第 9 卷第 2 期 2011 年 6 月
1672-6553/2011/09(2)/158-4

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 9 No. 2
Jun. 2011

一类具有扇区非线性的时变时滞系统的绝对稳定性 *

王炜[1,2] 王珏[2]

(1. 湖南工贸技师学院,株洲 412000)(2. 湖南工业大学电气与信息工程学院,株洲 412008)

摘要 讨论一类具有扇区非线性的时变时滞系统的绝对稳定性问题. 基于时滞分段的思想,构造一种新的 Lyapunov 泛函,进一步应用自由权矩阵结合积分不等式方法,并充分考虑时变时滞和时滞上界之间的关系,得到了基于 LMI 的具有更低保守性的时滞相关绝对稳定条件. 最后,数值实例表明所提方法的有效性和相比已有结果的优越性.

关键词 非线性系统, 绝对稳定, 时滞相关, Lyapunov 泛函

引 言

时滞现象普遍存在于各种工程、生物和经济等系统中,常常是导致系统不稳定的一个重要原因[1,2];另一方面, Lurie 控制系统是一类非常重要的非线性系统,因此,Lurie 时滞系统的绝对稳定性研究受到了广泛的关注[3-6].

目前, 自由权矩阵方法[7] 和积分不等式方法[3] 不需模型变换和交叉项界定,是研究时滞系统鲁棒控制的主要方法. 文献[3]和[4]基于积分不等式方法对 Lurie 时滞系统进行了研究,针对时变时滞和定常时滞两种情形,分别获得了相应的时滞相关绝对稳定条件. 针对时变时滞的情形,文献[5]采用增广 Lyapunov 泛函并且保留[4]中忽略的有用信息,考虑时变时滞和时滞上界之间的关系,进一步降低了结论的保守性,文献[6]基于时滞分段 Lyapunov 泛函,有效降低了结论的保守性, 但所得的结论不适用于时变时滞的情形.

本文针对 Lurie 时变时滞系统,通过构造新的 Lyapunov 泛函,应用自由权矩阵和积分不等式方法,得到了更低保守性的时滞相关绝对稳定条件,所得的结论包含更少的自由矩阵,具有更高的效率. 数值实例表明了所提方法的有效性.

全文沿用以下标记:R^n,$R^{n\times n}$ 分别表示实数域上的 n 维向量空间与 $n\times n$ 矩阵空间,A^T 和 A^{-1} 分别表示矩阵 A 的转置和逆;$P>0(P\geqslant 0)$ 表示矩阵 P 是一个正定(半正定)对称矩阵;I 表示合适维数的单位矩阵, * 表示矩阵中的对称项.

1 系统描述

考虑如下时变时滞 Lurie 系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-d(t))+Dw(t),\\ z(t)=Mx(t)+Nx(t-d(t)),\\ w(t)=-\varphi(t,z(t)),x(t)=\phi(t),\forall t\in[-h,0]\end{cases}\tag{1}$$

这里,$x(t)\in R^n$,$w(t)\in R^m$,$z(t)\in R^m$ 分别为系统的状态向量,输入向量和输出向量;A,B,D,M,N 为合适维数的常数实矩阵;$\phi(t)$ 为连续向量值初始函数;$\varphi(t,z(t)):[0,\infty)\times R^m\to R^m$ 为对 t 连续的非线性函数,对 $z(t)$ 满足李普希兹条件,$\varphi(t,0)=0$ 且对 $\forall t\geqslant 0$, $\forall z(t)\in R^m$ 满足以下扇形约束:

$$[\varphi(t,z(t))-K_1z(t)]^T[\varphi(t,z(t))-K_2z(t)]\leqslant 0\tag{2}$$

其中,K_1,K_2 为具有合适维数的常数实矩阵. 我们通常称这样的非线性函数 $\varphi(t,z(t))$ 属于扇形区域$[K_1,K_2]$,时滞 $d(t)$ 是时变连续函数且满足:

$$0\leqslant d(t)\leqslant h,\quad \dot{d}(t)\leqslant\mu\tag{3}$$

这里 h 和 μ 是常数.

在讨论标称系统(1)绝对稳定性的基础上,本文进一步考虑如下时变结构不确定系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=(A+\Delta A(t))x(t)+(B+\\ \quad\Delta B(t))x(t-d(t))+Dw(t),\\ z(t)=Mx(t)+Nx(t-d(t)),\\ w(t)=-\varphi(t,z(t)),x(t)=\varphi(t),\forall t\in[-h,0]\end{cases}\tag{4}$$

其中,时变结构不确定性的形式如下

$$[\Delta A(t)\quad \Delta B(t)]=LF(t)[E_a\quad E_b]\tag{5}$$

2010-12-17 收到第 1 稿,2011-01-16 收到修改稿.
* 湖南省教育厅资助科研项目(10C0628)

这里，L,E_a 和 E_b 是合适维数的常数矩阵，而 $F(t)$ 是未知的时变实矩阵且满足：

$$F(t)^TF(t)\leqslant I,\forall t. \tag{6}$$

为证明本文的主要结论，需要用到如下引理：

引理 1[3]　设 $x(t)$ 为 R^n 上具有连续一阶导数的向量函数，则对 $\forall R=R^T>0,\forall h\geqslant 0$，满足不等式：

$$-h\int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(s)R\dot{x}\mathrm{d}s\leqslant\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-h)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}-R & R\\R & -R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-h)\end{bmatrix}$$

引理 2[8]　给定适当维数的矩阵 $Q=Q^T,H,E$，则 $Q+HF(t)E+E^TF^T(t)H^T<0$，对任意满足 $F^T(t)F(t)\leqslant I$ 的 $F(t)$ 成立的充要条件是存在 $\lambda>0$，使得 $Q+\lambda^{-1}H^TH+\lambda E^TE<0$.

2　主要结果

首先考虑非线性函数 $\varphi(t,z(t))$ 属于扇形区域 $[0,K]$ 的情形，即 $\varphi(t,z(t))$ 满足

$$\varphi(t,z(t))^T[\varphi(t,z(t))-Kz(t)]\leqslant 0 \tag{7}$$

有如下结论：

定理 1　给定标量 $h>0$ 和 μ，若存在矩阵 $P>0$，$Q\geqslant 0,R=\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12}\\ * & R_{22}\end{bmatrix}>0,Z_i>0(i=1,2,3,4)$，以及任意合适维数的矩阵 $G_j,H_j(j=1,2)$，使得以下 LMI 成立，

$$\begin{bmatrix}\Phi_i & \frac{h}{2}\Phi_3^TZ\\ * & -Z\end{bmatrix}<0,i=1,2 \tag{8}$$

则满足时滞约束(3)的标称系统(1)在扇形区 $[0,K]$ 内绝对稳定，其中，

$$\Phi_1=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & -H_1 & \Phi_{15} & -hG_1\\ * & \Phi_{22} & 0 & -H_2 & -N^TK^T & -hG_2\\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & 0 & 0\\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & 0\\ * & * & * & * & -2I & 0\\ * & * & * & * & * & \Phi_{66}\end{bmatrix},$$

$$\Phi_2=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & -H_1 & \Phi_{15} & -hH_1\\ * & \Phi_{22} & 0 & -H_2 & -N^TK^T & -hH_2\\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & 0 & 0\\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & 0\\ * & * & * & * & -2I & 0\\ * & * & * & * & * & \Phi_{66}\end{bmatrix},$$

$$\Phi_3=[A\quad B\quad 0\quad 0\quad D\quad 0],$$

$$\Phi_{11}=PA+A^TP+Q+R_{11}+G_1+G_1^T+Z_2-Z_1,$$

$$\Phi_{12}=PB-G_1+G_2^T+H_1,$$

$$\Phi_{13}=Z_1-Z_2+R_{12},\Phi_{15}=PD-M^TK^T,$$

$$\Phi_{22}=-(1-\mu)Q-G_2-G_2^T+H_2+H_2^T,$$

$$\Phi_{33}=Z_2-Z_1+Z_3-Z_4+R_{22}-R_{11},$$

$$\Phi_{34}=Z_4-Z_3-R_{12},\quad \Phi_{44}=Z_3-Z_4-R_{22},$$

$$\Phi_{66}=-\frac{h^2}{2}(Z_2+Z_3),\quad Z=Z_1+Z_2+Z_3+Z_4$$

证明　由牛顿—莱布尼茨公式可知，对于任意合适维数的矩阵 $G_i,H_i,T_i,i=1,2$，以下式子成立：

$$0=2[x^T(t)G_1+x^T(t-d(t))G_2]\times[x(t)-x(t-d(t))-\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s] \tag{9}$$

$$0=2[x^T(t)H_1+x^T(t-d(t))H_2]\times[x(t-d(t))-x(t-h)-\int_{t-h}^{t-d(t)}\dot{x}(s)\mathrm{d}s] \tag{10}$$

另外，根据系统(1)和式(7)可知，

$$0\leqslant -2w^T(t)w(t)-2w^T(t)K[Mx(t)+Nx(t-d(t))] \tag{11}$$

构造如下形式的 Lyapunov－Krasovskii 泛函：

$$V(t,x_1)=x^T(t)Px(t)+\int_{t-d(t)}^{t}x^T(s)Qx(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\frac{h}{2}}^{t}\zeta_1^T(s)R\zeta_1(s)\mathrm{d}s+\frac{h^2}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^T(s)(Z_1+Z_3)\dot{x}^T(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\frac{h^2}{2}\int_{-h}^{-\frac{h}{2}}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^T(s)(Z_2+Z_4)\dot{x}^T(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \tag{12}$$

这里，$P>0,Q\geqslant 0,R=\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12}\\ * & R_{22}\end{bmatrix}>0,Z_i>0(i=1,2,3,4)$ 为待定矩阵，$\zeta_1(t)=[x^T(t)\quad x^T(t-\frac{h}{2})]^T$. 计算 $V(t,x_t)$ 沿系统(1)的导数，有

$$\dot{V}(t,x_1)=2x^T(t)P\dot{x}(t)+x^T(t)Qx(t)-(1-\dot{d}(t))x^T(t-d(t))Qx(t-d(t))+\frac{h^2}{4}\dot{x}^T(t)(Z_1+Z_2+Z_3+Z_4)\dot{x}(t)+\zeta_1^T(t)R\zeta_1(t)-\zeta_2^T(t)R\zeta_2(t)-\frac{h}{2}\int_{t-\frac{h}{2}}^{t}\dot{x}^T(s)(Z_1-Z_2)\dot{x}(s)\mathrm{d}s-\frac{h}{2}\int_{t-h}^{t-\frac{h}{2}}\dot{x}^T(s)(Z_4-Z_3)\dot{x}(s)\mathrm{d}s-\frac{h}{2}\int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(s)(Z_2+Z_3)\dot{x}(s)\mathrm{d}s \tag{13}$$

其中，$\zeta_1(t)=[x^T(t-\frac{h}{2})\quad x^T(t-h)]^T$. 由引理 1 可知，

$$\frac{h}{2}\int_{t-\frac{h}{2}}^{t}\dot{x}^T(s)(Z_1-Z_2)\dot{x}(s)\mathrm{d}s\leqslant\zeta_1^T(t)\begin{bmatrix}Z_2-Z_1 & Z_1-Z_2\\ * & Z_2-Z_1\end{bmatrix}\zeta_1(t) \tag{14}$$

$$\frac{h}{2}\int_{t-h}^{t-\frac{h}{2}}\dot{x}^T(s)(Z_4-Z_3)\dot{x}(s)\mathrm{d}s \leqslant \zeta_2^T(t)\begin{bmatrix} Z_3-Z_4 & Z_4-Z_3 \\ * & Z_3-Z_4 \end{bmatrix}\zeta_2(t) \tag{15}$$

将式(9)-(11)加入式(13),并利用(14)和(15)得

$$\dot{V}(t,x_1) \leqslant \frac{1}{h}\int_{t-d(t)}^{t}\eta^T(t,s)[\Phi_1 + \frac{h^2}{4}\Phi_3^T Z\Phi_3]\eta(t,s)\mathrm{d}s + \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t-d(t)}\eta^T(t,s)[\Phi_2 + \frac{h^2}{4}\Phi_3^T Z\Phi_3]\eta(t,s)\mathrm{d}s \tag{16}$$

这里,$\eta^T(t,s)=[x^T(t)x^T(t-d(t))\zeta_2^T(t)w^T(t)\dot{x}^T(s)]^T$,若 $\Phi_1+\frac{h^2}{4}\Phi_3^T Z\Phi_3<0$ 且 $\Phi_2+\frac{h^2}{4}\Phi_3^T Z\Phi_3<0$,那么对于充分小的 $\varepsilon>0$,有 $\dot{V}(t,x_1)<-\varepsilon\|x(t)\|^2$,这样,标称系统(1)在扇形区$[0,K]$内绝对稳定. 由 Schur 补[9]可知,$\Phi_1+\frac{h^2}{4}\Phi_3^T Z\Phi_3<0$ 和 $\Phi_2+\frac{h^2}{4}\Phi_3^T Z\Phi_3<0$ 等价于(8). 根据定义 1, 定理得证.

对非线性函数在扇形区$[K_1,K_2]$中的情形,应用反馈环的变换[10],可得系统(1)在扇形区$[K_1,K_2]$内的绝对稳定性等价于系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=(A-DK_1M)x(t)+(B-DK_1N)x(t-d(t))+Dw(t), \\ z(t)=Mx(t)+Nx(t-d(t)), \\ w(t)=-\varphi(t,z(t)) \end{cases} \tag{17}$$

在$[0,K_2-K_1]$内的绝对稳定性. 由定理 1 可得:

定理 2 给定标量 $h>0$ 和 μ,如果存在矩阵 $P>0$,$Q\geqslant 0$,$R=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ * & R_{22}\end{bmatrix}>0$,$Z_i>0(i=1,2,3,4)$,以及任意合适维数的矩阵 $G_j,H_j(j=1,2)$,使得以下 LMI 成立,

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_i & \frac{h}{2}\hat{\Phi}_3^T Z \\ * & -Z \end{bmatrix} \tag{18}$$

则满足时滞约束(3)的标称系统(1)在扇形区$[K_1,K_2]$内绝对稳定,其中,

$$\hat{\Phi}_1=\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{11} & \hat{\Phi}_{12} & \Phi_{13} & -H_1 & \hat{\Phi}_{15} & -hG_1 \\ * & \Phi_{22} & 0 & -H_2 & \hat{\Phi}_{25} & -hG_2 \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -2I & 0 \\ * & * & * & * & * & \Phi_{66} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Phi}_2=\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{11} & \hat{\Phi}_{12} & \Phi_{13} & -H_1 & \hat{\Phi}_{15} & -hH_1 \\ * & \Phi_{22} & 0 & -H_2 & \hat{\Phi}_{25} & -hH_2 \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -2I & 0 \\ * & * & * & * & * & \Phi_{66} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Phi}_3=[\hat{A} \quad \hat{B} \quad 0 \quad 0 \quad D \quad 0],$$

$$\hat{\Phi}_{11}=P\hat{A}+\hat{A}^TP+Q+R_{11}+G_1+G_1^T+Z_2-Z_1,$$

$$\hat{\Phi}_{12}=P\hat{B}-G_1+G_2^T+H_1,\hat{\Phi}_{15}=PD-M^T(K_2-K_1)^T,$$

$$\hat{\Phi}_{25}=-N^T(K_2-K_1)^T,\hat{A}=A-DK_1M,\hat{B}=B-DK_1N,$$

且 $\Phi_{13},\Phi_{22},\Phi_{33},\Phi_{34},\Phi_{44},\Phi_{66}$定义于定理 1.

对于时变结构不确定 Lurie 系统(4),利用 $A+LF(t)E_a$ 和 $B+LF(t)E_b$ 分别替换式(18)中的 A 和 B,应用 Schur 补及引理 2,有如下定理:

定理 3 给定标量 $h>0$ 和 μ,如果存在矩阵 $P>0$,$Q\geqslant 0$,$R=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ * & R_{22}\end{bmatrix}>0$,$Z_i>0(i=1,2,3,4)$,以及任意合适维数的矩阵 $G_j,H_j(j=1,2)$,和标量 $\lambda>0$,使得以下 LMI 成立,

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_i & \frac{h}{2}\hat{\Phi}_3^T Z & \hat{P}L & \lambda\hat{E} \\ * & -Z & \frac{h}{2}ZL & 0 \\ * & * & -\lambda I & 0 \\ * & * & * & -\lambda I \end{bmatrix}<0,i=1,2 \tag{19}$$

则满足时滞约束(3)的时变结构不确定系统(4)在扇形区$[K_1,K_2]$内鲁棒绝对稳定,其中

$\hat{E}=[E_a \quad E_b \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,\hat{P}=[P \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$,

且 $\hat{\Phi}_1,\hat{\Phi}_2,\hat{\Phi}_3$ 定义于定理 2.

3 数值实例

考虑如下不确定系统的鲁棒绝对稳定性:

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.3\end{bmatrix}$$

$$M=[0.3 \quad 0.1],N=[0.1 \quad 0.2],K_1=0.2$$

$$K_2=0.5,L=\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1\end{bmatrix},E_a=E_b=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

对于不同的 μ,定理 3 得到的保证系统绝对稳定的最大允许时滞及目前已有文献的结果列在表 1 中. 从表中可以看出,利用定理 3 所得到的时滞

上界要明显优于已有文献的结论.

表 1　不同情况下的最大允许时滞

Table 1　Allowable upper bounds for different

μ	0	0.3	0.9	>1.0
[4]	3.3057	2.0787	0.9228	0.7638
[5]	3.3057	2.2305	1.4721	1.4519
Theorem 3	3.6094	202698	1.6018	1.6018

4　结论

本文讨论一类具有扇区非线性的时变时滞系统的绝对稳定性问题. 通过构造新的 Lyapunov 泛函, 应用自由权矩阵结合积分不等式方法,得到了更低保守性和更高效率的时滞相关绝对稳定条件. 数值实例表明了本文方法的有效性.

参　考　文　献

1　Gu, K, Kharitonov V L, Chen J, Stability of time-delay systems. Boston: Birkhuser, 2003

2　翟世东,杨晓松. 离散分段线性时滞正系统的稳定性分析. 动力学与控制学报,2010,8(4):346～349 (Zhai Shidong, Yang Xiaosong. Stability analysis of discrete-time piecewise linear positive systems with time delay. *Journal of Dynamics and Control*, 2010,8(4): 346～349 (in Chinese))

3　Han Q L. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity. *Automatica*, 2005,41(12): 2171～2176

4　Han Q L, Yue D. Absolute stability of Luré systems with time-varying delay. *IET Control Theory Appl*, 2007,1(3): 854～859

5　曾红兵,何勇,吴敏,冯智勇. 时变时滞 Lurie 非线性系统绝对稳定新判据. 控制与决策, 2010,25(3):346～350 (Zeng Hongbing, He Yong, Wu Min, Feng Zhiyong. New absolute stability criteria for lurie nonlinear systems with Time-varying delay. *Control and Decision*, 2010,25(3): 346～350 (in Chinese))

6　Wu M, Feng Z Y, He Y. Improved delay-dependent absolute stability of Luré systems with time-delay. *International Journal of Control*, *Automation and Systems*, 2009,7(6): 1009～1014

7　He Y, Wu M, She J H, Liu G P. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays. *System Control Letters*, 2004,51(1): 57～65

8　Petersen I R, Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. *Automatica*, 1986, 22(4): 397～411

9　Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, Balakrishnan V. Linear matrix inequality in system and control theory. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia: SIAM, 1994

10　Khalil H K. Nonlinear systems. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996

ABSOLUTE STABILITY FOR A CLASS OF TIME-VARYING DELAY SYSTEMS WITH SECTOR-BOUNDED NONLINEARITY *

Wang Wei[1,2]　Wang Jue[2]

(1. *Hunan Technician College of Industry and Commerce*, *Zhuzhou*　412000, *China*)

(2. *College of Electrical and Information Engineering*, *Hunan University of Technology*, *Zhuzhou*　412008, *China*)

Abstract　The absolute stability for a class of time-varying delay systems with sector-bounded nonlinearity was investigated. Based on the idea of delay decomposition, a new Lyapunov functional was constructed. By employing the free-weighting matrix combined with integral inequality approach, and considering the relationship between the time-varying delay and its upper bound, some delay-dependent stability criteria were obtained and formulated in the form of linear matrix inequalities (LMIs). Finally, a numerical example was given to show that the effectiveness and superiorness over the existing ones.

Key words　nonlinear system,　absolute stability,　delay-dependent,　Lyapunov functional

Received 17 December 2010, revised 16 Juanuary 2011.

* This work was supported by the Scientific Research Fund of Hunan Provincial Education Department (10C0628)