

弹性支撑梁在移动荷载作用下的响应分析*

钱长照 李寅磊 刘扬

(长沙理工大学土木与建筑学院,长沙 410076)

摘要 考虑弹性支撑刚度对弹性支撑梁固有频率及模态的影响,比较前二阶频率受弹性支撑刚度影响的规律及大小.选取二阶模态,利用模态叠加原理,研究弹性支撑梁在移动荷载和移动车辆作用下的动力响应.研究中,一阶模态考虑为简支梁一阶模态与弹性支撑梁的刚体平动相叠加,二阶模态考虑为简支梁二阶模态与弹性支撑梁的刚体转动相叠加.研究表明:考虑二阶模态所得结果与仅取一阶模态所得结果相差较大,相差大小受弹性支撑刚度决定,特别是当移动车辆考虑为弹簧质量系统时,耦合振动响应受刚体转动模态影响明显,耦合作用力也存在较大的差异.

关键词 弹性支撑, 移动荷载, 耦合振动

引言

车桥系统振动是一个古老而又复杂难解的课题,其振动机理在桥梁设计、维护和控制中起着重要的作用.早在100多年前,英国铁路桥梁在列车通过时发生强烈振动而破坏.自此,移动荷载问题引起了各国学者的关注与广泛性研究^[1-2].目前,已有大量关于移动荷载下桥梁振动的理论研究、数值研究和实验分析^[3-5],但仍然没有清楚桥梁振动的所有特征.由于同时考虑移动车辆和桥梁荷载两者质量的振动微分方程带有时变系数,给方程的求解带来了很大的困难,以往的研究中采用过许多不同的车辆模型来对问题进行求解.为了揭示不同车辆模型对研究车桥耦合问题的影响,文献[6]对采用3种不同车辆模型:移动质量、四分之一车模型和二分之一车模型的车桥耦合问题进行对比分析,从反映整体规律方面考察各个模型的适用性,再比较各种模型的区别.

目前,弹性支撑梁在移动荷载作用下的问题很少有人研究,而考虑高墩及软土地基的铁路基础,模拟弹性支撑边界条件是必要的.事实上,弹性支撑由于边界条件的不同,有着与简支梁不同特点的动力特性^[7-13].文献[7-8]将车辆荷载简化为移动常力,取梁的一阶模态,利用模态叠加法研究了弹性支撑梁的动力响应.研究表明,当弹性支撑的

刚度与梁抗弯刚度比值在一定范围时,弹性支撑对梁的稳态振动产生相当明显的影响.由于桥梁两端为弹性支撑,梁的振动模态不仅要包含竖向刚体振动,还存在刚体转动.文献[7-8]因为采取一阶模态分析,仅考虑了梁的弯曲振动及竖向刚体振动.事实上,在车辆行驶过程中,桥梁振动是非对称的,由于计算中仅选取了一阶模态,结果无法显示梁的非对称振动形式.因此,本文取梁的二阶模态,利用模态叠加原理,分析弹性支撑梁在移动车辆作用下的动力响应.当车辆考虑为弹簧质量系统时,进一步分析了桥梁对车辆振动的影响,并与取一阶模态所计算的结果相比较.

1 运动方程

图1所示边界由刚度 K 的弹簧支撑的弹性支撑梁,长度为 L ,单位长度质量为 m ,抗弯刚度为 EI ,由均质各向同性材料做成,采用伯努利-欧拉梁模型,不考虑剪切变形和转动惯量的影响,梁上受到一个以恒定速度 v 移动的力 $P(t)$ 作用,由欧拉梁理论可得梁的运动微分方程为^[1]

$$m \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

满足边界条件

$$EI \frac{\partial^3 w(0,t)}{\partial x^3} = 0, \quad EI \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$EI \frac{\partial^3 w(0,t)}{\partial x^3} = -Kw(0,t),$$

$$EI \frac{\partial^3 w(L,t)}{\partial x^3} = Kw(L,t) \quad (2)$$

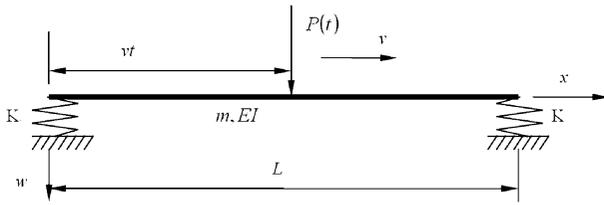


图 1 车-桥相互作用模型

Fig.1 Model of vehicle - bridge interaction

由振型叠加法,弹性支撑梁的挠度方程 $w(x,t)$ 可表达为

$$w(x,t) = \sum \phi_i(x) q_i(t) \quad (3)$$

其中 ϕ_i 为弹性支撑梁的第 i 阶振型, q_i 为振型坐标第 i 分量。

文献[7]将弹性支撑量的模态分离成简支弹性量和弹性支撑刚性梁的模态相叠加,获得满足边界条件的弹性支撑量的一阶模态

$$\phi_1(x) = \sin \frac{\pi x}{L} + k \quad (4)$$

其中 $k = \frac{EI\pi^3}{KL^3}$ 表示梁弯曲刚度和弹簧刚度相比的无量纲量。

运用如文献[7]同样的方法可得满足边界条件的二阶模态

$$\phi_2(x) = \sin \frac{2\pi x}{L} + 8k - 16 \frac{kx}{L} \quad (5)$$

容易证明一、二阶模态满足振型正交性。

利用瑞利能量法可得前两阶固有频率

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{\pi + 4k}{\pi + 8k + 2\pi k^2}},$$

$$\omega_2 = 4\omega_0 \sqrt{\frac{3(\pi + 16k)}{3\pi + 96k + 128\pi k^2}} \quad (6)$$

其中 $\omega = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$ 为简支梁的基频。显然,固有频率随 k 值的变化而变化,即受到弹簧刚度的影响。用曲线表示如图 2。

由图 2 可以看出,当 $k=0$ 即 $K \rightarrow \infty$ 时,频率与简支梁结果相同, $\omega_2/\omega_1 = 4$; 频率随着 k 值的增大而减小,即随着弹簧刚度 K 的减小而减小,且 ω_2 减小的速度明显快于 ω_1 。当 $k=0$ 时, $\omega_2/\omega_1 = 4$, 当 $k=0.25$ 时, $\omega_2/\omega_1 = 2.79$ 。

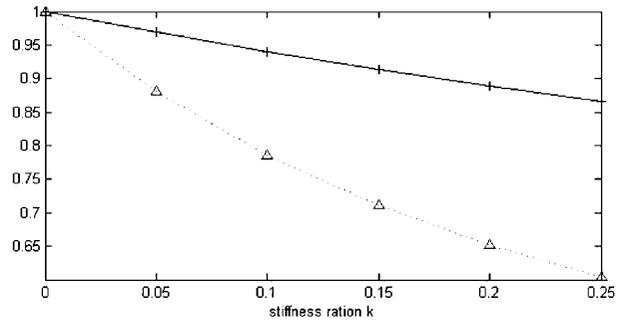


图 2 频率随 k 的变化曲线

Fig.2 Comparison of fundamental frequencies.

—: Present solution of ω_1/ω_0 ; +: FEM solution of ω_1/ω_0

---: Present solution of $\omega_2/(4\omega_0)$; Δ : FEM solution of $\omega_2/(4\omega_0)$

2 响应分析

运用 Galerkin 积分,将方程(1)两边分别乘以 $\phi_i(x)$ 并在 L 长度对 x 积分得到梁在振型坐标下的运动微分方程

$$\ddot{q}_1(t) + \omega_1^2 q_1(t) = \frac{2P(t)}{mL} \left(1 + \frac{8k}{\pi} + 2k^2\right)^{-1} \left(\sin \frac{\pi vt}{L} + k\right) \quad (7)$$

$$\ddot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t) = \frac{2P(t)}{mL} \left(1 + \frac{32k}{\pi} + \frac{128}{3}k^2\right)^{-1} \left(\sin \frac{2\pi vt}{L} + 8k - 16k \frac{vt}{L}\right) \quad (8)$$

2.1 移动常力作用

在车辆通过桥梁时,若忽略车辆的竖向加速度,则车辆可以看作是等于静轴重的移动常力 P 。对方称(7)(8)运用 Duhamel 积分可得振型坐标

$$q_1(t) = \frac{2PL^3}{EI\pi^4} \left(1 + \frac{4k}{\pi}\right)^{-1} \left[\left(\frac{\sin \Omega t - \beta_1 \sin \omega_1 t}{1 - \beta_1^2}\right) + k(1 - \cos \omega_1 t) \right] \quad (9)$$

$$q_2(t) = \frac{PL^3}{8EI\pi^4} \left(1 + \frac{16k}{\pi}\right)^{-1} \left[\left(\frac{\sin 2\Omega t - \beta_2 \sin \omega_2 t}{1 - \beta_2^2}\right) + 8k(1 - \cos \omega_2 t) - \frac{16k\Omega}{\pi} \left(t - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t\right) \right] \quad (10)$$

其中

$$\Omega = \frac{\pi v}{L}, \quad \beta_1 = \frac{\Omega}{\omega_1}, \quad \beta_2 = \frac{2\Omega}{\omega_2}$$

取文献[8]桥梁模型参数,桥梁长度 $L = 23m$, 桥梁单位长度质量 $m = 30t/m$, 桥梁截面抗弯刚度 $EI = 1.4e8kNm^2$ 。

图 3~4 显示了 k 取不同值时梁模态取用一阶和二阶时计算得到桥梁响应的结果。图中横坐标表

示荷载所在位置,竖坐标表示 1/4 跨位置处的竖向位移. 由图可以看出,当 $k=0$ 时,即简支边界条件下,取用二阶模态与取用一阶模态所得结果相差不大,而当 $k=0.25$ 时,即弹性支撑条件下,取二阶模态与取用一阶模态所得结果较大,有些地方相差近一倍,因此,在弹性支撑条件下,是否能够仅取用一阶模态计算需要注意.

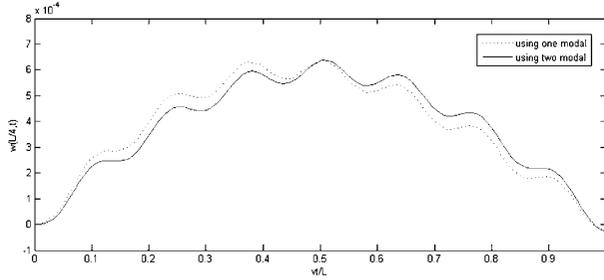


图3 $k=0, v=20\text{m/s}$ 时 $L/4$ 处竖向位移比较

Fig.3 Displacement of qtr. Span with $k=0$ and $v=20\text{m/s}$

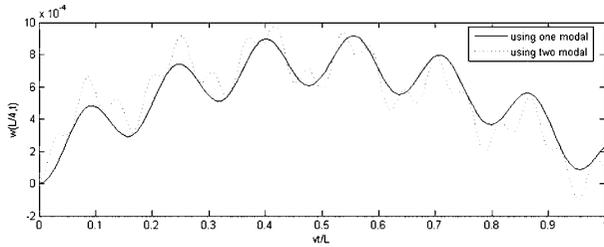


图4 $k=0.25, v=20\text{m/s}$ 时 $L/4$ 处竖向位移比较

Fig.4 Displacement of qtr. Span with $k=0.25$ and $v=20\text{m/s}$

2.2 1/4 车辆模型

在车辆通过桥梁时,若考虑车辆的竖向加速度,将车辆模型简化为如图 5 所示 1/4 车辆模型,则车辆对桥梁的作用力 $P(t)$ 可表示为

$$P(t) = (m_t + m_b)g + m_t \frac{d^2 y_t}{dt^2} + m_b \frac{d^2 y_b}{dt^2} \quad (11)$$

考虑车辆-桥梁的耦合作用,车辆振动方程可表示为

$$m_t \frac{d^2 y_t}{dt^2} + m_b \frac{d^2 y_b}{dt^2} + c_a \left(\frac{dy_t}{dt} + \frac{dy_w}{dt} \right) + k_a (y_t + y_w) = 0 \quad (12)$$

$$m_b \frac{d^2 y_b}{dt^2} + c_b \left(\frac{dy_b}{dt} - \frac{dy_t}{dt} \right) + k_b (y_b - y_t) = 0 \quad (13)$$

其中

$$y_w = \left(\sin \frac{\pi vt}{L} + k \right) q_1(t) + \left(\sin \frac{2\pi vt}{L} + 8k - 16k \frac{vt}{L} \right) q_2(t) \quad (14)$$

将方程(7)(8)(12)(13)联立求解可得车桥耦合振动的响应. 由于方程组是耦合的多自由度微分方程,理论求解比较困难,可用数值的方法求解,本文采用 Ronge-Kutta 方法编程计算. 算例中取桥梁参数:跨度 $L=23\text{m}$,单位长度质量 $m=30\text{t/m}$,截面抗弯刚度 $EI=1.4\text{e}8\text{kNm}^2$; 车辆参数: $m_t=8.66\text{t}$, $m_b=38.5\text{t}$, $k_a=856\text{kN/m}$, $k_b=5070\text{kN/m}$. 计算后将 $L/4$ 处位移结果显示如图 5-图 6 所示.

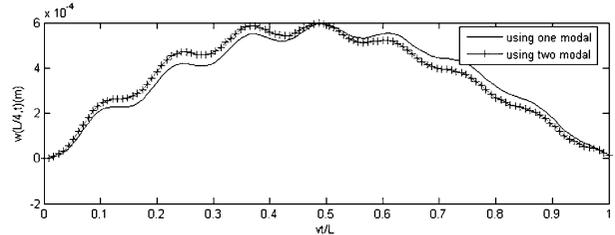


图5 $k=0, v=20\text{m/s}$ 时 $L/4$ 处竖向位移比较

Fig.5 Displacement of qtr. Span with $k=0$ and $v=20\text{m/s}$

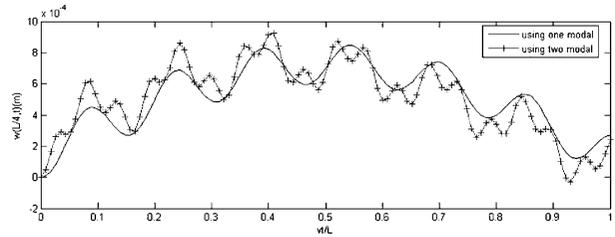


图6 $k=0.25, v=20\text{m/s}$ 时 $L/4$ 处竖向位移比较

Fig.6 Displacement of qtr. Span with $k=0.25$ and $v=20\text{m/s}$

图 5~图 6 显示了梁弯曲刚度和弹簧刚度比值 k 取不同值时梁 $L/4$ 处竖向位移的变化,图中分别比较了选取一阶模态与选取二阶模态计算结果的差别. 由图 5-图 6 比较可以看出,当 $k=0$ 时,即弹性支撑的弹簧刚度无穷大,梁为简支边界条件时,选取一阶模态与选取二阶模态所结算的结果差别不大. 当 $k=0.25$ 时,即弹性支撑的支撑刚度不再很大时,选取一阶模态计算与选取二阶模态计算所得结果相差较大. 当车辆运行于 $[0, L/2]$ 区间时,选取一阶模态所计算的 $L/4$ 处位移较取二阶模态计算的 $L/4$ 处位移大;当车辆运行于 $[L/2, L]$ 区间时,选取一阶模态所计算的 $L/4$ 处位移较取二阶模态计算的 $L/4$ 处位移小,梁的刚体转动模态起到了明显的作用.

为了研究梁-车辆耦合力,定义冲击系数 μ 为车辆运行过程中车辆对桥梁的接触力与车辆重量的比值. 为了研究梁刚体转动对该值的影响,比较了取一阶模态计算与二阶模态计算时该值的大小

比较如图7所示.

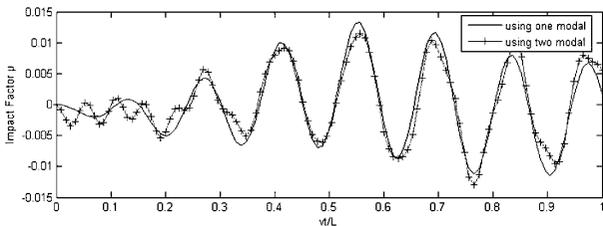


图7 $k=0.25, v=20\text{m/s}$ 时冲击系数比较

Fig.7 Impact factor with $k=0.25$ and $v=20\text{m/s}$

图7显示了 $k=0.25, v=20\text{m/s}$ 时车辆对桥梁的接触力与车辆重量的比值,由图7可以看出,车辆运行过程中,选取不同阶模态对该值有一定的影响,当车辆运行于 $[0, L/2]$ 区间时,计算 μ 值相差很大,梁的刚体转动模态作用明显.

3 结论

本文研究了弹性支撑梁在移动荷载作用下的动力响应,这在实际工程中有着一定的应用价值.与以往研究不同,本文选取了二阶模态进行模态叠加.研究了弹性支撑刚度对前二阶频率的影响,进一步研究了移动常荷载与移动车辆作用下弹性支撑梁的动力响应,得到一些有益的结论:

(1) 当弹性支撑的刚度减小时,系统的一阶固有频率与二阶频率均减小,但二阶频率减小的更迅速,这使得引起共振所需要激励频率减小,能量要求降低.同时两阶共振区接近.

(2) 弹性支撑梁的二阶模态含有刚体转动,在模态叠加计算中具有较大的影响,通过比较计算可知,当弹簧刚度很大,趋近于简支梁时,因为二阶模态中没有刚体转动使得二阶模态影响不大,而当弹性支撑刚度较小时,因为二阶模态中存在刚体转动使得二阶模态影响较大.需要取二阶模态分析.

(3) 考虑车辆为弹簧质量系统,当车辆在弹性支撑梁上移动,车-桥之间的耦合作用力受二阶模态的影响较为明显.

参 考 文 献

1 Michaltsos G, Sophianopoulos D, Kounadis A N. The effect of a moving mass and other parameters on the dynamic response of a simply supported beam. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 191(3): 3572362

2 Hillerborg A. Dynamic influences of smoothly running loads of simply supported girders. Stockholm; Kungl. Tekhn. Hogskolan, 1951: 1250

3 Lee H P. Dynamic response of beam with a moving mass. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 191(2): 289 ~ 294

4 Tan G H, Brameld G H, Thambiratnam D P. Development of an analytical model for treating bridge-vehicle interaction. *Engineering Structures*, 1998, 20(1/2): 250 ~ 260

5 Kawatani M, Kim C W. Computer simulation for dynamic wheel loads of heavy vehicles. *Structural Engineering and Mechanics*, 2001, 12(4): 409 ~ 428

6 肖新标,沈火明. 3种车桥耦合振动分析模型的比较研究. 西南交通大学学报, 2004, 39(2): 172 ~ 175 (Xiao X B, Shen H M. Comparison of three models for vehicle-bridge coupled vibration analysis. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2004, 39(2): 172 ~ 175 (in Chinese))

7 Yang Y B, Lin C L, Yau J D, et al. Mechanism of resonance and cancellation for train-induced vibrations on bridges with elastic bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 269: 345 ~ 360

8 Yau Y D, Wu Y S, Yang Y B. Impact response of bridges with elastic bearings to moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 248: 9 ~ 30

9 彭献,游福贺. 车桥耦合系统固有频率的研究. 动力学与控制学报, 2010, 8(3): 258 ~ 262 (Peng X, You F H. Research on natural frequencies of vehicle-bridge coupled system. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(3): 258 ~ 262 (in Chinese))

10 钱长照. 车桥耦合振动的摄动分析方法. 动力学与控制学报, 2009, 7(4): 375 ~ 378 (Qian C Z. Perturbation method for coupling vibration of vehicle-bridge system. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(4): 375 ~ 378 (in Chinese))

11 丁虎,胡庆泉,陈立群. 运动车辆梁模型的横向振动频率及模态. 动力学与控制学报, 2011, 9(1): 44 ~ 48 (Ding Hu, Hu Qingquan, Chen Liqun. Natural frequencies and model function of transverse vibration of beam modal for moving vehicles. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(1): 44 ~ 48 (in Chinese))

12 彭献,刘晓晖,霍兵勇. 最优控制理论在人车路磁流变半主动悬架中的应用. 动力学与控制学报, 2007, 5(2): 183 ~ 188 (Peng Xian, Liu Xiaohui, Huo Binyong. Application of stochastic optimal control theory to human-vehicle-road-magnetorheological fluid semi-active suspension sys-

tem. *Journal of Dynamics and Control*, 2007,5(2):183 ~ 188 (in Chinese))

- 13 陈宁,台永鹏,陈南. 分数微积分理论在非线性车辆悬架滑模控制中的应用. *动力学与控制学报*,2009,7(3): 258 ~ 263 (Chen Ning, Tai Yongpeng, Chen Nan. Appli-

cation of fractional calculus theory on sliding mode control for vehicle suspension systems with nonlinearities. *Journal of Dynamics and Control*, 2009,7(3):258 ~ 263 (in Chinese))

RESPONSE OF BRIDGE WITH ELASTIC BEARING UNDER MOVING LOAD *

Qian Changzhao Li Yinlei Liu Yang

(College of civil and architecture Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410076)

Abstract Considering the stiffness of elastic bearing, the frequencies and modal of the bridge with elastic bearing were studied. The first two frequencies were compared, and the regularity of frequencies change with stiffness of elastic bearing was obtained. Using modal superstition principal, the first two modal were used for analyzing the response of bridge with elastic bearing under moving load. The first modal of bridge with elastic bearing includes the rigid body translation and the first modal of simply supported beam. The second modal of bridge with elastic bearing includes the rigid body rotation and the first modal of simply supported beam. The solution obtained with two modals differs widely from that with only the first modal. Especially, when the vehicle is simulated as a spring – mass system, the coupling force has wider difference.

Key words elastic bearing, moving load, coupling vibration