

# 两项激励下石墨环氧叠层板的组合共振特性研究

任建华 吕书锋

(燕山大学建工学院 066004)

**摘要** 对两项激励下石墨环氧叠层板的非线性特性进行了研究. 根据板的非线性运动方程, 应用伽辽金法得出了矩形叠层板在两项均布简谐激励力作用下的无量纲化达芬型非线性振动微分方程, 用多尺度法对层叠板组合共振微分方程求解, 得出发生组合共振的各种情形, 对组合共振的稳定性进行了分析, 得到稳态运动下的幅频响应方程. 代入有关参数, 分析了不同参数对系统共振的影响, 结果表明两项激励下层叠板表现出较复杂的动力学特性.

**关键词** 正交各向异性, 组合共振, 多尺度法, 达芬方程

## 引言

由于复合材料叠层板具有高比强、高比模、密度小、抗疲劳等优异性能, 且可以通过调整材料铺层数、材料几何参数和材料厚度来适应不同的应用条件, 已经成为一类重要的工程结构元件. 各向异性层叠板在外载荷作用下呈现几何非线性, 存在很多复杂的非线性动力学特性, 因此, 对其进行非线性动力学分析十分必要. Ye Min、Zhang Wei 等<sup>[1-3]</sup>对复合材料板参数共振的分岔问题进行了研究. Udar Ratnakar 等<sup>[4]</sup>研究了承受非均匀谐波边界载荷叠层板的组合共振特性; 杨绍普<sup>[5]</sup>毕勤胜<sup>[6]</sup>等讨论了多频激励 Duffing 系统的分岔和混沌等问题. 多项激励下的系统具有更复杂的动力学行为, 但是, 对这方面的研究文章还比较少. 本文选取石墨环氧复合材料制成的正交各向异性矩形叠层板作为研究对象, 对其在两项横向简谐激励作用下的组合共振及其稳定性问题进行了分析.

## 1 叠层板非线性振动微分方程

假设石墨环氧复合材料矩形板为各向异性正交叠层板, 边长  $a \times b$ , 厚度  $h$ , 四边简支, 材料主向与板轴一致, 根据板经典理论, 得到板的非线性运动方程为:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + p_y = 0 \quad (1b)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + p_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial w}{\partial t} \quad (1c)$$

几何非线性下其内力 - 应变的关系式为

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2b)$$

式中,  $A_{ij}$ 、 $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) 分别为拉伸和弯曲刚度<sup>[2]</sup>. 将满足边界条件的位移函数取为如下展开形式:

$$w = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (3)$$

将式(2)、式(3)代入式(1)中, 并采用伽辽金法进行积分, 可得到矩形板在两项均布简谐激励力  $p_z = p_1 \sin \omega_1 t + p_2 \sin \omega_2 t$  作用下的无量纲化达芬型非线性

性振动微分方程:

$$\ddot{g} + g = -\eta_1 \dot{g} - \eta_2 g^3 + \eta_2 (p_1 \sin \Omega_1 \tau + p_2 \sin \Omega_2 \tau) \quad (4)$$

式中:  $\eta_1 = \frac{\delta}{m\omega_0}$ ,  $\eta_2 = \frac{\gamma h^2}{\varepsilon \omega_0^2}$ ,  $\eta_3 = \frac{k}{h\omega_0^2}$ ,  $\tau = \omega_0 t$ ,  $\Omega_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}$ ,

$\Omega_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}$ ,  $k = \frac{16}{m\pi^2}$ ,  $m = \rho h$ ,  $\omega_0^2 = \frac{\pi}{ma^4} [D_{11} + \alpha^4 D_{22} +$

$2\alpha^2 (D_{12} + 2D_{66})]$ ,  $\gamma = \frac{\pi^4}{16ma^4} [\frac{3}{2} (A_{11} + A_{22} \alpha^4) +$

$(3A_{12} - 2A_{66}) \alpha^2]$ ,  $\alpha = \frac{a}{b}$ ,  $g = \frac{f}{h}$ ,  $\omega_1$  和  $\omega_2$  为激励频率,  $\varepsilon$  为引进的小参数,  $\dot{g}$ ,  $\ddot{g}$  分别表示  $g$  对  $t$  的一阶和二阶导数.

## 2 叠层叠板组合共振微分方程的求解

引入新自变量  $T_0 = \tau$ ,  $T_1 = \varepsilon \tau$ , 利用多尺度法对式(4)求解. 将方程(4)的近似解表达为以下形式:

$$g(\tau; \varepsilon) = g_0(T_0, T_1) + \varepsilon g_1(T_0, T_1) \quad (5)$$

可得到各阶近似的线性偏微分方程组

$$\varepsilon^0 = D_0^2 g_0 + g_0 = \eta_3 (p_1 \sin \Omega_1 t + p_2 \sin \Omega_2 t) \quad (6)$$

$$\varepsilon^1 = D_0^2 g_1 + g_1 = -2D_0 D_1 g_0 - \eta_1 D_0 g_0 - \eta_2 g_0^3 \quad (7)$$

式中,  $D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}$ ,  $D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1}$ ,  $D_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2}$ .

将零次近似方程(6)的通解写为复数形式:

$$g_0 = A(T_1) \exp(iT_0) + A_1 \exp(i\Omega_1 T_0) + A_2 \exp(i\Omega_2 T_0) + cc \quad (8)$$

这里,  $A_n = \frac{\eta_3}{2} p_n (1 - \Omega_n^2)^{-1}$ , ( $n = 1, 2$ ),  $i^2 = -1$ ,  $cc$

为前面项的共轭项. 将(8)代入方程(7)得:

$$\begin{aligned} D_0^2 g_1 + g_1 = & -[i(2A' + \eta_1 A) + 3\eta_2 A^2 \bar{A} + 6\eta_2 A A_2^2] \exp(iT_0) [i\Omega_2 \eta_1 + 3\eta_2 (2A \bar{A} + 2A_1^2 + A_2^2)] A_2 \exp(i\Omega_2 T_0) - \eta_2 A^3 \exp(3iT_0) - \\ & \eta_2 A_1^3 \exp(3i\Omega_1 T_0) - \eta_2 A_2^3 \exp(3i\Omega_2 T_0) - 3\eta_2 A^2 A_1 \exp[i(2 + \Omega_1) T_0] - 3\eta_2 A^2 A_2^2 \exp[i(2 + \Omega_2) T_0] - \\ & 3\eta_2 A^2 A_1 \exp[i(2 - \Omega_1) T_0] - 3\eta_2 A^2 A_2 \exp[i(2 - \Omega_2) T_0] - 3\eta_2 A A_1^2 \exp[i(1 + 2\Omega_1) T_0] - \\ & 3\eta_2 A A_2^2 \exp[i(1 + 2\Omega_2) T_0] - 3\eta_2 A A_1^2 \exp[i(1 - 2\Omega_1) T_0] - 3\eta_2 A A_2^2 \exp[i(1 - 2\Omega_2) T_0] - \\ & 6\eta_2 A A_1 A_2 \exp[i(1 + \Omega_1 + \Omega_2) T_0] - 6\eta_2 A A_1 A_2 \exp[i(1 - \Omega_1 - \Omega_2) T_0] - \\ & 6\eta_2 A A_1 A_2 \exp[i(1 - \Omega_1 + \Omega_2) T_0] - 6\eta_2 A A_1 A_2 \exp[i(1 + \Omega_1 - \Omega_2) T_0] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3\eta_2 A_1^2 A_2 \exp[i(2\Omega_1 + \Omega_2) T_0] - 3\eta_2 A_1^2 A_2 \exp[i(2\Omega_1 - \Omega_2) T_0] - \\ & 3\eta_2 A_1 A_2^2 \exp[i(\Omega_1 + 2\Omega_2) T_0] - 3\eta_2 A_1 A_2^2 \exp[i(2\Omega_2 - \Omega_1) T_0] + cc \quad (9) \end{aligned}$$

式中, “'”表示  $A$  对  $\tau$  的一阶导数. 可知, 在激励频率  $\Omega_2 > \Omega_1$  的情况下, 发生组合振的情形有:  $1 \approx \Omega_2 \pm 2\Omega_1$ ,  $1 \approx 2\Omega_2 \pm \Omega_1$ , 或  $2\Omega_1 - \Omega_2$ ,  $1 \approx \frac{1}{2}(\Omega_2 \pm \Omega_1)$ .

由于篇幅限制, 本文  $1 \approx \Omega_2 \pm 2\Omega_1$  情况下的组合共振进行分析, 其他情况类似. 为此, 引入调谐参数  $\sigma$ , 并令:  $1 \approx 2\Omega_2 + \Omega_1 - \varepsilon \sigma$  得到:

$$a' = -\frac{1}{2} \eta_1 a - \eta_2 \Gamma_2 \sin \gamma \quad (10)$$

$$a \gamma' = (\sigma - \eta_2 \Gamma_1) a - \frac{3}{8} \eta_2 a^3 - \eta_2 \Gamma_2 \cos \gamma \quad (11)$$

式中,  $\Gamma_1 = \frac{3}{4} \eta_3^2 [p_1^2 (1 - \Omega_1^2)^{-2} + p_2^2 (1 - \Omega_2^2)^{-2}]$ ,  $\Gamma_2 = \frac{3}{8} \eta_3^3 p_1 p_2^2 (1 - \Omega_1^2)^{-1} (1 - \Omega_2^2)^{-2}$ ,  $\gamma = \sigma T_1 - \beta$ .

对于稳态运动情况, 有  $a' = \gamma' = 0$ , 最终得到幅频响应方程:

$$[(\varepsilon \sigma - \eta_2' \Gamma_1 - \frac{3}{8} \eta_2' a^2)^2 + \frac{1}{4} \eta_2'^2] a^2 = \eta_2'^2 \Gamma_2^2 \quad (12)$$

式中,  $\eta_1' = \delta/m\omega_0$ ,  $\eta_2' = \gamma h^2/\omega_0^2$ .

## 3 叠层叠板组合共振的稳定性

$$\text{设, } a = a_0 + a_1, \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \quad (13)$$

$a_0, \gamma_0$  为稳态运动下的稳态解,  $a_1, \gamma_1$  为小的摄动量. 将式(13)代入式(10)(11)中, 对小的  $a_1$  和  $\gamma_1$  值进行泰勒展开, 并考虑到  $a_0$  和  $\gamma_0$  关于式(11)满足  $a' = \gamma' = 0$  的条件, 则在保留线性项的情况下可得如下关于  $a_1$  和  $\gamma_1$  的线性近似系统:

$$a_1' = -\frac{1}{2} \eta_1 a_1 - (\eta_2 \Gamma_2 \cos \gamma_0) \gamma_1 \quad (14a)$$

$$\gamma_1' = (\frac{\sigma - \eta_2 \Gamma_1}{a_0} - \frac{9\eta_2 a_0}{8}) a_1 + (\frac{\eta_2 \Gamma_2 \sin \gamma_0}{a_0}) \gamma_1 \quad (14b)$$

根据李雅普诺夫稳定性近似理论, 通过式(14)的雅可比矩阵形式可得到如下关于  $\lambda$  特征方程

$$\lambda^2 + c_1 \lambda + c_2 = 0 \quad (15)$$

式中,  $c_1 = \eta_1$ ,  $c_2 = \frac{\eta_1^2}{4} + (\sigma - \eta_2 \Gamma_1)^2 -$

$\frac{3(\sigma - \eta_2 \Gamma_1) \eta_2 a_0^2}{2} + \frac{27 \eta_2^2 a_0^4}{64}$ , 再根据 Routh - Hurwitz

判据, 得到  $\eta_1 > 0$  下稳态解稳定的充要条件为:

$$\frac{\eta_1^2}{4} + (\sigma - \eta_2 \Gamma_1)^2 - \frac{3(\sigma - \eta_2 \Gamma_1) \eta_2 a_0^2}{2} + \frac{27 \eta_2^2 a_0^4}{64} > 0 \quad (16)$$

重复上面的推导过程, 可以发现: 当两个激励频率的关系为  $1 \approx 2\Omega_2 - \Omega_1$  时, 得出的结果与  $1 \approx 2\Omega_2 + \Omega_1$  情况下是相同的.

### 4 石墨环氧叠层叠板共振特性分析

选取长为  $a = 0.3\text{m}$ , 宽为  $b = 0.2\text{m}$  的正交各向异性矩形叠层板 (三层铺设) 为研究对象, 材料取石墨环氧 T300 - 5208, 在给定参数下, 通过数值计算, 得到了下面反映组合共振特性的曲线图, 图 1 分别给出了不同调协参数和不同激励作用下的相图和频谱图, 两个激励频率的比值,  $\omega_2/\omega_1 \approx 1.2, \delta = 100\text{N} \cdot \text{s/m}$ . 在激励为  $P_1 = 500\text{N/m}^2, P_2 = 500\text{N/m}^2$ ,

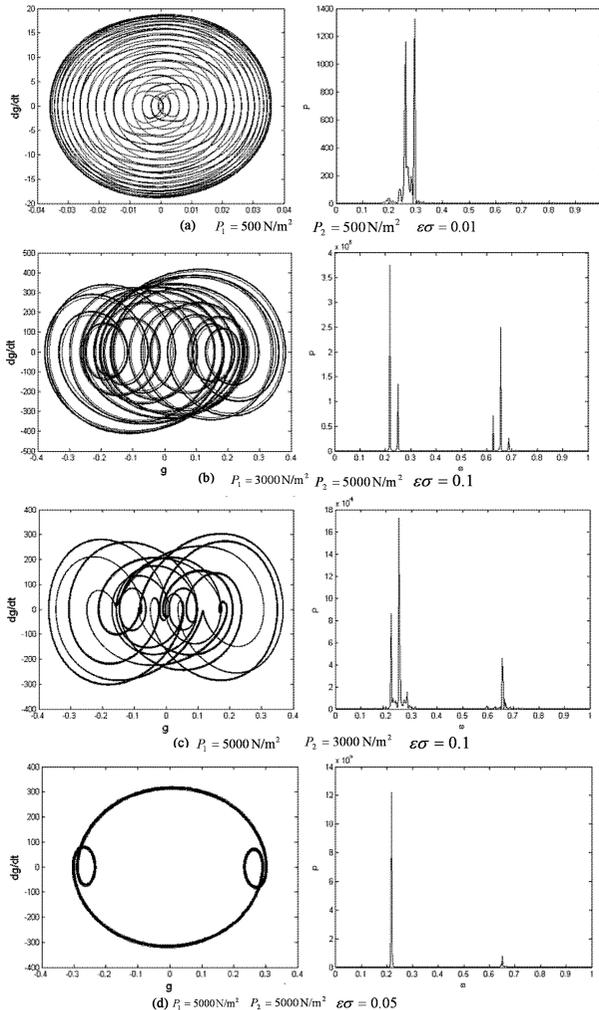


图 1 不同调协参数下的相图和频谱图

Fig. 1 The phase chart and spectrum plot of different detuning parameters

$\varepsilon\sigma = 0.01$  的情况下, 相图中的曲线呈现为有界环内的往复运动特征, 系统做概周期运动, 见图 1(a). 随着激励幅值的增大, 当  $P_1 = 3000\text{N/m}^2, P_2 = 5000\text{N/m}^2, \varepsilon\sigma = 0.1$ , 和  $P_1 = 5000\text{N/m}^2, P_2 = 3000\text{N/m}^2, \varepsilon\sigma = 0.1$  时, 系统已由概周期运动变为复杂的多倍周期运动 (图 1b、c). 当  $P_1 = 5000\text{N/m}^2, P_2 = 5000\text{N/m}^2, \varepsilon\sigma = 0.05$  时, 相图表现为典型的三环相套特征, 系统做稳定的倍周期运动 (图 1d). 当  $P_1 = 8000\text{N/m}^2, P_2 = 8000\text{N/m}^2, \omega\sigma = 0.15$  时 (1f), 系统的运动形式变得越来越复杂, 频谱图已经开始出现连续, 表现出混沌运动的特征, 系统由倍周期运动诱发混沌振动.

图 2 给出了正交各向异性叠层板在不同参数影响下的幅频曲线图. 由图可见, 当激励频率接近固有频率时系统的幅值急剧增大, 呈现出硬特性, 而且存在多值和跳跃现象. 由图 a 可以看出, 随着板厚度的减小, 共振区域将逐渐变宽, 并且伴随有跳跃现象. 而对应相同的频率, 且共振都被激发的条件下, 稳定解的数值随板厚度的减小有增有减. 随着线性阻尼系数的增大 (图 b), 共振区域逐渐变窄, 而对应相同的频率, 且共振都被激发的条件下, 稳定解的数值随阻尼系数的增大有所下降. 图 c 是在激励幅值  $P_1$  固定的情况下, 观察  $P_2$  的改变对系统稳定性的影响. 可以看出, 随着  $P_2$  的增加, 共振区域将逐渐变宽. 图 d 是通过改变  $P_1$  的值, 观察  $P_1$  对系统振动特性的影响, 可以看出, 在增加  $P_1$

的情况下,系统的振动特性与改变  $P_2$  的情况类似. 图 e 反映了在其它条件相同的情况下,叠层板层数的变化对振幅的影响,由图可见,当频率调节参数小于某一值  $s$  时,层数的增加不一定能减小系统的振动幅值.

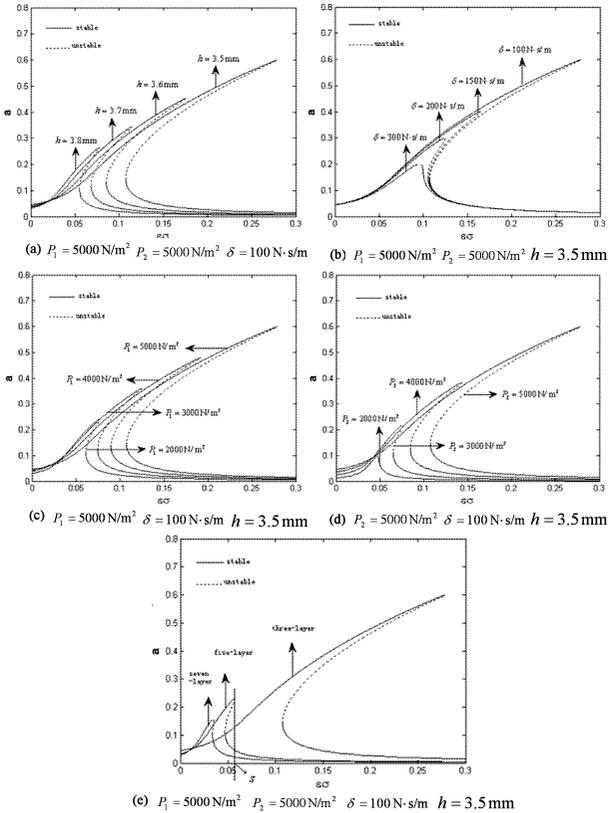


图2 振幅 - 调谐参数曲线图

Fig. 2 Amplitude - detuning parameter curves

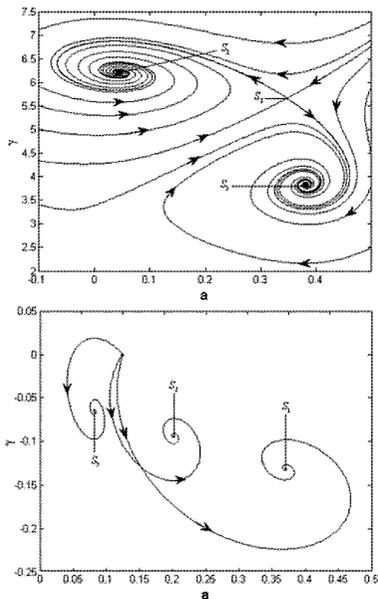


图3 动相平面相轨迹图

Fig. 3 Phase trajectories in moving phase plane

与图 2 对应, 图 3 绘制了相应的动相平面的相轨迹图, 图 3(a) 描述的是其它条件相同的情况下, 通过改变初始位置而得到的相轨迹, 对应于图 2(b) 中  $\delta = 100 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$ ,  $\epsilon\sigma = 0.15$  的情况, 呈现的三个奇点中,  $S_1 (a = 0.04)$  和  $S_3 (a = 0.38)$  为稳定焦点,  $S_2 (a = 0.35)$  为鞍点. 图 3(b) 对应图 2(a), 它反映了当其他条件不变而改变板厚的时候, 系统稳定位置的改变情况, 初始位置  $a = 0.02$ ,  $\gamma = 0$ . 对应的三个奇点中,  $S_1 (h = 3.6 \text{ mm})$ ,  $S_2 (h = 3.7 \text{ mm})$  和  $S_3 (h = 3.8 \text{ mm})$  均为稳定焦点, 这说明即使从相同的位置出发, 系统也会伴随某一参数的改变而处于不同的稳定状态. 两幅图形都能与幅频图很好的吻合, 同时都能够体现出过鞍点的分隔线为边界所划分的奇点  $S_1$  和  $S_3$  的吸引域(图 a).

### 5 结论

通过对两项激励下石墨环氧叠层板组合共振问题的分析, 得到了共振激发时的幅频方程和共振解的稳定性条件, 讨论了激励频率和幅值等参数的选取均对板的共振现象的激发和振动形式均有不同程度的影响, 随着参数进一步的改变, 将发生发生动态分岔, 同时出现不稳定解, 系统表现为复杂的动力学行为.

### 参 考 文 献

- 1 Ye Min, Lu Jing, Zhang Wei. Local and global nonlinear dynamics of a parametrically excited rectangular symmetric cross-ply laminated composite plate. *Solitons and Fractals*, 2005, 26(1): 195 ~ 213
- 2 Zhang Wei. Global and chaotic dynamics for a parametrically excited thin plate. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 239(5): 1013 ~ 1036
- 3 吕书锋, 胡宇达. 正交各相异性叠层板的非线性主共振分析. *动力学与控制学报*, 2009, 7(1): 35 ~ 38 (Lu Shufeng, Hu Yuda. Nonlinear principal resonance of orthotropic laminated plates. *Journal of Dynamic and Control*, 2009, 7(1): 35 ~ 38 (in Chinese))
- 4 Udar Ratnakar S, Datta P K. Combination resonance characteristics of laminated composite plates subjected to non-uniform harmonic edge loading. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 2006, 78(2): 107 ~ 119
- 5 杨绍普, 袁向容, 陈恩利. 多频激励后非线性系统的组合

共振分叉与奇异性. 非线性动力学学报, 1998, 5(3): 223 ~ 229 (Yang Shaopu, Yuan Xiangrong, Chen Enli. Combination Resonance bifurcation and singularity in a hysteretic Nonlinear system with multi-frequency excitations. *Journal of Nonlinear Dynamics in Science and Technology*, 1998, 5(3): 223 ~ 229 (in Chinese))

6 毕勤胜, 陈予恕, 吴志强. 多频激励 Duffing 系统的分岔和混沌. 应用数学和力学, 1998, 19(2): 113 ~ 120 (Bi Qinsheng, Chen Yushu, Wu Zhiqiang. Bifurcation in a nonlinear Duffing system with multi-frequency external periodic forces. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1998, 19(2): 113 ~ 120 (in Chinese))

## STUDY ON COMBINATION RESONANCES OF A SIMPLY SUPPORTED RECTANGULAR GRAPHITE-EXPOXY LAMINATED PLATE EXCITED BY TWO-TERM HARMONIC FORCES

Ren Jianhua Lv shufeng

(College of Civil Engineering & Mechanics YanShan university, Qinhuangdao 066004, China)

**Abstract** This paper studied the nonlinearity properties of a simply supported rectangular graphite-epoxy laminated plate, excited by two-term harmonic forces. The non-dimensional Duffing nonlinear forced vibration equation was deduced by using Galerkin method from the vibration differential equation. The amplitude frequency response equation of the system steady motion under combination resonance was obtained by the method of multiple scales. Based on Lyapunov stable theory, the critical conditions of steady-state solutions stability were obtained. By examples, the influence of different parameters on nonlinear combination resonances properties of system was analyzed. Finally the conclusion of graphite-epoxy laminated plate's nonlinearity properties excited by two-term forces were presented.

**Key words** orthotropic, combination resonance, multi-scale method, Duffing equation