

汽车操纵稳定性稳态响应参数的单位与量纲

高举成¹ 张兆合¹ 杨昌明²

(1. 哈尔滨工业大学汽车工程学院, 威海 264209) (2. 解放军汽车管理学院运输指挥系, 蚌埠 233011)

摘要 针对表征汽车操纵稳定性状态的稳定性因数等参数的单位规定比较混乱的现状, 根据角度物理量有单位但无量纲的特点, 在轮胎侧偏刚度取两种不同单位的情况下, 对汽车转向稳态响应的稳定性因数及稳态横摆角速度增益等重要参数的单位及量纲进行了全面分析.

关键词 汽车操纵稳定性, 稳定性因数, 稳态横摆角速度, 单位与量纲

引言

汽车操纵稳定性是关乎汽车行驶安全的一项重要性能. 但目前传统的汽车操纵稳定性基本理论, 是以一个不太严密的线性二自由度汽车模型为基础, 在许多假定、忽略或简化的前提下推导的^[1]. 对此, 作者的前期文献[2, 3]讨论了这些不足, 并建立了一个比较严密、具有广泛适用性的广义汽车转向稳态响应模型, 且在假定轮胎侧偏力与侧偏角成线性关系、轮胎侧偏刚度均取正值的情况下, 获得了汽车等速圆周行驶时的稳态横摆角速度增益(转向灵敏度)的表达式:

$$\frac{\omega_r}{\delta} = \frac{u/l}{1 + \frac{M}{l^2} \left(\frac{l_2}{k_1} - \frac{l_1}{k_2} \right) u^2} = \frac{1}{1 + Ku^2} \cdot \frac{u}{l} \quad (1)$$

上式中 K 称为稳定性因数, 其表达式为:

$$K = \frac{M}{l^2} \left(\frac{l_2}{k_1} - \frac{l_1}{k_2} \right) \quad (2)$$

式中: M —整车质量, kg;

k_1 —前轮侧偏刚度, N/rad 或 N/(°);

k_2 —后轮侧偏刚度, N/rad 或 N/(°);

l_1 —质心距前轴距离, m;

l_2 —质心距后轴距离, m;

l —车辆轴距, m;

u —车辆纵向速度, m/s

δ —前轮转角, rad 或 (°)

关于稳定性因数 K , 不同的文献资料规定有不同的单位, 如在参考文献[1]中, 规定稳定性因数 K

的单位为 s^2/m^2 ; 而在参考文献[4]中, 规定 K 的单位为 $\text{rad}/(\text{m}/s^2)$, 且强调“工程中经常用 (°)/g 表示(其中 g 指重力加速度)”. 其它稳态响应参数的单位规定也比较混乱, 如横摆角速度 ω_r 的单位取为 $(^\circ)s^{-1}$, 横摆角速度增益 ω_r/δ 的单位取为 s^{-1} . 那么, 现在的问题是, 稳定性因数 K 等参数的正确单位究竟是什么? 特别地, 轮胎侧偏刚度 k_1, k_2 规定有两种不同单位 N/rad 或 N/(°), 在质量和长度的单位和量纲一定的情况下, k_1, k_2 取两种不同的单位时, 如何根据上式(1)、(2)确定汽车操纵稳定性稳态响应参数的单位与量纲呢?

1 稳定性因数的单位及量纲分析

由于轮胎侧偏刚度 k_1, k_2 规定有两种不同单位 N/rad 或 N/(°), 下面分别就轮胎侧偏刚度 k_1, k_2 取两种不同单位时, 推导稳定性因数 K 的单位.

在质量和长度的单位取国际单位制(SI)基本单位的情况下, 当轮胎侧偏刚度 k_1, k_2 的单位取 N/rad 时, 根据 GB3101-93 之规定^[5], 假设用 $[K]$ 表示稳定性因数 K 的单位, $[M], [l], [l_1], [l_2], [k_1], [k_2]$ 分别表示整车质量、车辆轴距、车辆质心距前后轴距离、前后轮侧偏刚度等物理量的单位, 则由(2)式所表示的稳定性因数 K 的单位方程式推导如下:

$$[K] = \frac{[M]}{[l]^2} \left(\frac{[l_2]}{[k_1]} - \frac{[l_1]}{[k_2]} \right) = \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \left(\frac{\text{m}}{\text{N/rad}} - \frac{\text{m}}{\text{N/rad}} \right) = \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{N}} =$$

$$\frac{\text{kg}}{\text{m}} \frac{\text{rad}}{\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2} = \text{rad} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2 \quad (3)$$

而当轮胎侧偏刚度 k_1, k_2 的单位取 $\text{N}/(^{\circ})$ 时, 稳定性因数 K 的单位方程式推导如下:

$$[K] = \frac{[M]}{[l]^2} \left(\frac{[l_2]}{[k_1]} - \frac{[l_1]}{[k_2]} \right) = \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \left(\frac{\text{m}}{\text{N}/(^{\circ})} - \frac{\text{m}}{\text{N}/(^{\circ})} \right) = \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot \frac{(^{\circ})}{\text{N}} = \frac{\text{kg}}{\text{m}} \frac{(^{\circ})}{\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2} = (^{\circ}) \cdot \text{s}^2/\text{m}^2 \quad (4)$$

由此可见, 无论轮胎侧偏刚度 k_1, k_2 的单位取 N/rad 还是 $\text{N}/(^{\circ})$, 稳定性因数 K 的单位都不是 s^2/m^2 , 也不是 $\text{rad}/(\text{m}/\text{s}^2)$ 或 $(^{\circ})/\text{g}$, 而分别是 $\text{rad} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$ 或 $(^{\circ}) \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$. 二者之间的换算关系是:

$$1(^{\circ}) \cdot \text{s}^2/\text{m}^2 = \frac{\pi}{180} \text{rad} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2 \quad (5)$$

但是, 根据 GB3101-93 之规定, 物理量的单位与量纲是不能混淆的两个概念, 单位用来确定量的大小, 而量纲只是表示量的属性. 有的物理量本身有单位, 但却没有量纲, 这种量称为无量纲量或称为量纲一的数量. 如对于平面角和立体角, 就属于本身有单位但是却没有量纲的物理量, 其单位弧度 (rad) 和球面度 (sr) 属于国际单位制 (SI) 的无量纲导出单位, 其一贯制单位是数字 1. 因此, 对于平面角的单位取 rad 或 1 是一致的, 但针对实际情况, 用专用单位 rad 还是比较合适和方便的.

因此, 当稳定性因数 K 的单位取 $\text{rad} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$ 时, 也可以简单表示为 s^2/m^2 , 但取为 $\text{rad} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$ 比取为 s^2/m^2 更规范, 也更便于理解. 而无论以 $\text{rad} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$ 为单位或以 s^2/m^2 为单位, 其量纲却是一致的. 根据 GB3101-93, 若取时间的量纲 $\text{dim}t = T$, 长度的量纲 $\text{dim}l = L$, 则无论以 $\text{rad} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$ 或 s^2/m^2 为单位, 稳定性因数 K 的量纲为:

$$\text{dim}K = T^2 L^{-2} \quad (6)$$

而稳定性因数 K 若按参考文献[4]以 $\text{rad}/(\text{m}/\text{s}^2)$ 或 $(^{\circ})/\text{g}$ 为单位, 其量纲为:

$$\text{dim}K = T^2 L^{-1} \quad (7)$$

显然(7)式与(6)式不符, 通过量纲检查, 稳定性因数 K 不可能以 $\text{rad}/(\text{m}/\text{s}^2)$ 或 $(^{\circ})/\text{g}$ 为单位.

2 横摆角速度增益 ω_r/δ 的单位及量纲分析

在分析横摆角速度增益 ω_r/δ 的单位及量纲之

前, 首先要弄清楚表达式(1)中分母 $1 + Ku^2$ 的性质以及横摆角速度 ω_r 的单位及量纲.

通过上面的分析不难看出, 如果单独按表达式(2)讨论稳定性因数 K 的单位和量纲, 或仅仅根据稳定性因数 K 评判车辆的稳态响应状况, 则(2)式中轮胎侧偏刚度 k_1, k_2 的单位既可以取 N/rad , 也可以取 $\text{N}/(^{\circ})$, 最终获得以 $\text{rad} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$ 或以 $(^{\circ}) \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$ 为单位的稳定性因数 K 的值.

但是, 在横摆角速度增益的表达式(1)中, 轮胎侧偏刚度 k_1, k_2 单位的选取是有条件的. 从广义汽车转向稳态响应模型的推导过程中^[2] 不难看出, 由于推导时轮胎侧偏角及其它各种角度均以弧度 (rad) 为单位, 所以表达式(1)中轮胎侧偏刚度 k_1, k_2 的单位只能选取 N/rad , 这样稳定性因数 K 的单位最终是 $\text{rad} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$. 而且也只有当 K 的单位取 $\text{rad} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$ 时, 在车速 u 的单位取 m/s 的情况下, Ku^2 的单位变为 rad , 按照 GB3101-93 之规定此时 Ku^2 变为无量纲或量纲为一的数量, 而量纲为一的数量本质上为数, 才可以与常数 1 进行加减运算, 此时 $1 + Ku^2$ 才有实际意义, 也就是说此时 $1 + Ku^2$ 变为一数字因数.

而当 K 的单位取 $(^{\circ}) \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$ 时, Ku^2 的单位变为 $(^{\circ})$, 根据 GB3101-93 标准, $(^{\circ})$ 虽是与国际单位制 (SI) 并用的我国法定计量单位, 但并不是国际单位制 (SI) 所规定的无量纲导出单位, 也就是说此时 Ku^2 不是无量纲或量纲为一的数量, 不能与常数 1 进行加减运算, 或者说此时 $1 + Ku^2$ 没有实际意义.

总之, 在使用横摆角速度增益的表达式(1)时, 在车速 u 的单位取 m/s 的情况下, 无论轮胎侧偏刚度 k_1, k_2 取何单位, 都要经过单位换算保证 Ku^2 的单位为 rad , 也就是说最终使 $1 + Ku^2$ 变为数字因数.

再来分析横摆角速度 ω_r 的单位与量纲. 根据(1)式, 横摆角速度 ω_r 的表达式可表示为:

$$\omega_r = \frac{\delta u/l}{1 + Ku^2} = \frac{1}{1 + Ku^2} \cdot \frac{\delta u}{l} \quad (8)$$

假定前轮转角 δ 以弧度 (rad) 为单位, 所以当 u, l 分别取法定计量单位 $\text{m}/\text{s}, \text{m}$ 时, 在如前所述 $1 + Ku^2$ 是一数字因数的情况下, 最终由式(8)所表示的横摆角速度 ω_r 的单位应是 rad/s . 而当前轮转角 δ 以度 ($(^{\circ})$) 为单位时, 也要保证在 $1 + Ku^2$ 是

一数字因数的情况下,由(8)式计算横摆角速度 ω_r ,此时其结果的单位为 $(^\circ)/s$.

ω_r 本质上是角速度,而角速度的单位有多种表达形式,如有SI单位,也有与SI单位并用的我国法定计量单位,还有非法定计量单位.根据GB3101-93中有关SI单位、法定计量单位和非法定计量单位的规定及其换算关系,稳态横摆角速度 ω_r 的单位及其量纲可归纳如表1所示.

表1 稳态横摆角速度 ω_r 的单位及其量纲

Table 1 The units and dimension of steady-state yaw velocity ω_r

The units of ω_r	The relationship of different units	The dimension of ω_r
s^{-1}	
rad/s	$1\text{rad/s} = (1/2\pi)\text{s}^{-1}$	
r/min	$1\text{r/min} = (\pi/30)\text{rad/s}$	T^{-1}
$(^\circ)/s$	$1(^\circ)/s = (\pi/180)\text{rad/s}$	

从表中可以看出,作为横摆角速度共有四种单位,其中第一、二个单位为SI的导出单位,第三个单位为与SI单位并用的我国法定计量单位,第四个单位为非法定计量单位.但无论采用何种单位,横摆角速度 ω_r 的量纲是一样的,都为 T^{-1} .特别需要注意的是,尽管如前所述对于平面角的单位取rad或1是一致的,但不能据此误认为表中第一、二个单位为同一个单位,因为根据GB3100-93^[6],角速度单位 s^{-1} 本质上代表“转每秒(r/s)”,而不是rad/s的简化.

在讨论汽车操纵稳定性的稳态响应状况时,稳态横摆角速度 ω_r 的单位常选取表1中的第二个和第四个单位,由(8)式可得 rad/s 为单位或以 $(^\circ)/s$ 为单位的横摆角速度 ω_r 值,再根据需要进行换算.

最后再来讨论稳态横摆角速度增益 ω_r/δ 的单位及量纲问题.首先要注意,不能直接从表达式(1)的右边来简单推导稳态横摆角速度增益 ω_r/δ 的单位,因为在如前所述 $1 + Ku^2$ 为数字因数,u和l分别取法定计量单位m/s、m的情况下,由表达式(1)的右边推导 ω_r/δ 的单位变为 s^{-1} ,而如前所述 s^{-1} 这一单位本质上代表“转每秒(r/s)”,它掩盖了稳态横摆角速度增益 ω_r/δ 的物理意义本质.而本质上稳态横摆角速度增益 ω_r/δ 代表车辆等速圆周行驶时单位前轮转角所产生的稳态横摆角速度,显然单位 $s^{-1}(r/s)$ 不能涵盖这一物理意义本质.

实际上,从(1)式的左边不难看出,当 ω_r 的单位取 rad/s 、 δ 的单位取 rad 时,则最终 ω_r/δ 的单位应表示为 $(\text{rad/s})/\text{rad}$,这一单位本身就很好地体现了稳态横摆角速度增益 ω_r/δ 作为单位前轮转角所产生的稳态横摆角速度的物理意义本质. ω_r/δ 的单位也可以是 $(^\circ)/s/(\text{rad})$,且根据弧度与角度的变换关系, ω_r/δ 以 $(\text{rad/s})/\text{rad}$ 为单位与以 $(^\circ)/s/(\text{rad})$ 为单位在数值上是相等的.另外,考虑到角度的无量纲性, ω_r/δ 的量纲与 ω_r 的量纲应该是一样的,都为 T^{-1} .

3 例子

下面通过一个例子来说明汽车转向稳态响应参数单位的选择与确定方法.

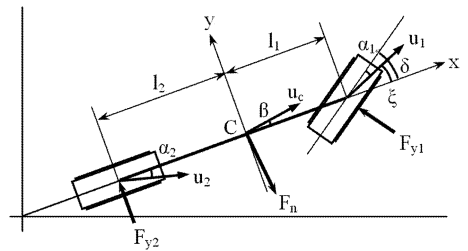


图1 汽车稳态转向运动模型

Fig. 1 the steady-state steering vehicle model

图1所示为汽车稳态转向运动模型,图中 F_n 为车辆质心处离心惯性力, F_{y1} 和 F_{y2} 为前后车轮所受的侧向力即侧偏力, α_1 和 α_2 分别为前后轮胎的侧偏角, δ 为前轮转角, u_1 、 u_2 分别为汽车等速圆周行驶时前后轴中点的速度, u_c 为汽车质心C点的速度,各速度间的关系满足速度投影定理:

$$u_1 \cos \xi = u_c \cos \beta = u_2 \cos \alpha_2 = u \tag{9}$$

其中 u 为车辆纵轴线上瞬时转向中心垂直投影点的速度.忽略车轮滚动阻力,建立动力学方程如下:

$$F_n \cos \beta - F_{y1} \cos \delta - F_{y2} = 0 \tag{10}$$

$$F_{y1} \cos \delta l_1 - F_{y2} l_2 = 0 \tag{11}$$

式中车辆等速圆周行驶时的离心惯性力为:

$$F_n = \frac{Mu^2}{l} \frac{\tan \alpha_2 + \tan(\delta - \alpha_1)}{\cos \beta} \tag{12}$$

假定车辆前后轮侧偏力与侧偏角成线性关系,将其代入以上各式,各三角函数均取其幂级数展开式第一项,求解上述动力学方程即得汽车转向稳态响应的稳定性因数 K 和横摆角速度增益 ω_r/δ 的表

达式,如(2)式和(1)式所示.

本例中选取车辆参数为: $2M = 1818.2\text{kg}$, $l_1 = 1.463\text{m}$, $l_2 = 1.585\text{m}$, $2k_1 = 62618\text{N/rad}$ 或 $1092.3\text{N}/(^{\circ})$, $2k_2 = 110185\text{N/rad}$ 或 $1922.1\text{N}/(^{\circ})$.

当轮胎侧偏刚度 k_1 、 k_2 的单位取 N/rad 时,由(2)式计算得稳定性因数 K 的值为:

$$K = 0.002355\text{rad} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$$

而当轮胎侧偏刚度 k_1 、 k_2 的单位取 $\text{N}/(^{\circ})$ 时,由(2)式计算得稳定性因数 K 的值为:

$$K = 0.135(^{\circ}) \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$$

显而易见上述两结果之间满足(5)式给定的换算关系.另外由此可知,该车辆具有不足转向特性.

再来看横摆角速度增益 ω_r/δ 的计算结果及其单位的确定.假定取速度 $u = 20\text{m/s}$,前轮转角 $\delta = 10(^{\circ})$ (即 $\delta = 0.1744\text{rad}$),在前轮转角分别取两种不同单位且保证 $1 + Ku^2$ 是一数字因数的情况下,由(8)计算得稳态横摆角速度 ω_r 的值为:

$$\omega_r = 0.589\text{rad/s} \text{ (或 } \omega_r = 33.78(^{\circ})/\text{s})$$

由(1)式或直接按 ω_r/δ 计算得横摆角速度增益的结果为:

$$\omega_r/\delta = 3.378(\text{rad/s})/\text{rad}$$

当然如前所述 ω_r/δ 的结果也可以表示为:

$$\omega_r/\delta = 3.378(^{\circ})/\text{s}/(^{\circ})$$

下面简单分析 ω_r/δ 的单位不能理解或表示为 s^{-1} 而应表示为 $(\text{rad/s})/\text{rad}$ 或 $(^{\circ})/\text{s}/(^{\circ})$ 的原因.如上所述本例所选车辆具有不足转向特性,且考虑到角 β 很小,则根据图1由动力学方程的求解结果可得该车辆在 $u = 20\text{m/s}$ 、 $\delta = 10(^{\circ})$ 的前提下作等速圆周运动的转向半径约为:

$$R \approx \frac{u}{\omega_r} = 33.96(\text{m})$$

因此,若把上述计算结果 $\omega_r/\delta = 3.378$ 的单位理解为 s^{-1} 即 r/s (转每秒),则相当于本例的不足转向车辆在 $R = 33.96\text{m}$ 的圆周上作等速圆周行驶时,转向轮每弧度或每度的转角导致车辆每秒回转 3.378 转,这是不可能的,也是人们无法接受的.

相反,若把上述计算结果 $\omega_r/\delta = 3.378$ 的单位确定为 $(\text{rad/s})/\text{rad}$ 或 $(^{\circ})/\text{s}/(^{\circ})$,则相当于转向轮每弧度的转角,导致车辆产生 3.378rad/s 的回转角速度,或相当于转向轮每度的转角,导致车辆产生 $3.378(^{\circ})/\text{s}$ 的回转角速度,这是可能的,也是人们可以接受的.因此稳态横摆角速度增益 ω_r/δ

的单位不能理解或表示为 s^{-1} 而应表示为 $(\text{rad/s})/\text{rad}$ 或 $(^{\circ})/\text{s}/(^{\circ})$.

4 结论

(1)以角度单位的无量纲性为基础,对汽车转向稳态响应参数稳定性因数 K 的单位与量纲进行了具体分析,发现无论轮胎侧偏刚度 k_1 、 k_2 的单位取 N/rad 还是 $\text{N}/(^{\circ})$,稳定性因数 K 的单位都不是 s^2/m^2 ,也不是 $\text{rad}/(\text{m}/\text{s}^2)$ 或 $(^{\circ})/\text{g}$,而应该分别是 $\text{rad} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$ 或 $(^{\circ}) \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$.

(2)在使用汽车转向稳态响应的横摆角速度及横摆角速度增益表达式进行计算时,在车速 u 的单位取 m/s 、轴距 l 的单位取 m 的情况下,无论轮胎侧偏刚度 k_1 、 k_2 取何单位,都要经过单位换算保证 Ku^2 的单位为 rad ,也就是说最终使 $1 + Ku^2$ 变为数字因数.

(3)根据横摆角速度 ω_r 的表达式,按照前轮转角 δ 以弧度 (rad) 或度 ($(^{\circ})$) 为单位的不同,可以得到以 rad/s 或 $(^{\circ})/\text{s}$ 为单位的两种计算结果;而对于稳态横摆角速度增益 ω_r/δ ,从体现其本质物理意义的角度出发,应以 $(\text{rad/s})/\text{rad}$ 或 $(^{\circ})/\text{s}/(^{\circ})$ 为单位,且两者在数值上是相等的.另外,根据 GB3100-93 之规定,结合实例分析了稳态横摆角速度增益 ω_r/δ 的单位不能理解或表示为 s^{-1} 的原因.

参 考 文 献

- 1 余志生. 汽车理论. 北京:机械工业出版社,2002 (Yu Z S. Automobile theory. Beijing: China Machine Press, 2002 (in Chinese))
- 2 高举成,张兆合等. 汽车操纵稳定性的广义汽车转向稳态响应模型. 公路交通科技,2005,22(6):147~150 (Gao J C, Zhang Z H, et al. A generalized model for vehicle steering state response of control stability performance. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2005,22(6):147~150 (in Chinese))
- 3 杨昌明,高举成,张兆合. 汽车稳态转向动力学分析及稳态响应特性判别. 动力学与控制学报,2010,8(2):188~192 (Yang C M, Gao J C, Zhang Z H. Dynamics of automobile steady steering and discrimination of steady steering characteristics. *Journal of Dynamics and Control*, 2010,8(2):188~192 (in Chinese))

- 4 Dave Crolla, 喻凡. 车辆动力学及其控制. 北京:人民交通出版社, 2004 (Crolla D A, Yu F. Vehicle dynamics and control. Beijing: China Communications Press, 2004 (in Chinese))
- 5 中华人民共和国国家标准. GB3101-93. 有关量、单位和符号的一般原理. (The People's Republic of China National Standard. GB3101 ~ 93. Quantities and units-general principles (in Chinese))
- 6 中华人民共和国国家标准. GB3100-93. 国际单位制及其应用. (The People's Republic of China National Standard. GB3100-93. SI units and recommendations for the use of their multiples and of certain other units (in Chinese))

UNIT AND DIMENSION OF STEADY-STATE RESPONSE PARAMETER ABOUT VEHICLE HANDLING STABILITY

Gao Jucheng¹ Zhang Zhaohe¹ Yang Changming²

(1. School of Automotive Engineering, Harbin Institute of Technology at Weihai, Weihai 264209, China)

(2. Military Academy of Automotive Management, Bengbu 233011, China)

Abstract In the description of vehicle handling stability, there are some confusion about the units of stability factors. Because the angle parameter has unit but it is no-dimension, the units and dimensions of some parameters, such as stability factor and steady-state yaw velocity gain, were all analyzed in the case of using two units to describe the tire cornering stiffness.

Key words vehicle handling stability, stability factor, steady-state yaw velocity, unit and dimension