

# 无标度生物神经网络的相干共振分析\*

于海涛 王江 贾洪军 邓斌 魏熙乐

(天津大学电气与自动化工程学院,天津 300072)

**摘要** 本文以神经元二维映射模型为节点,构造了一个具有无标度连接特性的生物神经网络.用高斯白噪声模拟生物神经系统中的环境噪声,通过数字仿真研究了噪声对神经网络动力学行为的影响.噪声可以提高神经元的兴奋性,诱导神经元产生峰电位,当噪声强度为某一适当值时,峰电位序列的有序度可以达到最佳,从而产生相干共振现象.另外,研究表明无标度神经网络的结构和参数变化对其共振特性有重要影响.

**关键词** 无标度网络, 神经元映射模型, 高斯白噪声, 相干共振

## 引言

在生物神经系统中,神经元产生动作电位的过程总是受到各种噪声的影响,这些噪声主要来源于系统内部参数的涨落以及外部环境的变化<sup>[1]</sup>.噪声的涨落影响是不能忽略的,它与神经系统的实际功能有着密切的联系.在有噪声的情况下,神经元可借助噪声而达到放电阈值,并在一定的噪声强度作用下,与外部弱周期信号达到最佳的同步,即随机共振现象<sup>[2]</sup>.随机共振现象在自然界普遍存在. Levin 等在蟋蟀的机械感受器中发现了随机共振现象,并证明了蟋蟀可利用噪声监测到由捕食者的运动引起的空气流动的方向和速度<sup>[3]</sup>;在人的视觉<sup>[4]</sup>、听觉<sup>[5]</sup>、和记忆<sup>[6]</sup>中也存在大量的随机共振现象;在单个神经元的阈值模型中也发现了随机共振现象<sup>[7]</sup>.在没有外界信号的激励,只有噪声的作用下,系统输出也能变得有序,产生类似随机共振现象,这种现象被称为相干共振<sup>[8]</sup>,或者随机自共振.在很多可兴奋性系统,如单个神经元的 Fitz - Hugh - Nagumo 模型<sup>[9]</sup>、Hindmarsh - Rose 模型<sup>[10]</sup>、Hodgkin - Huxley 模型<sup>[11]</sup>和 Chay 模型<sup>[12]</sup>都可以观察到该现象.

近年来,关于复杂网络的研究正处于蓬勃发展阶段,其中 Barabasi 与 Albert 提出的无标度网络是复杂网络研究取得的重要成果之一<sup>[13]</sup>.无标度网络反映了真实系统的一个重要特征:节点的度分布

符合幂律分布,即只有少数节点的度数较高,而大多数节点的度数相对较低. Barabasi 与 Albert 提出的无标度网络建模方法包括两个原则,即网络持续增加新节点和新节点优先与网络中度数较高的节点相连.他们认为,生长和择优连接这两种机制的结合是演化无标度网络的合理假设,这个方法很好的解释了 Internet 和 World Wide Web 的形成<sup>[14]</sup>以及流行病的传播<sup>[15]</sup>.目前无标度网络已经引起了神经科学家的广泛兴趣,实验发现人的大脑皮层神经网络具有无标度特性<sup>[16-18]</sup>,同步放电分析表明这种连接结构可以增强神经网络对信息的存储能力和处理速度<sup>[19-20]</sup>.另外,无标度神经网络的随机共振特性也得到了深入研究<sup>[21-23]</sup>,但是均采用基于离子通道的微分方程模型来模拟单个神经元的放电行为,例如 Fitzhugh - Nagumo 模型<sup>[24]</sup>等,这类模型普遍具有高度非线性和高维数的特点,由此构建的网络模型十分复杂,这不利于对网络的整体动力学行为进行分析,特别是网络结构的影响,因为其形成机制被模型本身的复杂性所掩盖.另外对于这类网络的数字仿真速度很慢.近年来, Rulkov 等人提出了离散的映射神经元模型<sup>[25]</sup>,该模型结构简单、计算效率高,且能够模拟生物神经元的各种放电特性<sup>[26]</sup>,适用于构建大规模神经网络,以研究网络结构其动力学行为的影响.

本文以 Rulkov 提出的神经元映射模型<sup>[25]</sup>为节点,构造一个无标度连接的生物神经网络,用高

斯白噪声模拟生物神经系统中的环境噪声,研究噪声对神经网络动力学特性的影响,以及出现的相干共振现象,并试图给出理论解释.

## 1 模型和方法

2002年,Rulkov最早提出了二维映射神经元模型,该模型用两个变量描述神经元的动力学特性,其方程为:

$$x_n = f_\alpha(x_n, y_n + \beta_n) \quad (1)$$

$$y_n = y_n - \mu(x_n + 1) + \mu\sigma \quad (2)$$

其中下标  $n$  表示迭代序数;  $x$  为快速动力学变量,代表神经元的膜电压;  $y$  为慢动力学变量,或者恢复变量,表征神经元细胞膜上离子通道的门控离子(主要为  $Ca^{2+}$ ) 的浓度; 参数  $0 < \mu \ll 1$  使系统具有两个时间尺度,确保  $x_n$  的变化对  $y_{n+1}$  的影响十分微小; 参数  $\beta$  和  $\sigma$  描述外部对神经元的输入或影响,可以是突触电流  $I^{syn}$  或者外加刺激电流  $I^{dc}$ . 分段函数  $f_\alpha(x, y)$  描述了神经元阈下振荡和动作电位的形成过程,具体形式如下:

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \alpha/(1-x) + y & (x < 0) \\ \alpha + y, & (0 \leq x < \alpha + y) \\ -1 & (x \geq \alpha + y) \end{cases} \quad (3)$$

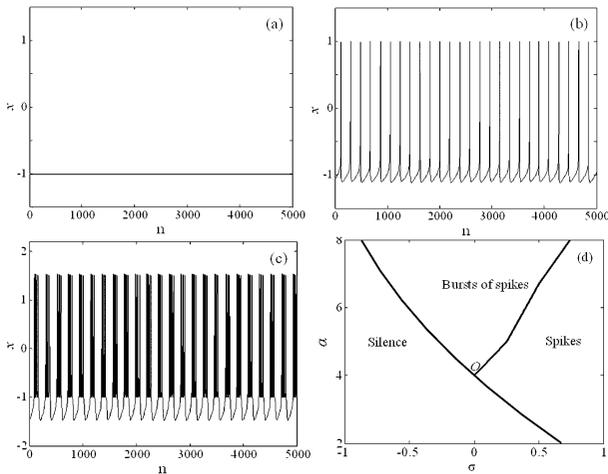


图1 映射神经元模型的不确定性动力学行为

- (a) 静息,  $\alpha = 4, \sigma = -0.01$ ; (b) 连续脉冲放电,  $\alpha = 4, \sigma = 0.01$ ;  
(c) 爆发式脉冲放电,  $\alpha = 5, \sigma = 0.01$ ;  
(d) 参数空间  $(\sigma, \alpha)$  内系统状态分岔图,  $O(0, 4)$  为三相分岔点

Fig. 1 Dynamics of map-based neuron:

- (a) silence,  $\alpha = 4, \sigma = -0.01$ ; (b) spiking,  $\alpha = 4, \sigma = 0.01$ ;  
(c) bursting,  $\alpha = 5, \sigma = 0.01$ ; (d) bifurcation diagram  
on the parameter plane  $(\sigma, \alpha)$ ,  $O(0, 4)$  is the bifurcation point

其中  $\alpha$  是系统参数. 当参数  $\alpha$  和  $\sigma$  选取不同值时,

该模型可以模拟神经元的静息 (Silence)、连续脉冲放电 (Spiking) 和爆发式脉冲放电 (Bursting) 等不同的动力学行为, 如图 1 所示.

参照文献[13]的演化规则, 我们构建一个由映射神经元模型组成的无标度神经网络. 首先, 构造一个节点数为  $N_0$  的全连接网络作为起始网络, 然后每次向已有网络中增加一个节点, 使其与网络中任意  $\lambda$  个节点相连, 且优先与连接度数较高的节点相连, 新节点与网络中已有节点的连接概率  $p_i$  为

$$p_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (4)$$

其中  $k_j$  为第  $j$  个节点的连接度. 重复以上步骤直到网络中神经元个数达到  $N$  为止, 就可以得到一个节点连接度数符合指数分布的无标度生物神经网络, 拓扑结构和节点的连接度数分布如图 2 所示, 其动力学方程如下:

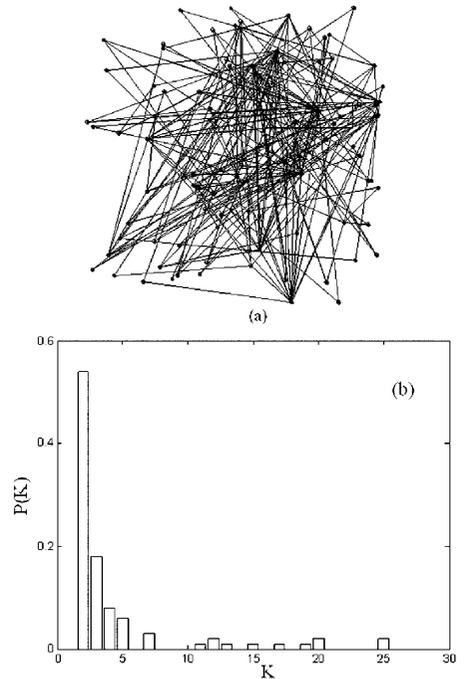


图2 (a) 无标度神经网络,  $\lambda = 2, N = 100$ ;  
(b) 网络中神经元的连接度数分布

Fig. 2 (a) Scale-free neural network with  $\lambda = 2$  and  $N = 100$ ;  
(b) Probability distribution for the connectivity of the network

$$x_{i,n+1} = f_\alpha(x_{i,n}, y_{i,n} + \beta_{i,n}) + \sqrt{2D}\xi_{i,n} \quad (5)$$

$$y_{i,n+1} = y_{i,n} - \mu(x_{i,n} + 1) + \mu\sigma_i$$

其中  $i (i = 1, 2, \dots, N)$  表示网络中神经元的标号.  $\beta_{i,n}$  是耦合项, 具体形式为:

$$\beta_{i,n} = \varepsilon \sum_{j=1}^N c_{ij} (x_{j,n} - x_{i,n}) \quad (6)$$

这里,  $\varepsilon$  是神经元之间的耦合强度,  $c_{ij}$  为复杂网络的耦合矩阵元, 当神经元  $i$  和神经元  $j$  之间有突触相连时  $c_{ij} = 1, (i \neq j)$ ; 否则  $c_{ij} = 0$ .  $\sqrt{2D}\xi_{i,n}$  为噪声项, 它是强度为  $D$  的高斯白噪声, 均值为零, 方差为  $2D$ .

本文设定模型参数为  $\mu = 0.001, \alpha = 4, \sigma_i$  为  $[-0.03, -0.01]$  范围内均匀分布的随机数. 参数  $\sigma_i$  越接近分岔点  $O(0, 4)$ , 神经元的兴奋性越强. 在无噪声的情况下, 系统处于静息状态, 这样可以保证加入噪声以后得到的动作电位完全是由噪声所激发的.

为了定量地描述神经元输出的峰电位的有序程度, 参照文献[9]的做法, 引入峰峰间隔的标准差与平均值的  $CR$  比值作为衡量峰序列有序度的标准, 称为相干共振系数. 的具体形式如下:

$$CR = \frac{\sqrt{\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2}}{\langle T \rangle} = \frac{\sqrt{\text{var}(T)}}{\langle T \rangle} \quad (7)$$

其中  $T$  是峰峰间期序列,  $\langle \cdot \rangle$  表示取均值,  $\text{var}(T)$  表示方差. 一般来说,  $CR$  的值越小, 则说明峰序列的有序性越好; 反之越差. 对于周期性确定序列,  $CR = 0$ ; 对于 Poisson 序列,  $CR$  趋近于 1. 对于复杂的神经网络, 其相干共振特性可以用各个神经元相干共振系数的均值来衡量, 即:

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N CR_i \quad (8)$$

这里,  $CR_i (i = 1, 2, \dots, N)$  为网络中神经元  $i$  的相干共振系数.

## 2 结果与分析

图 3 给出了在不同强度噪声刺激下无标度神经网络输出的峰电位序列. 可见, 噪声可以提高神经元的可兴奋性, 降低其放电的相对阈值, 使原来处于静息状态的神经元超过放电阈值而产生峰电位, 并且噪声强度越大, 单位时间内得到的峰电位越多. 从峰序列分布的角度看, 当噪声强度很小时, 如  $D = 10^{-5}$ , 这样的噪声不足以触发峰电位, 神经元的膜电压只是在平衡点附近出现小幅的随机振荡; 随着噪声强度的增加, 如  $D = 10^{-4.5}$  时, 神经元膜电压会在小幅随机振荡的背景下出现少数大幅的峰电位, 这些峰电位基本上是随机分布的; 噪声强度进一步增加, 如  $D = 10^{-3.5}$  时, 峰电位数目不断增多, 且时间分布变得基本均匀, 出现类似周期放

电状态; 但是当噪声强度超过某一个阈值后, 如  $D = 10^{-2}$  时, 峰电位的时间规整性就会逐渐变差, 这是因为噪声在变量  $x_i$  中所占的比例过大, 导致峰电位趋于不规则分布.

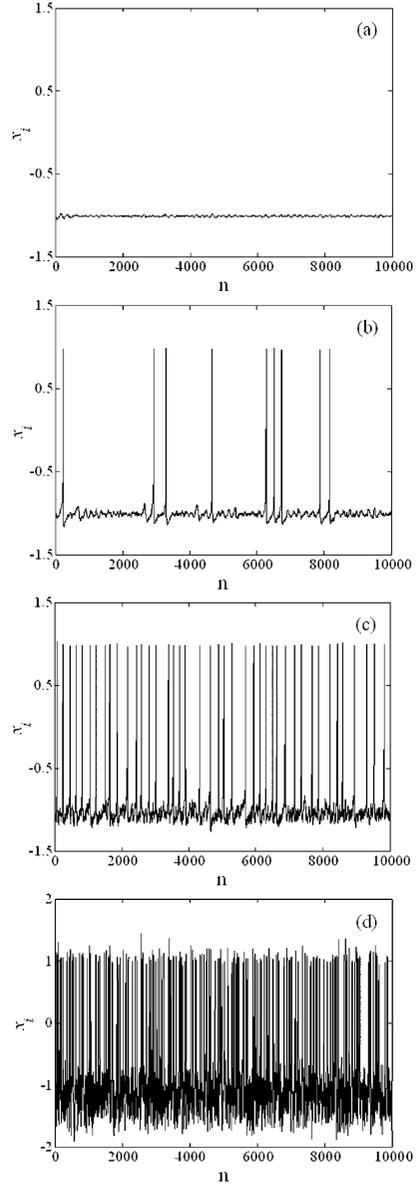


图 3 无标度神经网络输出的峰序列,  $N = 100, \varepsilon = 0.01$ :  
 (a)  $D = 10^{-5}$ , (b)  $D = 10^{-4.5}$ , (c)  $D = 10^{-3.5}$ , (d)  $D = 10^{-2}$   
 Fig.3 Spike trains of the scale-free network with  $N = 100$  and  $\varepsilon = 0.01$   
 (a)  $D = 10^{-5}$ , (b)  $D = 10^{-4.5}$ , (c)  $D = 10^{-3.5}$ , (d)  $D = 10^{-2}$

图 4 是相干共振系数  $R$  随噪声强度  $D$  的变化曲线. 随着噪声强度的逐渐增加, 相干共振系数  $R$  先减小后增大, 当  $D$  取某个适当值时,  $R$  存在最小值. 表明无标度生物神经网络在有噪声刺激的情况下, 系统输出能够通过噪声的作用达到一种较有序的状态, 即产生相干共振现象. 这是因为神经元本身是一个非线性阈值系统, 存在一个内在的振荡周

期. 在弱噪声的刺激下, 神经元能够产生小幅的具有一定内在周期性的阈下振荡; 当噪声强度适中时, 处于阈下振荡峰值处的膜电位随机地跨越阈值而产生放电, 且峰峰间隔基本上为内在阈下振荡周期的整数倍, 这使得系统的输出达到一种较有序的状态, 即出现相干共振现象. 可见, 该内在的具有一定周期性的阈下振荡在一定程度上等同于随机共振的外加周期信号, 是神经元产生相干共振的基础.

下面研究网络参数对系统相关共振特性的影响. 比较图4中参数 $\sigma$ 值分别为 $[-0.03, -0.1]$ 和 $[-0.04, -0.1]$ 两种情况下得到的相干共振曲线, 均可以观察到相干共振现象, 即对于不同的模型参数, 调整噪声强度为某个适当值时, 峰电位的有序度可以达到这一参数情况下的最佳状态. 当系统参数取值为 $[-0.03, -0.1]$ 时, 相干共振系数 $R$ 的最小值小于参数值为 $[-0.04, -0.1]$ 时 $R$ 的最小值, 说明发生共振时前者峰电位序列的有序度要优于后者, 且所需要的噪声强度小于后者. 这是由网络中神经元的兴奋性差异造成的, 参数 $\sigma$ 距离分岔点越远, 神经元的兴奋性越差, 激发峰电位所需要的噪声强度也就越大. 由此可以认为, 系统参数越取值越接近分岔点, 所得峰电位序列的有序度也就越高, 系统的相干共振性就越好.

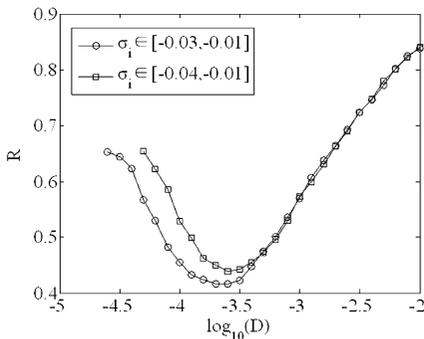


图4 相干共振系数 $R$ 随噪声强度 $D$ 的变化曲线

Fig. 4 Coherence resonance coefficient  $R$  versus noise intensity  $D$

耦合强度 $\varepsilon$ 对神经网络的相干共振性同样有较强的影响. 比较图5中 $\varepsilon = 0.01, 0.05, 0.1$ 三种情况下得到的相干共振曲线, 可见当耦合强度 $\varepsilon$ 较小时, 如 $\varepsilon = 0.01$ 或 $0.05$ , 在适当强度噪声的刺激下, 系统能够产生相干共振现象; 而当 $\varepsilon$ 取值超过某一个阈值时, 如 $\varepsilon = 0.1$ , 相干共振系数随着噪声强度的增强而逐渐降低, 系统不会出现相干共振现

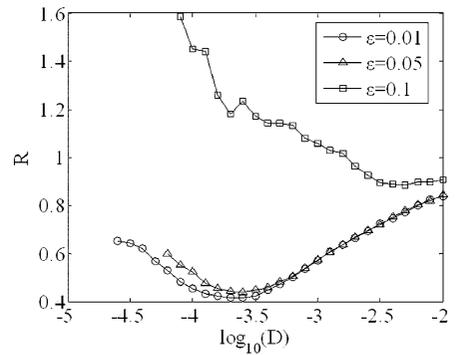


图5 相干共振系数 $R$ 随噪声强度 $D$ 的变化曲线

Fig. 5 Coherence resonance coefficient  $R$  versus noise intensity  $D$  for different coupling strength;  $\varepsilon = 0.01, 0.05, 0.1$

象. 这是因为当 $\varepsilon$ 较小时, 突触电流较弱, 可以忽略其对突触后神经元的影响, 网络的共振特性取决于神经元本身的兴奋性和刺激噪声的强度; 而 $\varepsilon$ 较大时, 突触电流的影响不能忽略, 使得神经元之间的相互作用增强, 在噪声的作用下可能产生簇放电, 导致网络的共振特性降低.

下面研究网络结构对系统相干共振特性的影响. 在构造无标度网络的过程中, 改变每个新增节点的度数影响系统的相干共振特性(图6(a)), 随着新增神经网络节点度数的增大, 发生相干共振的噪声强度也越高, 表明神经系统可以通过改变自身的网络结构来适应外部环境的变化, 以达到准确传递神经信息的目的. 而增大网络的规模对共振特性几乎没有影响. 图6(b)中网络规模由 $N = 100$ 增大到 $N = 200$ , 相干共振系数 $R$ 仍可以取得极小值, 表明相干共振现象可发生在不同规模的无标度神经网络中. 另外, 两个网络的相干共振曲线几乎重合, 即在同一的噪声强度下发生共振, 且共振时峰电位序列的有序度近似相等. 这是由无标度网络模型自身决定的, 增大神经网络规模, 已有的大部分神经元的突触数目不变, 因而不影响其的兴奋性, 以及网络的共振特性. 事实上, 在神经信息传递的过程中网络规模不断扩大, 但是周围的噪声环境是趋于稳定的, 本文的研究说明无标度网络规模的变化不会影响网络的共振特性, 这有利于网络中神经信息准确的长距离传递.

### 3 结论

本文基于神经元二维映射模型构建一个具有无标度连接特性的生物神经网络, 用高斯白噪声模拟神经系统中的环境噪声, 进而研究噪声对神经

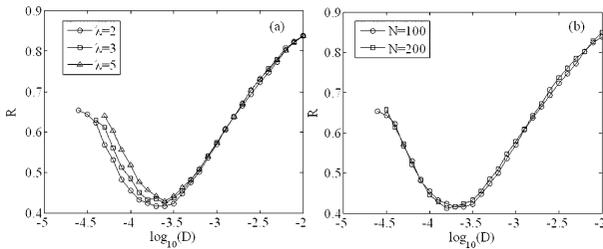


图6 相干共振系数  $R$  随噪声强度  $D$  的变化曲线:

(a) 新增节点的度数  $\lambda = 2, 3, 5$ ; (b) 网络规模  $N = 100, 200$

Fig. 6 Coherence resonance coefficient  $R$  versus noise intensity  $D$  for

(a) different degrees of each new added node,  $\lambda = 2, 3, 5$  and

(b) different network sizes,  $N = 100, 200$

网络动力学特性的影响. 研究发现噪声可以提高神经元的兴奋性, 降低其放电阈值, 使得神经网络由静息状态转变为放电状态, 并且在某一适中的噪声强度下, 神经元输出的峰电位序列的有序度达到最佳, 即出现相干共振现象. 基于这一现象, 本文进一步研究了模型参数和耦合强度对神经系统共振特性的影响. 结果表明, 模型参数越接近分岔值, 神经元的可兴奋性越强, 噪声刺激下系统输出的峰电位序列越有序, 系统在该参数点的相干共振性也就越好; 相反, 提高神经元之间的耦合强度将会导致系统的相干共振性越差, 甚至失去共振特性. 另外, 本文从无标度网络的本身特性出发, 对网络结构对系统相干共振特性的影响进行了分析. 结果发现新增节点度数的不同, 将会导致系统的相干共振性发生变化, 而网络的规模的改变对其几乎没有影响, 这将增强网络中神经信息传递的准确性.

## 参 考 文 献

- 1 王青云, 石霞, 陆启韶. 神经元耦合系统的同步动力学. 北京: 科学出版社, 2008 (Wang Q Y, Shi X, Lu Q S. Synchronization dynamics of coupled neural systems. Beijing: Science Press, 2008 (in Chinese))
- 2 Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance. *Journal of Physics A*, 1981, 14: 453 ~ 457
- 3 Levin J E, Miller J P. Stochastic resonance enhances neural encoding of broadband stimuli in the cricket cercal sensory system. *Nature*, 1996, 380: 165 ~ 168
- 4 Kitajo K, Yamanaka K, Ward L M, Yamamoto Y. Stochastic resonance in attention control. *Europhysics Letters*, 2006, 76(6): 1029 ~ 1035
- 5 Rimskaya-Korsakova L K. Stochastic resonance at the pe-

- riphery of auditory system: a simulation experiment. *Acoustical Physics*, 2004, 50(2): 201 ~ 211
- 6 Usher M, Feingold M. Stochastic resonance in the speed of memory retrieval. *Biological Cybernetics*, 2000, 83: 11 ~ 16
- 7 焦贤发, 王俊琦, 王如彬. 突触噪声作用下的 IF 阈值神经元模型的随机共振. *动力学与控制学报*, 2010, 8(3): 273 ~ 276 (Jiao J F, Wang J Q, Wang R B. Stochastic resonance of an integrate-and-fire neuron model with threshold driven by synaptic noise. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(3): 273 ~ 276 (in Chinese))
- 8 Gang H, Ditzinger T, Ning C. Stochastic resonance without external periodic force. *Physical Review Letter*, 1993, 71: 807 ~ 810
- 9 Pikovsky A S, Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system. *Physical Review Letters*, 1997, 78: 775 ~ 778
- 10 Longtin A. Autonomous stochastic resonance in bursting neurons. *Physical Review E*, 1997, 55: 868 ~ 878
- 11 Lee S G, Neiman A, Kim S. Coherence resonance in a Hodgkin-Huxley neuron. *Physical Review E*, 1998, 57: 3292 ~ 3297
- 12 王青云, 陆启韶. 噪声在慢系统中的随机 Chay 神经元模型的自共振. *动力学与控制学报*, 2004, 2(3): 85 ~ 89 (Wang Q Y, Lu Q S. Coherent resonance in the stochastic Chay neuron model in slow dynamics with white noise. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(3): 85 ~ 89 (in Chinese))
- 13 Barabasi A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, 286: 509 ~ 512
- 14 Barabasi A L, Albert R, Jelson H. Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web. *Physica A*, 2000, 281: 69 ~ 77
- 15 Pastor S R, Vespignani A. Epidemic spreading in scale-free networks. *Physical Review Letters*, 2001: 86: 3200 ~ 3202
- 16 Chialvo D R. Critical brain network. *Physica A*, 2004, 340: 756 ~ 765
- 17 Sporns O, Chialvo D R, Kaiser M, Hilgetag C C. Organization, development and function of complex brain networks. *Trends in Cognitive Sciences*, 2004, 8: 418 ~ 425
- 18 Heuvel M P, Stam C J, Boersma M, Hulshoff H E. Small-world and scale-free organization of voxel-based resting-state functional connectivity in the human brain. *Neuroimage*, 2008, 43: 528 ~ 539
- 19 Batista C A S, Batista A M, de Pontes J A C, Viana R

- L, Lopes S R. Chaotic phase synchronization in scale-free networks of bursting neurons. *Physical Review E*, 2007, 76, 016218
- 20 Stauffer D, Aharony A, da Fontoura C L, Adler J. Efficient Hopfield pattern recognition on a scale-free neural network. *The European Physical Journal B*, 2003, 32: 395 ~ 399
- 21 Perc M, Stochastic resonance on weakly paced scale-free networks. *Physical Review E*, 2008, 78: 036105
- 22 Gosak M, Korosak D, Marhl M. Optimal network configuration for maximal coherence resonance in excitable systems. *Physical Review E*, 2010, 81: 056104
- 23 Li X, Zhang J, Small M. Self-organization of a neural network with heterogeneous neurons enhances coherence and stochastic resonance. *Chaos*, 2009, 19: 013126
- 24 FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*, 1961, 1:445 ~ 466
- 25 Rulkov N F. Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map. *Physical Review E*, 2002, 65: 041922
- 26 Rulkov N F, Timofeev I, Bazhenov M. Oscillations in large-scale cortical networks; map-based model. *Journal of Computational Neuroscience*, 2004, 17: 203 ~ 223

## COHERENCE RESONANCE IN SCALE-FREE NEURAL NETWORKS \*

Yu Haitao Wang Jiang Jia Hongjun Deng Bin Wei Xile

(School of Electrical and Automation Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract** A scale-free neural network was constructed based on a two-dimensional map-based model. and Gaussian white noise was used to imitate the noisy environments of biological neural systems. The effect of noise on the dynamics of the network was studied by numerical simulation. It is found that adding the noise can enhance the neurons excitability, even induce spikes. When the noise intensity is appropriate, the regularity of spike series achieves the best, where coherence resonance happens. Moreover, simulation results indicate that the change of structure and parameters of the neural network has an important effect on the resonance characteristics.

**Key words** scale-free network, map-based neuron model, Gaussian white noise, coherence resonance