

# 弹性杆的 Greenhill 公式与 Kirchhoff 动力学比拟\*

薛纭<sup>1</sup> 翁德玮<sup>2,1</sup> 陈立群<sup>3,2</sup>

(1. 上海应用技术学院机械工程学院, 上海 201418) (2. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(3. 上海大学力学系, 上海 200444)

**摘要** Kirchhoff 动力学比拟思想建立了弹性杆静力学与刚体定点转动动力学之间在概念和方法上的对应关系. 受拉扭弹性直杆的平衡比拟于 Lagrange 重陀螺绕铅锤轴的永久转动. 根据一次近似理论, 考察了两端稳定判据的建立过程, 表明其在稳定性上的比拟是 Lyapunov 意义上的. 在此基础上进一步讨论了两端铰支时拉扭弹性直杆的 Euler 稳定性, 并导出亦由 Greenhill 首先得到的临界载荷计算公式. 表明拉扭弹性直杆在两端铰支时的 Euler 稳定性不同于 Lyapunov 稳定性, 其主要症结在于 Euler 稳定性中边界条件不受扰动, 而 Lyapunov 稳定性是初值受扰动, 两者有区别.

**关键词** Greenhill 公式, Kirchhoff 动力学比拟, 稳定性条件, Lagrange 重陀螺, 弹性杆

## 引言

Kirchhoff(1859年)建立的线弹性细杆静力学理论与刚体定点转动动力学在数学形式上存在的相似性导致“Kirchhoff 动力学比拟”思想的产生<sup>[1-4]</sup>, 为弹性细杆静力学的研究提供了动力学的概念和方法<sup>[5-8]</sup>. 然而, 这两者又存在区别, 稳定性就是一例. 弹性杆的平衡稳定性一般是指 Euler 稳定性, 是考察在给定边界条件下扰动对平衡形态的影响, 而刚体定点转动的稳定性是指 Lyapunov 稳定性, 是考察初值受扰对给定运动的影响. Kirchhoff 动力学比拟思想使得弹性杆平衡的 Lyapunov 稳定性有了实际意义. 文献[9-13]就讨论了弹性杆的 Lyapunov 稳定性和 Euler 稳定性. 本文讨论拉扭弹性杆的平衡和 Lagrange 重陀螺绕铅锤轴永久转动在稳定性概念上进行动力学比拟的问题, 明确了 Lyapunov 稳定性与 Euler 稳定性的区别.

## 1 Kirchhoff 方程、Euler 方程以及 Kirchhoff 动力学比拟

弹性细杆静力学的 Kirchhoff 方程为<sup>[4]</sup>

$$\frac{\partial M}{\partial s} + \omega \times M + e_3 \times F = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \omega \times M = 0 \quad (1b)$$

其中  $F, M, e_3, \omega$  分别为弹性杆横截面上内力的主矢、主矩、单位外法矢和弯扭度, 波浪号表示相对截面主轴坐标系求导.

Lagrange 重陀螺的 Euler-Poisson 方程为<sup>[14]</sup>

$$\frac{\partial L_0}{\partial t} + \Omega \times L_0 + r_c \times G = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \Omega \times G = 0 \quad (2b)$$

其中  $L_0, G, r_c, \Omega$  分别为陀螺对转动点的动量矩、重力、质心对转动点的矢径和角速度, 波浪号表示相对转动点的主轴坐标系求导.

(1)和(2)式的数学形式完全相同, 预示着两者在概念和方法上存在对应关系<sup>[4]</sup>, 这导致 Kirchhoff 动力学比拟思想的产生.

## 2 Lagrange 重陀螺绕铅锤轴的永久转动及其稳定性

讨论 Lagrange 重陀螺的稳定性. 建立惯性坐标系  $O-\xi\eta\zeta$ ,  $O$  为转动定点, 用 Cardano 角  $(\alpha, \beta, \gamma)$  表示连体主轴坐标系  $O-xyz$  的姿态(图1), 其中  $z$  轴通过重心  $C$ , 重心离转动点的距离  $h = \overline{OC}$ . 设陀螺仅受重力矩作用, 于是(2)式存在绕铅垂轴的永久转动<sup>[14]</sup>

$$\alpha_s = \beta_s = 0, \quad \gamma_s = \Omega_0 t \quad (3)$$

$\Omega_0$  为陀螺绕铅锤轴转动的角速度. 引入扰动变量

2010-12-25 收到第1稿, 2011-06-13 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(10972143)

$x_1, x_2, x_3$ , 定义为

$$x_1 = \alpha - \alpha_s, \quad x_2 = \beta - \beta_s, \quad x_3 = \gamma - \gamma_s \quad (4)$$

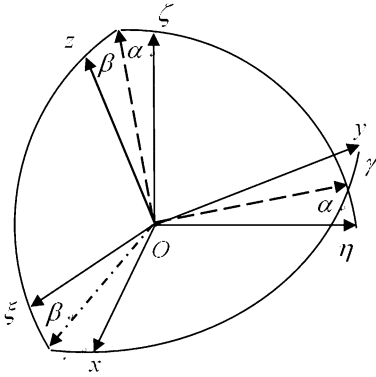


图1 弹性杆截面或 Lagrange 重陀螺 Cardano 角

Fig.1 Cardano angles of either a cross section of the elastic rod or Lagrange heavy gyro

导出线性化扰动方程

$$\dot{x}_1 + a_1 \dot{x}_2 - b_1 x_1 = 0 \quad (5a)$$

$$\dot{x}_2 - a_1 \dot{x}_1 - b_1 x_2 = 0 \quad (5b)$$

其中  $a_1 = A_3 \Omega_0 / A_1, b_1 = mgh / A_1$ , 这里  $A_1 = A_2, A_3$  依次为陀螺关于主轴  $x, y, z$  的转动惯量. 引入复变量  $u = x_1 + ix_2$ , (5) 式化作复数形式

$$\ddot{u}_1 - ia_1 \dot{u} - b_1 u = 0 \quad (6)$$

特征方程为

$$\lambda - ia_1 \lambda - b_1 = 0 \quad (7)$$

特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4b_1}}{2} i \quad (8)$$

只有当  $a_1^2 \geq 4b_1$  时, 即

$$(A_3 \Omega_0)^2 \geq 4mghA_1 \quad (9)$$

时, (8) 式的特征根才是纯虚根. 根据 Lyapunov 一次近似理论, (9) 式只能是原非线性系统零解稳定的必要条件. 然而, 事实上, 我们可以证明它也是稳定的充分条件<sup>[14]</sup>. (9) 式是 Lagrange 重陀螺直立稳定性条件 (Maievskii 于 1865 年导出的, 被称之为 Maievskii 条件).

### 3 拉扭弹性直杆的平衡及其稳定性

讨论圆截面 Kirchhoff 弹性直杆的拉扭变形. 设杆两端沿轴线作用有一对反向的右力螺旋 ( $F_0, M_0$ ), 其中  $F_0$  为拉力 (图 2). 建立惯性坐标系  $O - \xi\eta\zeta$  和横截面的主轴坐标系  $P - xyz$ , 其中  $O$  为定点,  $P$  为截面形心,  $z$  为截面的法向轴. 也用 Cardano

角 ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) 表示截面的姿态 (图 1). 设弹性杆是线弹性的

$$M_i = B_i \omega_i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

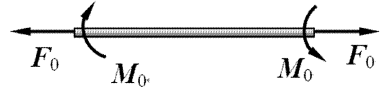


图2 受一对平衡力螺旋作用的弹性杆

Fig.2 An elastic rod acted by a pair force screws in balance

其中  $M_i, \omega_i$  分别为截面的主矩和弯扭度的主轴分量,  $B_i$  为相应的刚度系数<sup>[4]</sup>,  $B_1 = B_2$ .

Kirchhoff 方程 (1) 存在如下特解

$$\alpha_s = \beta_s = 0, \quad \gamma_s = \omega_0 s \quad (11a)$$

$$F_{1s} = F_{2s} = 0, \quad F_{3s} = F_0 \quad (11b)$$

其中  $\omega_0 = M_0 / B_3$  为单位长度扭转角,  $F_i$  为截面主矢的主轴分量. (11) 式对应着弹性杆的直线平衡状态. 引入扰动变量 (4) 式, 导出线性化扰动方程<sup>[3]</sup>

$$B_1 x_1'' + M_0 x_2' - F_0 x_1 = 0 \quad (12a)$$

$$B_1 x_2'' - M_0 x_1' - F_0 x_2 = 0 \quad (12b)$$

式中撇号表示对弧坐标的导数. 可见, (12) 式和 (5) 式数学形式完全相同. 因此, 引入复变量  $u = x_1 + ix_2$  后也可以化作复数形式

$$u'' - ia_2 u' - b_2 u = 0 \quad (13)$$

其中  $a_2 = M_0 / B_1, b_2 = F_0 / B_1$ . 于是, 有相似的特征方程 (6) 和特征根 (7) 式. 特征根

$$\mu_{1,2} = \frac{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4b_2}}{2} i \quad (14)$$

为纯虚数的条件是

$$a_2^2 \geq 4b_2 \quad (15)$$

其无量纲形式为

$$M_0^2 \geq 4 \frac{F_0}{B_1} \quad (16)$$

这就是 Maievskii 条件在弹性杆力学中的体现, 是保证弹性杆在力螺旋作用下的直线平衡状态满足 Lyapunov 稳定性的条件. (16) 式表明拉力是 Lyapunov 稳定性的不利因素. (16) 式是 Greenhill 于 1883 年导出的, 被称之为 Greenhill 公式<sup>[15]</sup>. 这相当于是一端固定一端自由, 且在自由端作用力螺旋时弹性杆平衡时的 Greenhill 公式, 扰动是对约束的.

当弹性杆两端都存在约束时, 受扰挠曲线要

满足两端的边界条件. 考虑边界条件对稳定性的影响. 引入复挠度  $w = \xi + i\eta$ , 挠曲线微分方程的一次近似为

$$w' = -iu \quad (17)$$

方程(13)的通解为

$$u = C_1 e^{\mu_1 s} + C_2 e^{\mu_2 s} \quad (18)$$

代入(17)式, 导出

$$w = \frac{C_1}{\mu_1} e^{\mu_1 s} + \frac{C_2}{\mu_2} e^{\mu_2 s} + C_3 \quad (19)$$

其中  $C_j$  为积分常数, 由边界条件确定. 两端铰支的边界条件为

$$w|_{s=0} = w|_{s=L} = 0 \quad (20a)$$

$$w'' - ia_2 w'|_{s=0} = w'' - ia_2 w'|_{s=L} = 0 \quad (20b)$$

从(20b)导出积分常数存在非零解的条件

$$e^{\mu_1 L} = e^{\mu_2 L} \quad (21)$$

解得

$$\mu_2 L = \mu_1 L + 2n\pi i, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (22)$$

最小非零解是取  $n = 1$ , 导出

$$L^2 (a_2^2 - 4b_2) = 4\pi^2 \quad (23)$$

注意到(16)式, 有

$$0 \leq \left( \frac{M_0 L}{2EI} \right) - \frac{F_0 L^2}{EI} \leq \pi^2 \quad (24)$$

当力螺旋中的力为压力时(24)式为

$$\left( \frac{M_0 L}{2EI} \right) + \frac{F_0 L^2}{EI} \leq \pi^2 \quad (25)$$

此时亦为 Greenhill 所得<sup>[3]</sup>. 当  $M_0 = 0$  时, (25)式给出 Euler 载荷. 从(24)式可见, 拉力是保持 Euler 稳定的有利因素. 值得指出, (14)式的纯虚数条件(15)式正是 Lyapunov 稳定性条件, 对于所讨论的两端存在约束的弹性杆, 只是 Euler 稳定的必要条件.

## 4 结语

在 Kirchhoff 动力学比拟中, 弹性杆的 Euler 稳定性与重刚体的 Lyapunov 稳定性有区别和联系, 在一定条件下弹性杆的 Greenhill 公式与 Maievskii 公式在 Lyapunov 稳定性意义上等同, 但前者在两端铰支时的 Euler 稳定性有其特殊性, 两者存在概念上的区别, 后者是前者稳定的必要条件.

## 参 考 文 献

1 Kirchhoff G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung

eines unendlich dünnen elastischen Stabes. *J. Rein Angew. Math.*, 1859, 56: 285 ~ 313

2 Greenhill A G. Proc. Inst. Mech. Engrs, London, 1883: 182

3 S P 铁摩辛柯, J M 盖莱, 张福范译. 弹性稳定理论. 北京: 科学出版社, 第二版, 1965: 169 (Timoshenko S R, Gere J M. Theory of Elastic Stability. Beijing: second edition, McGraw-Hill, 1965: 169)

4 刘延柱. 弹性细杆的非线性力学—DNA 力学模型的理论基础. 北京: 清华大学出版社 & Springer, 2006: 62 (Liu Y Z. Nonlinear mechanics of thin elastic rod—theoretical basis of mechanical model of DNA. Beijing: Tsinghua University Press, Springer, 2006: 62 (in Chinese))

5 彭建华, 刘延柱. 弹性细杆的混沌形态. 动力学与控制学报, 2006, 3(2): 36 ~ 39 (Peng J H, Liu Y Z. Chaotic configuration of a thin elastic rod. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 3(2): 36 ~ 39 (in Chinese))

6 刘延柱. 松弛状态非圆截面弹性螺旋细杆的稳定性. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 12 ~ 16 (Liu Yanzhu. Stability of a thin elastic helical rod with noncircular cross section in relaxed state. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 12 ~ 16 (in Chinese))

7 刘延柱, 盛立伟. 松弛状态圆截面螺旋细杆的弹性波传播动力学与控制学报, 2006, 4(4): 289 ~ 293 (Liu Y Z, Sheng L W. Elastic wave propagation of a thin helical rod with circular cross section in relaxed state. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(4): 289 ~ 293 (in Chinese))

8 薛纭, 陈立群. 受力螺旋作用的非圆截面弹性直杆的 Lyapunov 稳定性. 动力学与控制学报, 2008, 6(3): 198 ~ 201 (Xue Y, Chen L Q. Lyapunov stability of a straight elastic rod with non circular cross section under force screw. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(3): 198 ~ 201 (in Chinese))

9 刘延柱. 轴向受压螺旋杆的平衡稳定性. 固体力学学报, 2005, 26(3): 256 ~ 260 (Liu Y Z. Stability of equilibrium of a helical rod under axial compression. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 26(3): 256 ~ 260 (in Chinese))

10 薛纭, 贺向阳. 由 Kirchhoff 方程导出压杆的临界载荷. 力学与实践, 2009, 31(1): 83 ~ 85 (Xue Y, He X Y. Critical load of columns deduced from Kirchhoff equation. *Mechanics in Engineering*, 2009, 31(1): 83 ~ 85 (in Chinese))

11 薛纭, 刘延柱. 弹性直杆在力螺旋作用下的稳定性. 物

- 理学报, 2009, 58(10): 6737 ~ 6742 (Xue Y, Liu Y Z. Stability of a straight Kirchhoff elastic rod under the force screws. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(10): 6737 ~ 6742 (in Chinese))
- 12 薛纭, 翁德玮. 弹性压扭直杆的 Greenhill 公式对精确模型的推广. 物理学报, 2010, 59(12): 8330 ~ 8334 (Xue Y, Weng D W. Greenhill formula for an exact model of elastic rod. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(12): 8330 ~ 8334 (in Chinese))
- 13 薛纭, 李燕芬. 计及轴向和剪切变形时压杆的 Euler 公式. 力学与实践, 2011, 33(1): 74 ~ 77 (Xue Y, Li Y F. Euler's formula for a thin shearable and extensible elastic column. *Mechanics in Engineering*, 2011, 33(1): 74 ~ 77 (in Chinese))
- 14 刘延柱. 高等动力学. 北京: 高等教育出版社, 2001: 125, 130, 129 (Liu Y Z. *Advanced dynamics*. Beijing: Science Press; 125, 130, 129 (in Chinese))
- 15 Coyne J. Analysis of the formulation and elimination of loops in twisted cable. *IEEE J. of Oceanic Engineering*, 1990, 15(2): 72 ~ 83

## GREENHILL FORMULA OF AN ELASTIC ROD AND KIRCHHOFF KINETIC ANALOGY\*

Xue Yun<sup>1</sup> Weng Dewei<sup>2,1</sup> Chen Liqun<sup>3,2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 201418, China)

(2. Shanghai Applied Mathematics and Mechanics Shanghai University, Shanghai 200072, China)

(3. Department of Mechanics Shanghai University, Shanghai 200444, China)

**Abstract** There are corresponding relations of concepts and methods between elastic rod statics and rigid body dynamics about a fixed point according to the thought of Kirchhoff kinetic analogy. A twisted elastic column in equilibrium is corresponding to a Lagrange heavy gyro rotating around a plumb axis. The equilibrium of an elastic rod of tension and twist is corresponding to permanent rotation of Lagrange heavy gyro about vertical axis. According to the first approximation theory, the process of building the two stability criteria were examined, which shows that the kinetic analogy between them is in the sense of Lyapunov stability. Based on this, the Euler elastic stability of the tension and twist rod with both ends pinned was further discussed and the formula satisfied by critical load was derived by Greenhill firstly. The results show that for the tension and twist rod, the Euler stability is different from Lyapunov stability in the concept. The difference is that the boundary condition is perturbed in Lyapunov stability and not in Euler stability.

**Key words** Greenhill formula, Kirchhoff kinetic analogy, stability conditions, Lagrange heavy gyro, thin elastic rod