第 9 卷第 2 期 2011 年 6 月
1672-6553/2011/09(2)/135-4
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 9 No. 2
Jun. 2011

非高斯列维噪声激励下非线性系统的 Lyapunov 指数*

王喜英　许勇　徐伟　张慧清
(西北工业大学理学院应用数学系,西安　710072)

摘要　研究了非高斯列维噪声作用下非线性系统的渐近线性化方法和 Lyapunov 指数. 利用渐近线性化方法将非线性系统线性化,通过系统的响应轨迹验证了该方法的有效性. 通过广义的伊藤法则公式,推导出了列维噪声驱动下 Lyapunov 指数的一般表达式. 给出当参数变化时,非线性系统的随机稳定性分析.

关键词　非高斯列维噪声,　渐近线性化,　Lyapunov 指数,　随机微分方程

引 言

众所周知,列维过程是以 20 世纪伟大的法国数学家 Paul Lévy 所命名. 它是一个适应的,右连续的随机过程[1]. 列维过程最本质的特征是具有平稳独立增量. 显然,列维过程是比布朗运动、泊松运动更广泛的一类随机过程.

近年来, 非高斯列维噪声驱动下的动力系统已成为许多国内外学者重要研究的对象[2-4]. 黄、薛、杨等人[5-7]将列维噪声应用到金融经济模型,研究了列维噪声驱动下金融系统的量性指标;Silke Siegert[8]等人提出了分析非高斯列维噪声的时间序列的方法;A. A. Dubkov[9]等人研究了列维白噪声激励下费尔哈斯模型. David Applebaum[10]从列维过程的概率理论、研究特点出发,对列维过程的应用做了综述.

Lyapunov 指数作为刻画非线性系统动态特性的重要指标,已经成为人们关注的焦点[11,12]. 然而,对于列维噪声激励下非线性系统的 Lyapunov 指数的研究,目前尚未见有文献. 本文主要利用渐近线性化,计算列维噪声驱动下非线性系统的 Lyapunov 指数. 数值算例验证了此渐近方法有效性,并且当参数为零时,列维噪声驱动下的非线性系统退化到高斯白噪声或者泊松白噪声驱动下的非线性系统.

1　非线性系统的 Lyapunov 指数

考虑如下的由列维噪声驱动的非线性系统

$$dX(t)=b(X(t))dt+\sigma(X(t))dL(t) \tag{1}$$

其中 $t\geqslant 0$,$L(t)$ 为列维噪声. $X(t=0)=X_0$,$X(t)$ 是一维向量,b 和 σ 分别为一维函数.

由列维伊藤分解定理知,每个列维过程都可以由漂移参数 $b_1\in R$,具有协方差阵 A 的布朗运动 B_A 和独立于布朗运动的跳跃过程所决定. 即

$$L(t)=b_1t+B_A(t)+\int_{|y|<c}y\tilde{N}(t,dy)+\int_{|y|\geq c}yN(t,dy) \tag{2}$$

对于方程(2),涉及大的跳跃和小的跳跃部分. 当取 $c=\infty$ 时,大的跳跃部分和小的跳跃部分只考虑其中之一,通过利用交错积分的方法,大的跳跃部分可以省略.

方程(2)化为

$$L(t)=b_1t+B_A(t)+\int_{|y|<c}y\tilde{N}(t,dy) \tag{3}$$

将方程(3)带入到方程(1)

$$dX(t)=f(X(t))dt+g(X(t))dB(t)+\int_{|y|<c}h(X(t))y\tilde{N}(t,dy) \tag{4}$$

这里 $f:[0,T]\times R\to R$;$g:[0,T]\times R\to R$;$h:[0,T]\times R\to R$. f 是可微的非线性函数,g 和 h 是线性函数.

取方程(4)的线性系统为

$$dX(t)=[f(X_0(t))+f'(X_0(t))X(t)]dt+g(X(t))dB(t)+\int_{|y|<c}h(X(t))y\tilde{N}(dt,dy) \tag{5}$$

如果方程(5)满足李普希兹条件和增长条件,

2010-12-18 收到第 1 稿,2011-04-11 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(10972181, 11002001,10872165)和西北工业大学翱翔之星资助项目

则方程(5)存在解.

设 X_s 是满足方程(5)的平稳解,则

$$dX_s(t) = [f(X_0(t)) + f'(X_0(t))X_s(t)]dt + g(X_s(t))dB(t) + \int_{|y|<c} h(X_s(t))y\tilde{N}(dt,dy) \tag{6}$$

定义 $Z(t) = X(t) - X_s(t)$. 从方程(5) 和(6), 可得

$$dZ(t) = [f'(X_0(t))Z(t)]dt + g(Z(t))dB(t) + \int_{|y|<c} h(Z(t))y\tilde{N}(dt,dy) \tag{7}$$

方程 (7) 可变为

$$dZ(t) = f(Z(t))dt + g(Z(t))dB(t) + \int_{|y|<c} h(Z(t))y\tilde{N}(dt,dy) \tag{8}$$

f_2,g,h 是线性函数,且 $f_2(Z(t)) = f'(X_0(t))Z(t)$.

令 $W(t) = G(Z(t))$,并且对方程(8)应用广义的伊藤法则,

$$dW(t) = \frac{\partial F}{\partial Z}(Z)\{f_2(Z)dt + g(Z)dB(t)\} + \frac{1}{2}g^2(Z)\frac{\partial^2 F}{\partial Z^2}(Z)dt + \int_{|y|<c}\{F(Z + h(Z)y) - F(Z) - \frac{\partial F}{\partial Z}(Z)h(Z)y\}\gamma(dydt) + \int_{|y|<c}\{F(Z + h(Z)y) - F(Z)\}\tilde{N}(dt,dy) \tag{9}$$

令

$$Z(t) = F^{-1}(W(t)) \tag{10}$$

则 Lyapunov 指数可以定义为

$$\lambda = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log|Z(t)| \tag{11}$$

其中 $|Z(t)|$ 为 $Z \in R$ 的均值.

通过 Lyapunov 指数, 可以分析讨论动力系统的随机稳定性[15-16]、随机混沌和随机分岔等基本特性. Lyapunov 指数大于零时,此系统是不稳定的;当 Lyapunov 指数小于零时,此系统是随机稳定.

2 数值模拟

取 $f(X(t)) = \sqrt{X(t)}$, $g(X(t)) = \varepsilon_1 X(t)$, $h(X(t)) = \varepsilon_2 X(t)$,可以验证方程(4)满足解和 Lyapunov 指数存在的条件.

当 $\varepsilon_2 = 0$ 或 $\varepsilon_1 = 0$,此系统方程(4)将要退化到高斯白噪声激励下的随机微分方程或者是泊松白噪声激励下的随机微分方程.

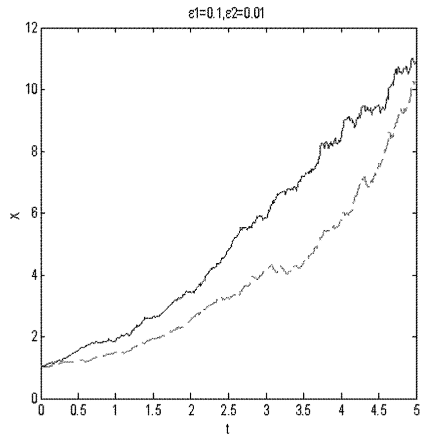

图 1 方程(4),(5)的响应轨迹

Fig. 1 Response of Eq. (4) and Eq. (5)

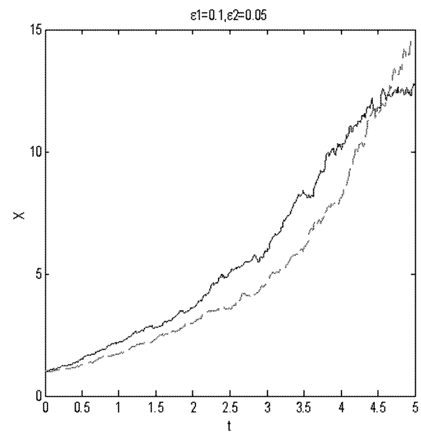

图 2 方程(4),(5)的响应轨迹

Fig. 2 Response of Eq. (4) and Eq. (5)

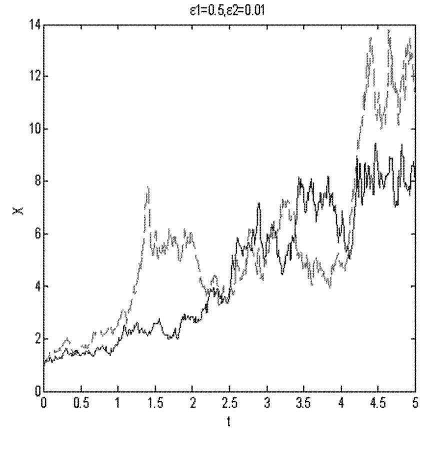

图 3 方程(4),(5)的响应轨迹

Fig. 3 Response of Eq. (4) and Eq. (5)

考虑在解 $X_s = 1$ 情形下. 图形 1 -4 分别给出泊松强度 $\mu = 1$ 和跳跃强度 $\gamma = 0.01$ 相同,参数 ε_1

和 ε_2 不同时,方程(4)和方程(5)的随机响应. 从图形 1－4 可见,方程(4)解的轨迹和方程(5)解的轨迹基本符合. 当参数 ε_1 相同时,从图 1,2 可以看出,不同的参数 ε_2 对方程(4)和方程(5)的随机响应影响不很明显;从图 3,4 可以看出,当参数 ε_2 相同,参数 ε_1 明显的影响了方程(4)和方程(5)的随机响应,但是方程(4)和方程(5)的随机响应轨迹基本吻合. 由此说明了:在本文中,渐近线性化方法是适用于列维噪声激励下的非线性系统的研究.

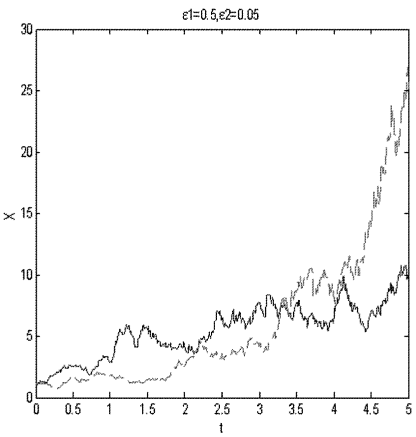

图 4　方程(4),(5)的响应轨迹

Fig. 4　Response of Eq. (4) and Eq. (5)

此时系统的 Lyapunov 指数表达式为

$$\lambda = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log|Z(t)| = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon_1^2)t + \varepsilon_1 B(t) + \int_0^t\int_{|y|<c}\log|1+\varepsilon_2 y|\,N(dt,dy)\} = (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon_1^2) + \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\varepsilon_1 B(t) + \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\{\int_0^t\int_{|y|<c}\log|1+\varepsilon_2 y|\,N(dt,dy)\} = (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon_1^2) + 0 + \gamma E[\log|1+\varepsilon_2 Y_1|] = (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon_1^2) + \gamma E[\log|1+\varepsilon_2 Y_1|]$$

这里运用下面两个条件:(1)若 $B(t)$ 依概率收敛. 则 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{B(t)}{t}=0$;(2) $M(t)=\int_0^t\int_{|y|<c}\log|1+\varepsilon_2 y|\,N(dt,dy)$ 是一个复合泊松过程.

通过以上的分析可以知道:Lyapunov 指数 λ 依赖于参数 ε_1、γ 和 Y_1 所服从的分布. 当 λ 小于零,此系统方程在平稳解处依概率 1 随机稳定的;当 λ 大于零,此系统方程在平稳解处不是随机稳定的.

3　结论

文中通过渐近线性化方法,推导了非线性系统的线性化形式,得出非高斯列维噪声激励下系统的 Lyapunov 指数的一般表达式. 通过系统的轨迹响应验证了此方法的有效性,并且由参数指标的变化,讨论和分析了非线性系统的随机稳定性.

参　考　文　献

1　D Applebaum. Lévy processes and Stochastic Calculus. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd Edition, 2009

2　D Applebaum, M Siakalli. Asymptotic stability of stochastic differential equations driven by Lévy noise. *J. Appl. Probab*, 2009, 46(4): 1116～1129

3　P Brockwell, R Davis. Asymptotic stability of stochastic differential equations driven by Lévy noise. *J. Appl. Probab*, 2007 44(4): 977～989

4　A Gushchin, U Kuchler. On stationary solutions of delay differential equations driven by a Lévy process. *Stochastic Processes and their Applications*, 2000, 88: 195～211

5　黄伯强,杨纪龙. 马树建. Lévy 过程驱动下的欧式期权定价和套期保值. 南京师范大学学报(工程技术版),2007,7(1):80～84 (Huang B Q, Yang J L, Ma S J. European option pricing and hedging driven by Lévy Process. *Journal of Nanjing Normal University* (*Technical Edition*), 2007,7(1):80～84(in Chinese))

6　薛红,王能华. Lévy 过程驱动下的信用风险结构化模型. 山西大学学报(自然科学版),2008,31(3):406～409 (Xue H, Wang N H. Structural models of credit risk driven by Lévy process. *Journal of Shanxi University* (*Natural Science Edition*), 2008,31(3): 406～409 (in Chinese))

7　杨智艳,朱文刚. 基于 Lévy 模型的重置期权的定价与实证分析. 广西师范学院学报:自然科学版,2010, 27(1): 33～40 (Yang Z Y, Zhu W G. Pricing of reset optionsand empirical study driven by Lévy process. *Journal of Guangxi University* (*Natural Science Edition*), 2010, 27(1): 33～40(in Chinese))

8　Silke Sieger,Rudolf Friedrich. Modeling of nonlinear Lévy processes by data analysis. *Physical Review E*, 2008, 64, 041107:1～12

9　A A Dubkov, B Spagnolo. Verhulst model with Lévy white noise excitation. *Eur. Phys. J. B*, 2008, 65: 361～368

10 D Applebaum. Lévy processes-from probability to finance and quantum groups. *Notices of the AMS*, 2004,51(11): 1336 ~ 1347

11 M Grigouriu. Lyapunov exponents for nonlinear systems with Poisson White noise, *Phys. Lett. A*, 1996, 217: 258 ~ 262

12 L Arnold N Cong. Generic properties of Lyapunov exponents. *Random Computational Dynamics*, 1994, 2 : 335 ~ 345

13 J Roberts, P Spanos. Random vibration and statistical linearization. New York :John Wiley, 1990

14 W Zhu, Z Huang and Y Suzuki. Response and stability of strongly nonlinear oscillators under wide-band random excitation. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 2001,36 : 1235 ~ 1250

15 W. Zhu. Random Vibration. Beijing :Science Press, 1998

16 孙中奎,徐伟,杨晓丽. 谐和激励与随机噪声作用下具有势的 Duffing 振子的混沌运动. 动力学与控制学报, 2005,3:13 ~ 22(Sun Z K, Xu W, Yang X L. Effect of random noise on chaotic motion of a particle in a potential. *Journal of Dynamics and Control*, 2005,3:13 ~ 22(in Chinese))

LYAPUNOV EXPONENTS FOR NONLINEAR SYSTEMS DRIVEN BY LÉVY NOISE*

Wang Xiying　Xu Yong　Xu Wei　Zhang Huiqing

(*Department of Applied Mathematics*, *Northwestern Polytechnical University*, *Xi'an* 710072, *China*)

Abstract This paper studied the approximation linearization and the Lyapunov exponents for nonlinear systems with Lévy process. The nonlinear systems with Lévy process were linearized by the approximation linearization, and the responses of the systems verified the effectiveness of the proposed approach. By applying the generalized Itô-formula, the expressions of Lyapunov exponents were derived. And this paper also discussed the stochastic stability, when the parameters were different.

Key words non-Gaussian Lévy process, the approximation linearization, Lyapunov exponents, stochastic differential equations

Received 18 December 2010, revised 11 April 2011.

* This work was supported by the NSF of China (10972181, 11002001 and 10872165), Aoxiang Star Plan of NPU and NPU FF