

# 随机外激非线性系统 FPK 方程的四阶中心 C - N 型隐式差分分解\*

王文杰 徐伟

(西北工业大学理学院数学系, 西安 710072)

**摘要** 研究了非线性随机动力系统所对应的 Fokker - Planck - Kolmogorov (FPK) 方程. 讨论了微分方程的可朗克 (Crank) - 尼考尔逊 (Nicolson) 型隐式有限差分格式以及微分的四阶中心差分格式, 将两者相结合, 得到 FPK 方程的四阶中心 C - N 隐式格式差分分解, 并与 FPK 方程的精确解进行了比较. 数值结果表明, 该方法具有良好的稳定性, 且可以解决其他方法在概率密度峰值处偏小, 而在尾部处较大等缺点.

**关键词** 非线性系统, FPK 方程, 有限差分法, 可朗克 - 尼考尔逊隐式差分格式

## 引言

FPK 方程于 20 世纪初由 Fokker 与 Planck 首先提出, 并应用于研究量子物理问题. 20 世纪 30 年代初 Kolmogorov 将它一般化与抽象化. 不久, Andronov 等将它应用于研究一般动态系统. 50 年代 Stratonovich 将它应用于研究电子工程问题. 50 年代末 Chuang 与 Kazda 将它应用于研究非线性控制系统. 60 年代初 Ariaratnam, Lyon, Smith, Caughey 与 Dienes, Crandall 等将它应用于研究非线性随机振动问题.

利用转移概率密度求解系统的各种响应统计量, 可对该系统的响应和可靠性等做定性分析. 但是, 目前只对一些特殊的非线性随机动力系统, 才能得到其 FPK 方程的精确解<sup>[1-3]</sup>. 基于此, 许多学者致力于 FPK 方程数值解法的研究, 其中有代表性的主要有有限元法, 有限差分法, 路径积分法, 等价线性化方法, 高斯闭合法, 摄动法, Gram - Charlier 展开法, 等价非线性系统法, 随机平均法等.

但这些方法各有其局限性, 例如, 有限元法一般都很大, 而且计算得到的尾部概率密度不太准确. 等价线性化方法和高斯闭合法对强非线性<sup>[4-6]</sup>或具有随机参激的系统就不适用, 因为此时系统响应的稳态概率密度往往是非高斯型的. 摄动法只适用于弱非线性系统. Gram - Charlier 展开法可能导致概率密度为负值的情形. 等价非线性系统法要求

两个非线性系统性质很接近. 随机平均法只适用于弱阻尼和弱激励的情形.

本文针对上述问题, 提出了 FPK 方程的一种新的 C - N 型隐式差分方法, 可以较好地解决其他方法所具有的不足, 得到比较准确地概率密度函数.

## 1 具有随机外激非线性动力系统地 FPK 方程

对于非线性随机动力系统, 其对应的 FPK 方程一般具有如下的形式:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(b_{ij} p) \quad (1)$$

FPK 方程(1)是一个抛物型变系数偏微分方程, 其描述了扩散过程的转移概率密度  $p(x, t | x_0, t_0)$  的进化或流动, 其中  $a_i, b_{ij}$  为对应的漂移和扩散系数.

当  $a_i, b_{ij}$  均不显含时间时, 则 FPK 方程(1)可转化为:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(b_{ij} p) \quad (2)$$

FPK 方程(2)是一个椭圆型变系数偏微分方程, 常称为简化或平稳 FPK 方程. 其解将是平稳概率密度  $p(x)$ . 要唯一确定 FPK 方程(1)的解, 还需要初始条件和边界条件.

在本文中, 采用初始条件:

$$p(x, t | x_0, t_0) = \delta(x - x_0), t = t_0 \quad (3)$$

其表示在  $t = t_0$  时刻, 系统以概率 1 处于初始状态

$x_0$ .

无穷边界条件:

$$\lim_{x_j \rightarrow \pm\infty} p(x, t | x_0, t_0) = 0 \quad (4)$$

或者,它必须至少以  $|x_j|^{-\alpha}$  ( $\alpha > 1$ ) 趋近于零.

在随机振动理论中, *FPK* 方程(1)与(2)常用来预测非线性随机动力系统的响应. 因而, *FPK* 方程解的精确程度对于可靠性分析起着至关重要的作用.

## 2 FPK 方程的有限差分法

### 2.1 $C-N$ 有限差分格式

设  $\frac{\partial u}{\partial t} = L(u)$  为一般形式的抛物型偏微分方程,  $L(u)$  为微分算子. 则一维问题的  $C-N$  有限差分格式为:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{2}(L_h^{n+1}(u_j) + L_h^n(u_j)) \quad (5)$$

其中  $L_h^n(u_j)$  为微分算子  $L(u)$  在点  $(x_j, t_n)$  处对应的差分算子,  $h$  为空间步长,  $\tau$  为时间步长.

二维问题的  $C-N$  有限差分格式为:

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\tau} = \frac{1}{2}(L_h^{n+1}(u_{j,k}) + L_h^n(u_{j,k})) \quad (6)$$

其中  $L_h^n(u_{j,k})$  为微分算子  $L(u)$  在点  $(x_j, y_k, t_n)$  处对应的差分算子,  $h$  为空间步长,  $\tau$  为时间步长.

### 2.2 四阶中心差分格式

设  $f(x)$  为一函数, 则  $f'(x_i)$ ,  $f''(x_i)$  可以利用四阶中心差分格式表示为:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{8(f_{i+1} - f_{i-1}) - (f_{i+2} - f_{i-2})}{12\Delta x_i} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \approx \frac{16(f_{i+1} - f_{i-1}) - (f_{i+2} - f_{i-2}) - 30f_i}{12(\Delta x_i)^2} \quad (8)$$

其中  $f_i$  表示函数  $f(x)$  在点  $x_i$  处的值,  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ .

### 2.3 FPK 方程的四阶中心差分 $C-N$ 格式

对于一维 *FPK* 方程(1), 将微分的四阶中心差分格式和微分方程的  $C-N$  差分格式相结合, 即可得到一维 *FPK* 方程的四阶中心差分  $C-N$  格式.

一维问题的四阶中心差分  $C-N$  格式:

$$\frac{p_j^{n+1} - p_j^n}{\tau} = -\frac{1}{2}[(D1_{j+1}^{n+1} + D1_{j+1}^n)/12h] + \frac{1}{4}[(D2_{j+1}^{n+1} + D2_{j+1}^n)/12h^2] \quad (9)$$

其中:

$$D1_{j+1}^n = 8(a_{j+1}p_{j+1}^n - a_{j-1}p_{j-1}^n) - (a_{j+2}p_{j+2}^n - a_{j-2}p_{j-2}^n)$$

$$D2_{j+1}^n = 16(b_{j+1}p_{j+1}^n - b_{j-1}p_{j-1}^n) - (b_{j+2}p_{j+2}^n - b_{j-2}p_{j-2}^n) - 30b_j p_j^n$$

二维问题的四阶中心差分  $C-N$  格式:

$$\frac{p_{j,k}^{n+1} - p_{j,k}^n}{\tau} = -\frac{1}{2}[(F1_{j+1,k}^{n+1} + F1_{j+1,k}^n)/12h] + \frac{1}{4}[(F2_{j+1,k}^{n+1} + F2_{j+1,k}^n)/12h^2] \quad (10)$$

其中:

$$F1_{j+1,k}^n = 8(a_{j+1,k}p_{j+1,k}^n - a_{j-1,k}p_{j-1,k}^n) - (a_{j+2,k}p_{j+2,k}^n - a_{j-2,k}p_{j-2,k}^n)$$

$$F2_{j+1,k}^n = 8Q_{j,k}^{n+1} - 8Q_{j,k-1}^{n+1} - Q_{j,k+2}^n + Q_{j,k-2}^n$$

$$Q_{j,k}^n = 8(b_{j+1,k+1}p_{j+1,k+1}^n - b_{j-1,k+1}p_{j-1,k+1}^n) - (b_{j+2,k+1}p_{j+2,k+1}^n - b_{j-2,k+1}p_{j-2,k+1}^n)$$

## 3 数值算例

算例1 考虑如下受随机外激的二自由度非线性系统

$$\ddot{X} - \beta \dot{X} + X + X^3 + X^5 = W(t) \quad (11)$$

式中  $W(t)$  是一零均值高斯白噪声, 其相关系数为  $EW(t)W(t+\tau) = 2\delta(\tau)$  对应于系统(11)响应  $X_1 = X, X_2 = \dot{X}$  的联合稳态概率密度  $p(x_1, x_2)$  的 *FPK* 方程为

$$-x_2 \frac{\partial p(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} [(\beta x_2 + x_1 + x_1^3 + x_1^5)p(x_1, x_2)] + \frac{\partial^2 p(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \quad (12)$$

其精确解为:

$$p(x_1, x_2) = C \exp\left[-\beta\left(\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} + \frac{x_2^6}{6}\right)\right] \quad (13)$$

式中  $C$  为归一化常数.

在该算例中, 取求解区域为  $(-4, 4) \times (-4, 4)$ , 空间步长  $h = 0.5$ , 时间步长  $t = 0.2$ , 则利用本文方法可得到  $\beta = 1$  时数值解  $p_1(x_1, x_2)$ , 并与由(13)式得到的精确解  $p(x_1, x_2)$  的比较见图1.

算例2 考虑受高斯白噪声激励的杜芬振子, 其运动方程为

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} - \omega_0^2 x + \delta x^3 = w(t) \quad (14)$$

其中  $w(t)$  为强度  $2D$  的高斯白噪声. 设  $x_1 = x, x_2 =$

$x$  与 (74) 式相应的 FPK 方程为

$$\frac{\partial^2(Dp)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial(x_2 p)}{\partial x_1} - \frac{\partial[(\beta x_2 + \omega_0^2 x_1 - \delta x_1^3)p]}{\partial x_2} = 0 \tag{15}$$

其中  $p(x_1, x_2)$  为位移与速度联合稳态概率密度, 平稳 FPK 方程 (15) 式的精确平稳解为:

$$p(x_1, x_2) = c \exp\left[-\frac{\beta}{D}\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2}x_1^2 + \frac{\delta}{4}x_1^4\right)\right] \tag{16}$$

其中  $c$  为归一化常数.

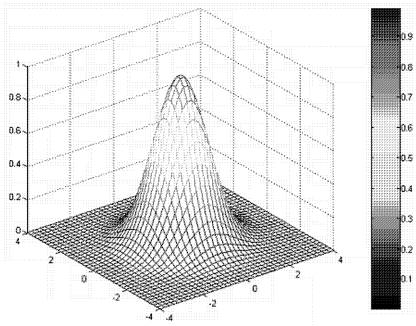


图 1(a) 数值解

Fig. 1(a) the numerical method

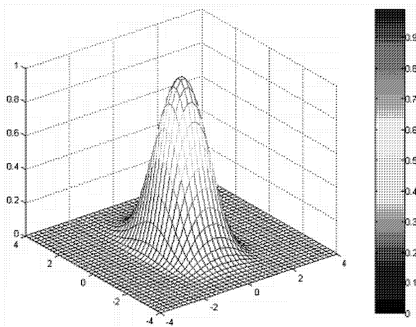


图 1(b) 精确解

Fig. 1(b) the analytic solution

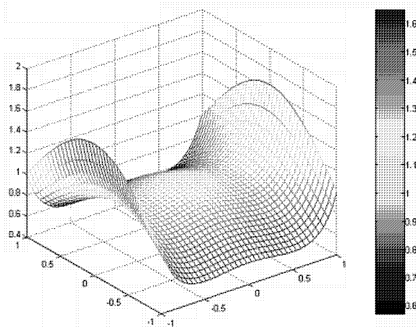


图 2(a) 数值解

Fig. 2(a) the numerical method

文方法可得到数值解  $p_2(x_1, x_2)$ , 并与通过 (16) 式得到的精确解  $p(x_1, x_2)$  比较 (见图 2).

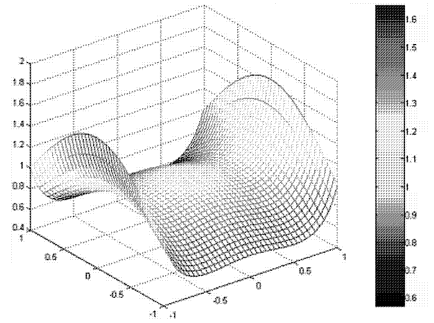


图 2(b) 精确解

Fig. 2(b) the analytic solution

### 4 结论

本文将 Crank - Nicolson 隐式差分格式和四阶中心差分格式相结合, 得到四阶中心差分 C - N 格式, 并将其成功地应用到随机外激作用下的非线性动力系统, 获得了 FPK 方程的有限差分数值解, 并与其解析解进行了比较. 表明该方法的有效性以及可行性, 并克服一般有限差分法的缺点, 可以准确地获得更小的尾部概率密度, 这对于可靠性分析至关重要.

### 参 考 文 献

- 1 Lin Y K, Cai G Q. Probabilistic structural dynamics: advanced theory and applications. New York: McGraw-Hill, 1995
- 2 朱位秋. 非线性随机动力学与控制 Hamilton 理论体系框架. 北京: 科学出版社, 2003 (Zhu W Q. Nonlinear stochastic dynamics and controls frame of Hamilton theory. Beijing: Science Press 2003 (in Chinese))
- 3 赵超樱, 谭维翰, 郭志奇. 由菲简并光学参量放大系统获得压缩态光所满足的 Fokker-Planck 方程及其解. 物理学报, 2003, 52: 2694 ~ 2699 (Zhao C Y, Tan W H, Guo Q Z. The solution of the Fokker-Planck equation of non-degenerate parametric amplification system for generation of squeezed light. Acta Phys. Sin. 2003, 52: 2694 ~ 2699 (in Chinese))
- 4 王平, 杨新娥, 宋小会. 具有含时平方反比项的谐振子的路径积分求解. 物理学报, 2003, 52: 2957 ~ 2960 (Wang P, Yang X E, Song X H. Exact solution for a harmonic oscillator with a time-dependent inverse square potential by path-integral. Acta Phys. Sin. 2003; 52 2957 ~ 2960 (in

在该算例中, 取求解区域为  $(-1, 1) \times (-1, 1)$ , 空间步长  $h = 0.05$ , 时间步长  $t = 0.2$ , 则利用本

- Chinese))
- 5 徐伟,贺群,戎海武,方同. Duffing-Van der Pol 振子随机分叉的全局分析. 物理学报,2003,52:1365 ~ 1371 (Xu W, He Q, Rong H W, Fang T. Global analysis of stochastic bifurcation in a Duffing-van der Pol system. *Acta Phys. Sin.* 2003, 52: 1365 ~ 1371 (in Chinese))
- 6 孙中奎,徐伟,杨晓丽. 求解强非线性动力系统响应的一种新方法. 动力学与控制学报,2005,2(3):29 ~ 35 (Sun Zhongkui, Xu Wei. A new analytic approximate technique for strongly nonlinear dynamic systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2005,2(3):29 ~ 35 (in Chinese))

## THE SOLUTION OF THE FORTH-ORDER CENTRAL C-N SCHEME FPK EQUATIONS FOR NONLINEAR SYSTEM UNDER RANDOM EXCITATION \*

Wang Wenjie Xu Wei

(The School of science of Northwestern Polytechnic University, Xi'an 710072, China)

**Abstract** The Fokker-Planck-Kolmogorov equations for nonlinear stochastic dynamic system was studied. The Crank-Nicolson finite difference scheme for differential equations and the forth-order central difference scheme for differential operators were discussed. And combining the forth-order central difference scheme with the Crank-Nicolson finite difference scheme, the numerical solution for FPK equations using the forth-order central C-N scheme was obtained. The numerical solution was compared with the analytic solution for FPK equations. The numerical results show that the method can overcome the difficulties of other methods, such as the big value of probability density function at tail.

**Key words** nonlinear system, FPK equations, the finite difference method, the Crank-Nicolson finite difference scheme