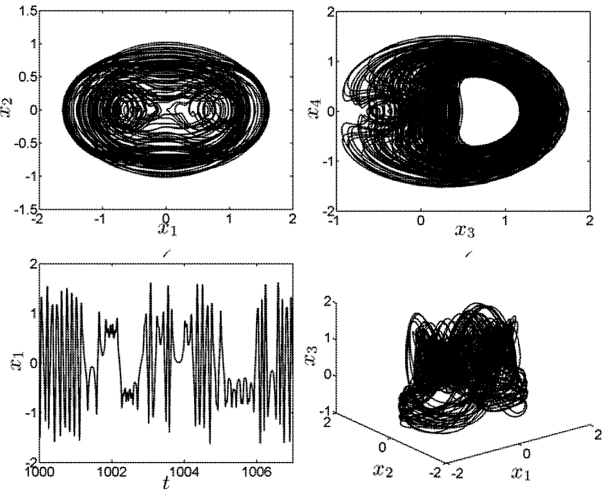


图 10 时系统的混沌响应  
Fig. 10 The chaotic motion of the system when

图 11 是系统第一阶模态和第二阶模态响应随着压电激励变化的分叉图,从图中可以看出,随着压电电压的增加,系统经历混沌→周期的过程,阻止系统通过倍周期分叉进入混沌运动,降低了系统响应的幅值,振动控制效果明显. 图 11 中混沌发生的区域为  $q_1 = (0, 17)$  和  $q_1 = (23, 47)$ ,周期发生的区域为  $q_1 = (47, 100)$ .

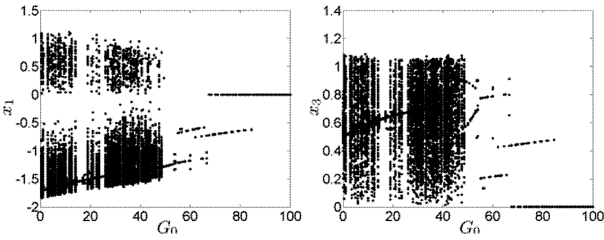


图 11 压电激励的控制效果图  
Fig. 11 The control effect for the piezoelectric excitations

系统的初始条件和其他参数都不变,当  $G_0 =$

0,未加压电控制系统的混沌运动如图 12 所示. 只改变图 12 中的压电激励  $G_0$ , 系统的初始条件和其他参数都不变, 当  $G_0 = 17$ , 系统会出周期运动, 如图 13 所示. 此时系统的振动幅值还没有明显的降低. 继续增大压电激励, 系统的振动幅值继续降低, 如图 7 所示. 图 7 清晰地表明了, 通过调节压电激励, 可以抑制系统通过倍周期分叉进入混沌运动, 有效的降低系统振动的幅值, 保持系统运动的稳定性和可控性.

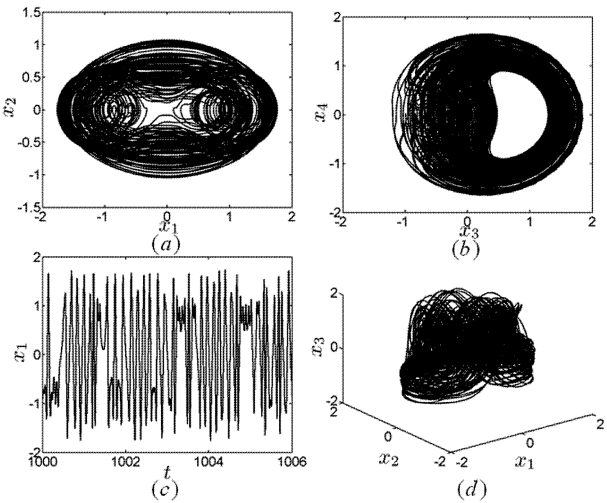


图 12 时系统的混沌响应

Fig. 12 The chaotic motion of the system when

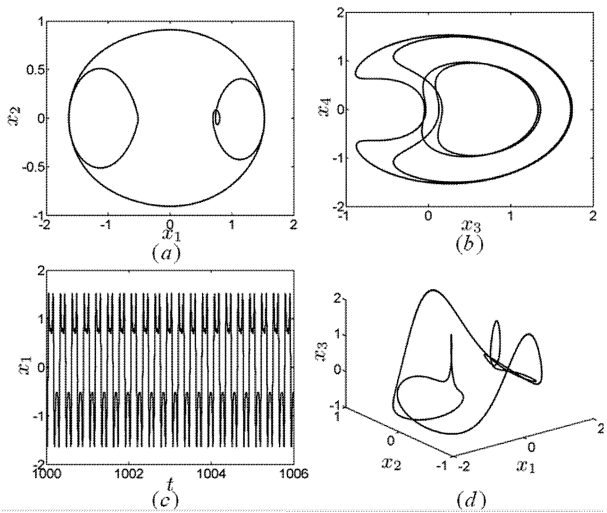


图 13 时系统的周期响应

Fig. 13 The periodic motion of the system exists when

4 结论

以简支压电复合材料层合梁为研究对象, 研究了在横向载荷、纵向参数激励, 横向压电参数激励下, 层合梁的非线性振动. 基于 von Karman 理论和

Reddy 高阶剪切变形理论, 推导出了压电复合层合梁的动力学方程. 利用 Galerkin 法离散偏微分方程, 得到二个自由度非线性控制方程, 并且利用多尺度法得到了平均方程. 用数值的方法研究了简支压电复合材料层合梁的非线性动力学、混沌动力学响应.

通过相图、分叉图分析了压电层合梁系统的非线性振动响应和动态分叉参数值. 系统的响应经历了从混沌→周期→混沌的过程, 响应的幅值有跳跃现象出现, 这种跳跃现象的机理是能量在两个模态中发生了转换. 结果表明在一定的参数范围内, 系统的响应为周期运动. 当系统的响应为混沌运动, 通过控制压电激励, 可以控制压电复合材料层合梁的振动从混沌→多倍周期→三倍周期→二倍周期→单倍周期, 振动的幅值也大幅度降低, 保持了系统的稳定性, 控制系统产生倍周期分叉解, 从而阻止系统通过倍周期分叉进入混沌运动, 并给出了控制分叉图.

参 考 文 献

- 1 Nayfeh A H, Lacarbonara W. Nonlinear normal modes of buckled beam: three-to-one and one-to-one internal resonances. *Nonlinear Dynamics*, 1999, 18: 253 ~ 273
- 2 Huang D, Sun B. Approximate analytical solutions of smart composite mindlin beams. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 244: 379 ~ 394
- 3 Halim D , Reza Moheimani S O. Spatial resonant control of flexible structures-application to a piezoelectric laminate beam. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2001, 9: 37 ~ 53
- 4 Suire G , Cederbaum G. Periodic and chaotic behavior of viscoelastic nonlinear (elastica) bars under harmonic excitations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1995, 37: 753 ~ 772
- 5 Abolghasemi M, Jalali M A. Attractors of a rotating viscoelastic beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, 38: 739 ~ 751
- 6 Angelo L, Angelo D E. Divergence, Hopf and double-zero bifurcations of a nonlinear planar beam. *Non-linear Dynamics of Structures and Mechanical Systems*, 2006, 84: 1596 ~ 1605
- 7 Rextuccio J M, Krousgrill C M, Bajaj A K. Nonlinear non-planar dynamics of a parametrically excited inextensional e-

lastic beam. *Nonlinear Dynamics*, 1991, 2: 263 ~ 289

8 Cao D X, Zhang W. Studies on bifurcation and chaos of a string-beam coupled system with two degrees-of-freedom. *Nonlinear Dynamics*, 2006, 45: 131 ~ 147

9 丁虎, 胡庆泉, 陈立群. 运动车辆梁模型的横向振动频率及模态. *动力学与控制学报*, 2011, 9(1): 44 ~ 48 (Ding H, Hu Q Q, Chen L Q. Natural frequencies and model function of transverse vibration of beam modal for moving vehicles. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(1): 44 ~ 48 (in Chinese))

10 冯志华, 胡海岩. 内共振条件下直线运动梁的动力稳定性. *力学学报*, 2002, 34(3): 389 ~ 400 (Feng Z H, Hu H Y. Dynamic stability of a slender beam with internal resonance under a large linear motion. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 34(3): 389 ~ 400 (in Chinese))

11 董兴建, 孟光. 压电悬臂梁的动力学建模与主动控制. 振动与冲击 2005, 24(6): 54 ~ 57 (Dong X J, Meng G. Dynamics modeling and active vibration control of cantilever beam with piezoelectrics. *Journal of Vibration and Shock*, 2005, 24(6): 54 ~ 57 (in Chinese))

12 姚志刚, 张伟, 陈丽华. 压电复合材料层合梁的分叉、混沌动力学与控制研究. *力学学报*, 2009, 41(1): 129 ~ 140 (Yao Z G, Zhang W, Chen L H. Bifurcation, chaotic dynamics and control of piezoelectric laminated composite beam. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2009, 41(1): 129 ~ 140 (in Chinese))

GLOBAL BIFURCATIONS AND CHAOTIC DYNAMICS OF  
LAMINATED COMPOSITE PIEZOELECTRIC BEAM \*

Yao Zhigang<sup>1</sup> Zhang Meng<sup>1</sup> Zhang Wei<sup>2</sup> Zhang Junhua<sup>2</sup>

(1. Beijing Institute of Industrial technicians, Beijing 100023, China)

(2. College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract** The nonlinear dynamics, bifurcation and chaotic dynamics of a simply supported laminated composite piezoelectric beam were analyzed. The beam was forced by an axial load and a transverse load. Based on the von Karman-type equations and the Reddy third-order shear deformation plate theory, the nonlinear equations of motions of the laminated composite piezoelectric beam were derived. The Galerkin's approach was employed to discretize the partial differential equations to the ordinary differential equations. The method of multiple scales was used to obtain the averaged equations. Based on the averaged equations, the bifurcation and chaotic motions of the beam were studied. The periodic and chaotic motions of the beam were found by using numerical simulation. It is concluded that the chaotic responses are sensitive to the piezoelectric excitations. Through changing the piezoelectric excitation, we can control the oscillation of the laminated composite piezoelectric beam.

**Key words** piezoelectric laminated composite material, global bifurcations, chaotic dynamics

Received 21 December 2010, revised 15 April 2011.  
\* The project supported by National Natural Science Foundation of China (11002005)