

一类新四维二次系统的混沌运动*

周良强¹ 陈芳启^{1,3} 陈予恕²

(1. 南京航空航天大学理学院, 南京 210016) (2. 天津大学机械工程学院, 天津 300072)

(3. 天津市非线性动力学与混沌控制重点实验室, 天津 300072)

摘要 利用解析方法和数值方法研究了一新四维二次系统的混沌运动. 严格给出了系统产生混沌运动的机理和相应的参数条件. 利用待定系数法找出了系统的同宿轨道, 并证明了轨道展开式的一致收敛性. 由 Si'lnikov 判据, 该系统存在 Smale 马蹄意义下的混沌. 数值模拟验证了理论分析的结果.

关键词 混沌, Si'lnikov 方法, 同宿轨

引言

混沌在保密通信、数据处理、信号处理等领域有着广泛的应用. 自从 Lorenz 发现第一个混沌系统—Lorenz 系统以来^[1], 许多新的混沌系统被相继提出, 如 Chen 系统^[2]、Lü 系统^[3]、类 Lorenz 系统^[4,5]、类 Chen 系统^[6]等. Wu 等^[7]构造了一个新的含二次交叉乘积项的四维自治系统, 该系统具有复杂的动力学行为, 如 2 维胎面、3 维胎面、极限环、混沌吸引子、超混沌吸引子等. Sun 等^[8]构造了一新四维系统并研究了其线性反馈控制. Qi 等^[9]提出了一个新四维反对称混沌系统并研究了其混沌动力学. Cang 等^[10]提出了一个四维二次自治系统并利用时间序列、相图、Poincaré 截面、分岔图及 Lyapunov 指数研究了其混沌运动.

本文利用解析方法和数值方法研究了文[10]中系统的混沌运动, 严格解析地给出了该系统产生混沌运动的机理与相应的参数条件. 数值模拟验证了理论分析的结果.

1 新系统的分析

考虑如下四维二次自治系统^[10]

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax - ew + yz \\ \dot{y} = by + xz \\ \dot{z} = cz + fw - xy \\ \dot{w} = dw - gz \end{cases} \quad (1)$$

其中 x, y, z, w 是状态变量, a, b, c, d, e, f, g 是实参

数. 为保证系统是耗散的, 假设 $a > b + c + d$.

该系统有 5 个平衡点, $O(0, 0, 0)$ 、 $E_1(x_1, y_1, z_1, w_1)$ 、 $E_2(x_2, y_1, z_2, w_2)$ 、 $E_3(x_1, y_2, z_3, w_3)$ 、 $E_4(x_2, y_2, z_2, w_4)$, 其中 x_i, y_i, z_i, w_i 的表达式可见^[10].

系统(1)在平衡点 $E_3(E_4)$ 处的 Jacobi 矩阵的特征方程为

$$\lambda^4 + R_1\lambda^3 + R_2\lambda^2 + R_3\lambda + R_4 = 0 \quad (2)$$

其中 $R_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是系统参数的复杂函数, 这里予以省略.

2 系统的 Si'lnikov 混沌

2.1 预备知识

考虑如下四维自治系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in R^4 \quad (3)$$

定理 1 假设 $C^r (r \geq 3)$ 自治系统(3)存在连接双曲平衡点到其自身的同宿轨, 并假设其在该平衡点处的线性化矩阵(在适当的坐标变换下)具有如下形式:

$$\begin{pmatrix} -\rho & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中 $\lambda > 0, \omega > 0, \nu > \rho > 0$, 且 $\lambda \neq \nu$, 则定义在同宿轨附近的三维 Poincaré 映照具有 Cantor 不变集, 在其上拓扑共轭于符号可数集的平移^[9].

注: 由(4)式可知, 系统在平衡点处的线性化

2010-12-20 收到第 1 稿, 2011-04-13 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目 (10972099, 11172125), 中国博士后基金资助项目 (20110491419), 天津市自然科学基金重点资助项目 (09JCZDJC26800)

矩阵的特征值为 $-\rho \pm i\omega$, $-\lambda$ 和 v , 通常将条件 $\lambda > 0, \omega > 0, v > \rho > 0$, 且 $\lambda \neq v$, 称为 Si' nikov 不等式. 当定理 1 中的条件满足时, 系统将产生 Smale 马蹄混沌.

由 Ferrari 方法, 方程(2)可写为:

$$(\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma)(\lambda^2 + \beta'\lambda + \gamma') = 0 \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \beta &= R_1/2 + \sqrt{R_1^2/4 - z}, \\ \beta' &= R_1/2 - \sqrt{R_1^2/4 - z}, \\ \gamma &= (R_2 - z)/2 + \\ &\quad \sqrt{(R_2 - z)^2/4 - R_4}, \\ \gamma' &= (R_2 - z)/2 + \\ &\quad \sqrt{(R_2 - z)^2/4 - R_4} \end{aligned} \quad (6)$$

z 满足:

$$\begin{aligned} z^3 - 2R_2z^2 + (R_2^2 + R_1R_3 - 4R_4)z + \\ (R_3^2 + R_1^2R_4 - R_1R_2R_3) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

另外, 方程(5)根的两个判别式是如下方程的解:

$$\begin{aligned} w^3 + 6g'(\frac{2R_2}{3})w^2 + \\ 9[g'(\frac{2R_2}{3})]^2w + 4[g'(\frac{2R_2}{3})]^3 + \\ 27[g(\frac{2R_2}{3})]^2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} g(x) = x^3 - 2R_2x^2 + (R_2^2 + R_1R_3 - 4R_4)x + \\ (R_3^2 + R_1^2R_4 - R_1R_2R_3) \end{aligned} \quad (9)$$

引理 1 特征方程(5)有两不同实根和一对共轭复根当且仅当

$$\Delta \equiv 4[g'(\frac{2R_2}{3})]^3 + 27[g(\frac{2R_2}{3})]^2 > 0$$

证明: 若方程(5)有两不同实根和一对共轭复根, 则方程(8)有一负根 w_1 和一对共轭复根 w_2, w_3 , 由韦达定理, $-w_1w_2w_3 = \Delta > 0$.

反之, 假设 $\Delta > 0$, 则方程(5)没有重根, 否则方程(8)有零根, 因此 $\Delta = 0$. 另一方面, 如果方程(5)没有两不同实根和一对共轭复根, 则其有四个不同实根或两对纯虚特征根, 从而方程(8)有三个正根, 所以 $-w_1w_2w_3 = \Delta < 0$, 与 $\Delta > 0$ 矛盾, 因此方程(5)有两不同实根和一对共轭复根.

引理 2 当 $\Delta > 0$ 且 $R_4 < 0$ 时, 方程(5)有一正根、一负根和一对共轭复根.

事实上, 记方程(5)的根为 $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 其中 λ_1, λ_2 是实数, $\lambda_{3,4} = \rho \pm i\omega$, 由于 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = R_4 < 0$, 引理 2 的结论是显然的.

引理 3 如果 $(R_3/R_1)(R_3/R_1 - R_2) + R_4 \neq 0$, 则方程(5)没有纯虚特征根.

证明: 如果方程(5)有一对纯虚特征根, 记为 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, 将其代入方程(5)得

$$\begin{cases} \omega^4 - R_2\omega^2 + R_4 = 0 \\ -R_1\omega^3 + R_3\omega = 0 \end{cases} \quad (10)$$

由此可得 $(R_3/R_1)(R_3/R_1 - R_2) + R_4 = 0$, 因此引理 3 的结论成立.

由引理 1、2 和 3, 我们可得到如下结果:

定理 2 若 $\Delta > 0, R_4 < 0$ 且 $(R_3/R_1)(R_3/R_1 - R_2) + R_4 \neq 0$, 则系统(1)在平衡点 $E_3 (E_4)$ 处 Jacobi 矩阵的特征值为 $-\lambda, v, \rho \pm i\omega$, 因此平衡点 $E_3 (E_4)$ 是一鞍焦点.

2.2 同宿轨的存在性及混沌运动

本节我们用待定系数法^[12-14]来找出系统的同宿轨.

对于连接 E_3 到其自身的同宿轨, 当 $t > 0$ 时, 假设

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{k\sigma t} \\ y_2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{k\sigma t} \\ z_3 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{k\sigma t} \\ w_3 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{k\sigma t} \end{pmatrix} \quad (11)$$

其中 a_k, b_k, c_k 及 d_k 是待定系数, σ 是待定常数.

将(11)代入(1), 比较 $e^{k\sigma t}$ 相同次幂系数, 得如下代数方程:

对 $k = 1$, 我们有

$$(\sigma I - J(E_3)) \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

假设 $(a_1, b_1, c_1, d_1) \neq 0$, 否则由数学归纳法知对所有 $k > 1$, 均有 $(a_k, b_k, c_k, d_k) = 0$. 当 $\det(\sigma I - J(E_3)) = 0$ 时我们可由一自由参数 ξ 决定 a_1, b_1, c_1 和 d_1 . 当定理 2 中的条件满足时, 存在唯一负实数 σ 使得 $\det(\sigma I - J(E_3)) = 0$. 同时, 利用(12)我们可得 a_1, b_1, c_1 和 d_1 关于 ξ 的表达式.

对 $k > 1$ 我们有

$$(k\sigma I - J(E_3)) \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k-i} c_i \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-i} c_i \\ -\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-i} b_i \end{pmatrix} \quad (13)$$

当 $k > 1$ 时我们有 $\det(k\sigma I - J(E_3)) \neq 0$, 因此 (a_k, b_k, c_k, d_k) 可由方程(13)唯一决定. 故当 $t > 0$ 时, $x(t), y(t), z(t)$ 及 $w(t)$ 已唯一确定.

对于相反时间轨道, 利用变换 $\tau = -t$, 其中 $t > 0$, 则方程(1)化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = ax + ew - yz \\ \frac{dy}{d\tau} = -by - xz \\ \frac{dz}{d\tau} = -cz - fw + xy \\ \frac{dw}{d\tau} = -dw + gz \end{cases} \quad (14)$$

完全类似于 $t > 0$ 情形的讨论, 假设

$$\begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \\ z(\tau) \\ w(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a'_k e^{-k\sigma'\tau} \\ y_2 + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k e^{-k\sigma'\tau} \\ z_3 + \sum_{k=1}^{\infty} c'_k e^{-k\sigma'\tau} \\ w_3 + \sum_{k=1}^{\infty} d'_k e^{-k\sigma'\tau} \end{pmatrix} \quad (15)$$

通过比较 $e^{-k\sigma'\tau}$ 相同次幂系数, 我们可得到关于待定系数 $a'_k, b'_k, c'_k, d'_k (k \geq 1)$ 和待定常数 σ' 的一系列代数方程.

对 $k=1$, 有

$$(-\sigma I + J(E_3)) \begin{pmatrix} a'_1 \\ b'_1 \\ c'_1 \\ d'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

所以 $\sigma = \sigma'$. 其他系数 a'_k, b'_k, c'_k, d'_k 可由另一自由参数 η 唯一确定.

注意到对 $\tau < 0$, 我们还有一自由参数 η . 进一步, 令 $\eta = \xi$, 我们有,

$$\begin{aligned} a'_k(S, \sigma, \xi) &= a_k(S, -\sigma, \xi), \\ b'_k(S, \sigma, \xi) &= b_k(S, -\sigma, \xi), \\ c'_k(S, \sigma, \xi) &= c_k(S, -\sigma, \xi), \\ d'_k(S, \sigma, \xi) &= d_k(S, -\sigma, \xi) \end{aligned}$$

其中 $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ 是系统参数集合. 由 $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ 的连续性可决定参数 ξ 的值.

根据上面的分析, 我们得到系统(1)连接 E_3 到其自身的同宿轨表达式如下:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(S, \sigma, \xi) e^{k\sigma t}, & t > 0 \\ x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(S, -\sigma, \xi) e^{-k\sigma t}, & t < 0 \end{cases}, \\ y(t) &= \begin{cases} y_2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(S, \sigma, \xi) e^{k\sigma t}, & t > 0 \\ y_2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(S, -\sigma, \xi) e^{-k\sigma t}, & t < 0 \end{cases}, \\ z(t) &= \begin{cases} z_3 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(S, \sigma, \xi) e^{k\sigma t}, & t > 0 \\ z_3 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(S, -\sigma, \xi) e^{-k\sigma t}, & t < 0 \end{cases}, \\ w(t) &= \begin{cases} w_3 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k(S, \sigma, \xi) e^{k\sigma t}, & t > 0 \\ w_3 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k(S, -\sigma, \xi) e^{-k\sigma t}, & t < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

其中 a_k, b_k, c_k, d_k 由(12)和(13)式决定, σ 由 $\det(\sigma I - J(E_3)) = 0$ 决定, ξ 由下式决定.

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m(S, \sigma, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(S, -\sigma, \xi) \quad (18)$$

现在我们仅需证明上述同宿轨道的级数展开式的收敛性.

事实上, 由(13)我们归纳地有

$$\left\| \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq \prod_{i=2}^k \|(\sigma I - J(E_3))^{-1}\|_{\infty} (k-1) \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \right\|_{\infty}^k$$

另一方面, 我们有

$$\|(\sigma I - J(E_3))^{-1}\|_{\infty} = O(k^{-1}) \leq M k^{-1}$$

其中 M 是一正常数, 因此

$$\left\| \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq \frac{M^k (k-1)}{k!} \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \right\|_{\infty}^k$$

故级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \|(a_k, b_k, c_k, d_k)^T\|_{\infty}$ 是收敛的, 从而

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|, \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|, \sum_{k=1}^{\infty} |d_k|$ 也是收敛的.

于是, 存在一正常数 \tilde{M} , 使得 $|a_k| \leq \tilde{M}, |b_k| \leq$

$\bar{M}, |c_k| \leq \bar{M}, |d_k| \leq \bar{M}$, 因此

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{k\sigma t} \right| \leq \bar{M} \sum_{k=1}^{\infty} e^{k\sigma t},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{k\sigma t} \right| \leq \bar{M} \sum_{k=1}^{\infty} e^{k\sigma t}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{k\sigma t} \right| \leq \bar{M} \sum_{k=1}^{\infty} e^{k\sigma t},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{k\sigma t} \right| \leq \bar{M} \sum_{k=1}^{\infty} e^{k\sigma t}$$

在 $(0, +\infty)$ 上是收敛的. 对于 $t < 0$ 情形, 证明类似.

用类似的方法, 我们可得到系统(1)连接平衡点 E_4 到其自身的同宿轨.

根据上面的讨论及定理 1、定理 2, 我们可得如下结果:

定理 3 如果定理 2 的条件满足, 则系统(1)存在连接平衡点 E_3, E_4 到其自身的同宿轨; 进一步, 当定理 1 中的 Si'lnikov 不等式满足时, 系统将产生 Smale 马蹄混沌.

3 数值模拟

利用 4 阶 Runge - Kutta 方法对系统(1)进行求解, 当系统参数取 $a = 50, b = -16, c = 10, d = 0.2, e = 10, f = 16, g = 0.5$ 时, 系统的相图如图 1 所示. 此时系统在平衡点 $E_3 (E_4)$ 处 Jacobi 矩阵 $J(E_3), J(E_4)$ 的特征值为 $0.2322, -55.8642, -0.0845 \pm 44.4608i$, 满足 Si'lnikov 不等式, 因此存在混沌吸引子, 这与相图是吻合的.

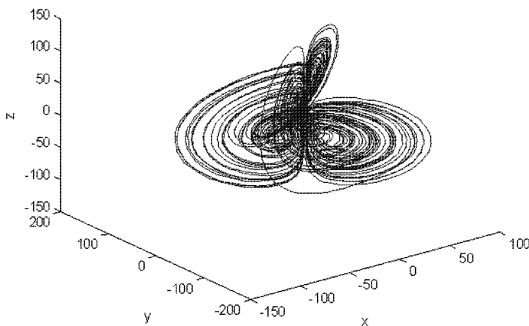


图 1 系统(1)的相图

Fig. 1 The phase portraits of system (1)

4 结论

本文利用解析方法和数值方法研究了一新四维二次系统的混沌动力学, 严格解析地给出了系统产生混沌运动的机理与相应的参数条件, 数值模拟

验证了理论分析的结果.

参 考 文 献

- Lorenz E N. Deterministic non-periodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, 20(2):130 ~ 141
- Chen G, Ueta T. Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9(7): 1465 ~ 1466
- Lü J, Chen G. A new chaotic attractor coined. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(3): 659 ~ 661
- 王琳, 倪樵, 刘攀, 黄玉盈. 一种新的类 Lorenz 系统的混沌行为与形成机制. *动力学与控制学报*, 2005, 3(4): 1 ~ 6 (Wang L, Ni Q, Liu P, Huang Y Y. Chaos and its forming mechanism of a new Lorenz-like system. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 1 ~ 6 (in Chinese))
- 李险峰, 张建刚, 褚衍东, 常迎香. 一个新类 Lorenz 混沌系统的动力学分析及电路仿真. *动力学与控制学报*, 2007, 5(4): 324 ~ 329 (Li X F, Zhang J G, Chu Y D, Chang Y X. Dynamic analysis and circuit experiment simulation for a new Lorenz-like chaotic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(4): 324 ~ 329 (in Chinese))
- 王震, 毛鹏伟. 一类三维混沌系统的分叉及稳定性分析. *动力学与控制学报*, 2008, 6(1): 16 ~ 21 (Wang Z, Mao P W. Bifurcation and stability analysis of a 3D chaotic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(1): 16 ~ 21 (in Chinese))
- Wu W, Chen Z, Yuan Z. The evolution of a novel four-dimensional autonomous system; Among 3-torus, limit cycle, 2-torus, chaos and hyperchaos. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 39(5): 2340 ~ 2356
- Sun M, Jia Q, Tian L. A new four-dimensional energy resources system and its linear feedback control. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 39(1): 101 ~ 108
- Qi G, Chen G, Zhang Y. On a new asymmetric chaotic system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, 37(2): 409 ~ 423
- Cang S, Qi G, Chen Z. A four-wing hyper-chaotic attractor and transient chaos generated from a new 4-D quadratic autonomous system. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 59(3): 515 ~ 527
- Kovacic G, Wiggins S. Orbits homoclinic to resonances, with an application to chaos in a model of the forced and

- damped sine-Gordon equation. *Physica D*, 1992, 57 (1-2): 185 ~ 225
- 12 Zhou T, Tang Y. Chen's attractor exists. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, 14(9): 3167 ~ 3177
- 13 Zhou T, Chen G, Yang Q. Constructing a new chaotic system based on the silnikov criterion. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 19(4): 985 ~ 993
- 14 Zhou T, Chen G, Celikovsky S. Si'lnikov chaos in the generalized Lorenz canonical form of dynamical systems. *Nonlinear Dynamics*, 2005, 39(4): 319 ~ 334

CHAOTIC MOTIONS OF A NEW 4D QUADRATIC SYSTEM*

Zhou Liangqiang¹ Chen Fangqi^{1,3} Chen Yushu²

(1. College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

(2. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

(3. Tianjin Key Laboratory of Nonlinear Dynamics and Chaos Control, Tianjin 300072, China)

Abstract Using a combination of analytical and numerical methods, the chaos of a new 4D quadratic autonomous system was investigated. The mechanism and sufficient conditions of system parameters for chaotic motions were investigated rigorously. By using the undetermined coefficient method, the homoclinic orbit was found and the uniform convergence of the homoclinic orbit series expansion was proved. Therefore Smale horseshoe chaos occurs for this system via Si'lnikov criterion. Numerical simulations confirmed the analytical results.

Key words chaos, Si'lnikov method, homoclinic orbit