

Lorenz 系统与 Rossler 系统的异结构同步

蒋楠 魏毅强

(太原理工大学理学院,太原 030024)

摘要 研究了不确定参数的 Lorenz 系统和 Rossler 系统的异结构同步问题. 基于 Lyapunov 稳定性理论, 采用主动同步, 自适应同步两种方法实现异结构混沌系统的同步, 并且利用数值模拟来阐释理论的有效性.

关键词 混沌系统, 主动同步, 自适应同步, Lyapunov 稳定性理论

引言

经过近几十年的发展,混沌同步及应用研究已经获得了重大的突破性的进展. 自从 1990 年 Pecora 和 Carroll 提出了混沌控制的原理并在电路中得以实现以来[1],人们提出了各种混沌控制同步方法,如:耦合同步,自适应同步,延迟反馈同步,脉冲同步等. 在实际应用中,将混沌同步控制应用于保密通信中,更能有效提高保密通信的性能,即在发射端将有用的信息利用混沌信号进行加密,传输到接收端后再利用同步混沌装置将信号复原,以读取原始信息. 人们对于同结构混沌系统作了大量的研究,但是在实际生活中存在着许多异结构混沌系统,因此对于异结构混沌的同步研究就应该得到更加广泛的重视.

Lorenz 系统作为经典的混沌系统一直以来备受人们的关注. 文献[2]通过设计非线性状态反馈控制器得到了超混沌 Lorenz 系统,文献[3]基于 Lyapunov 稳定性理论,研究了具有 4 个不确定参数的超混沌 Lorenz 系统的自适应同步问题. 这些讨论的是两个相同结构的混沌系统在不同初值时的同步,关于不同系统之间的同步研究相对较少,因为它们存在不同结构以及参数失配问题. 文献[4]研究了一类新的三维混沌系统与 Lorenz 和 Rossler 系统的异结构同步,文献[5]研究了 Rossler 系统与统一混沌系统异结构同步. 这些工作均没有实现在参数不确定的情况下,混沌系统的异结构同步问题. 本文主要采用主动同步,自适应同步原理与 Lyapunov 稳定性理论,实现了在参数全部未知情况下,

Lorenz 混沌系统和 Rossler 混沌系统的异结构同步,并采用 Matlab 软件对该系统进行数值仿真,验证了同步方法的有效性.

1 Lorenz 混沌系统与 Rossler 混沌系统的同步

1.1 Lorenz 系统与 Rossler 系统的主动同步

为了实现 Lorenz 系统与 Rossler 系统的同步行为,我们选取 Lorenz 系统为驱动系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_1x_3 + rx_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3 \end{cases} \quad (1)$$

以 Rossler 系统为响应系统:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -(y_2 + y_3) + u_1 \\ \dot{y}_2 = y_1 + cy_2 + u_2 \\ \dot{y}_3 = -d + (y_1 - e)y_3 + u_3 \end{cases} \quad (2)$$

式(2)中引入了控制函数 u_1, u_2, u_3 , 为了确定控制函数以实现系统(1)与(2)的同步,由(2)减(1)得到误差系统

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -e_2 - e_3 - ax_1 + (a-1)x_2 - x_3 + u_1 \\ \dot{e}_2 = e_1 + ce_2 + x_1x_3 - (r-1)x_1 + (c+1)x_2 + u_2 \\ \dot{e}_3 = -d + (y_1 - e)e_3 + x_3e_1 + x_1x_3 - x_1x_2 + \\ (b-e)x_3 + u_3 \end{cases} \quad (3)$$

式中 $e_i = y_i - x_i$, 定义控制函数如下:

$$\begin{cases} u_1 = ax_1 - (a-1)x_2 + x_3 + V_1 \\ u_2 = (r-1)x_1 - x_1x_3 - (c+1)x_2 + V_2 \\ u_3 = -x_1x_3 + x_1x_2 - (b-e)x_3 - y_1e_3 - x_3e_1 + V_3 \end{cases} \quad (4)$$

将(4)代入(3)中,误差系统成为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -e_2 - e_3 + V_1 \\ \dot{e}_2 = e_1 + ce_2 + V_2 \\ \dot{e}_3 = -ee_3 + V_3 \end{cases} \quad (5)$$

误差系统(5)是一个线性系统,其控制输入 V_1, V_2, V_3 为误差状态 e_1, e_2, e_3 的函数,只要这些反馈能够镇定系统,当 t 趋于无穷大时, e_1, e_2, e_3 收敛于0,这就说明 Lorenz 系统与 Rossler 系统达到了主动同步. 对于 V_1, V_2, V_3 有多种可能,若选择

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

式中: A 为 3×3 常数矩阵,为了使闭环系统稳定,适当选择矩阵的元素,使得反馈系统的所有特征值具有负实部. 若选择矩阵 A 为如下形式:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -c-1 & 0 \\ 0 & 0 & e-1 \end{bmatrix}$$

在这种选择下,闭环系统(5)具有特征值 $-1, -1, -1$,这种选择将导致 t 趋于无穷大时误差状态 e_1, e_2, e_3 收敛到0,从而达到 Lorenz 系统与 Rossler 系统的主动同步.

1.2 Lorenz 系统与 Rossler 系统的自适应同步方法一

定义驱动系统(1)和响应系统(2)的状态误差为 $e_i = y_i - x_i$,如果 $e_i (i = 1, 2, 3)$ 随时间的演化而趋于零,则表明两系统达到了同步;否则就没有达到同步. 假设所有的参数 a, b, c, d, e, r 是未知的,用方程(2)减(1),同上得到误差动力系统(3).

定理 1: 对于任何初始条件,当参数自适应率 $\beta = ke_1$ (k 为常数)和反馈控制函数 $u(x)$ 分别设计如下时:

$$\begin{cases} u_1 = ax_1 - (a-1)x_2 + x_3 - ke_1 \\ u_2 = (r-1)x_1 - x_1x_3 - (c+1)x_2 \\ u_3 = -y_1e_3 - x_3e_1 - x_1x_3 + x_1x_2 - \\ (b-e)x_3 + d + e_1 \end{cases} \quad (6)$$

系统(1)和(2)能全局渐进同步.

证明:将控制函数(6)代入到(3),则误差系统变为:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -e_2 - e_3 - ke_1 \\ \dot{e}_2 = e_1 + ce_2 \\ \dot{e}_3 = -ee_3 + e_1 \end{cases} \quad (7)$$

构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)$$

则该函数沿着误差系统的全导数为:

$$\dot{v}(t) = e_1(-e_2 - e_3 - ke_1) + e_2(e_1 + ce_2) + e_3(-ee_3 + e_1) = -ke_1^2 + ce_2^2 - ee_3^2$$

当取时,则全导数. 根据 Lyapunov 稳定性理论,则误差系统一致渐进趋于原点. 因此在控制函数和参数自适应率的调节下,系统(1)和(2)达到同步.

1.3 Lorenz 系统与 Rossler 系统的自适应同步方法二

由系统(1)与(2)可以得到误差变量随时间变化的新误差系统:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -y_2 - y_3 - ax_1 + ax_2 + bx_3 + u_1 \\ \dot{e}_2 = y_1 + cy_2 + x_1x_3 - rx_1 + x_2 + u_2 \\ \dot{e}_3 = -d + y_1y_3 - ey_3 - x_1x_2 + bx_3 + u_3 \end{cases} \quad (8)$$

定理 2: 对于任何初始条件,当参数自适应率和反馈控制函数分别设计如下时:

$$\begin{cases} u_1 = y_2 + y_3 + \hat{a}x_1 - \hat{a}x_2 - k_1e_1 \\ u_2 = -y_1 - \hat{c}y_2 - x_1x_3 + \hat{r}x_1 - x_2 - k_2e_2 \\ u_3 = d - y_1y_3 + \hat{e}y_3 + x_1x_2 - \hat{b}x_3 - k_3e_3 \end{cases} \quad (9)$$

参数自适应率为:

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}} = -(x_1 - x_2)e_1 \\ \dot{\hat{b}} = x_3e_3 \\ \dot{\hat{c}} = y_2e_2 \\ \dot{\hat{e}} = y_3e_3 \\ \dot{\hat{r}} = x_1e_2 \end{cases}$$

则系统(2)全局渐近同步于系统(1). 式中 $k_i (i = 1, 2, 3)$ 为正常数, $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ 分别是 a, b, c 的估计值.

证明:将控制函数(9)代入(8)中得如下误差系统:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \bar{a}(x_1 - x_2) - k_1e_1 \\ \dot{e}_2 = \bar{r}x_1 - \bar{c}y_2 \\ \dot{e}_3 = \bar{e}y_3 - \bar{b}x_3 \end{cases} \quad (10)$$

式中: $\bar{a} = \hat{a} - a, \bar{b} = \hat{b} - b, \bar{c} = \hat{c} - c, \bar{e} = \hat{e} - e, \bar{r} = \hat{r} - r, e_1 = y_1 - x_1, e_2 = y_2 - x_2, e_3 = y_3 - x_3$

构造如下 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 + \bar{e}^2 + \bar{r}^2)$$

则 V 沿着误差系统(10)的全导数为:

$$\dot{v}(t) = e_1[\bar{a}(x_1 - x_2) - k_1e_1] + e_2[\bar{r}x_1 - \bar{c}y_2 -$$

$$k_2 e_2] + e_3(\tilde{e}y_3 - \tilde{b}x_3 - k_3 e_3) + \tilde{a}[-(x_1 - x_2)e_1] + \tilde{r}(x_1 e_2) + \tilde{c}(y_2 e_2) + \tilde{e}(y_3 e_3) + \tilde{b}(x_3 e_3) = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2$$

由于 $\dot{v} \leq 0$, 根据 Lyapunov 稳定性理论, 误差系统一致渐近趋于原点.

2 利用 Matlab 进行数值仿真

用 Matlab 编程画出驱动系统和响应系统各分量差的图像, 当参数值 $a = 16, r = 45.92, b = 4, c = 0.2, d = 4, e = 5.7$ 时, 两个系统同时达到混沌. 当时间 $t = 10s$, 取初值 $x_1(0) = -1, x_2(0) = 0, x_3(0) = 1, y_1(0) = 3, y_2(0) = 5, y_3(0) = 2, e_1 = -5, e_2 = 4, e_3 = -7$, 得到误差 e_1, e_2, e_3 随时间演化的图像, 如图 1 所示, 可知误差 e_1, e_2, e_3 迅速趋于零, 两系统达到同步.

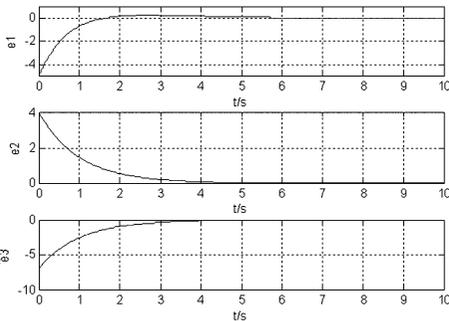


图 1 采用主动方法的同步误差图

Fig. 1 The synchronization errors with active method

从方程 (7) 出发, 选取初值 $k = 1, c = 1, e = 1$, $[e_1, e_2, e_3] = [-5, 4, -7]$ 时, 混沌 Lorenz 系统和混沌 Rossler 系统的异结构自适应同步的数值仿真见图 2.

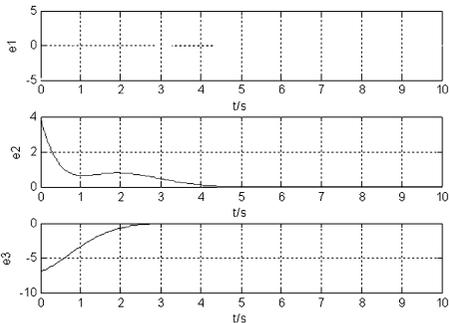


图 2 采用自适应方法(一)的同步误差图

Fig. 2 The synchronization errors with adaptive method(1)

从方程 (10) 出发, 选取初值 $[e_1, e_2, e_3] = [-8, 3, -3]$ 时, 混沌 Lorenz 系统和混沌 Rossler 系统的异结构自适应同步的数值仿真见图 3.

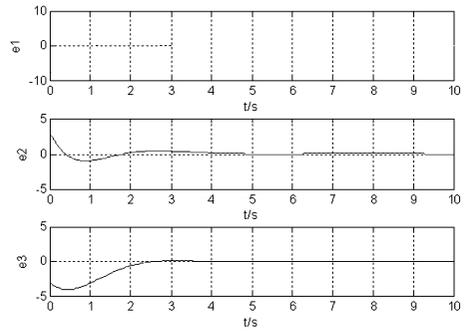


图 3 采用自适应方法(二)的同步误差图

Fig. 3 The synchronization errors with adaptive method(2)

3 结论

对于不确定参数的 Lorenz 系统和 Rossler 系统, 采用主动同步、自适应同步方法可实现这两个混沌系统的异结构同步. 用 Matlab 软件进行数值仿真, 这两种同步方法对未知参数的混沌系统是有效的.

参 考 文 献

- 1 L M Pecora, T C Carroll. Synchronization in chaotic system. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8): 821 ~ 824
- 2 王兴元, 王明军. 超混沌 Lorenz 系统. *物理学报*, 2007, 56(9): 1362141 (Wang Xingyuan, Wang Mingjun. Hyperchaotic Lorenz system. *Acta Physica Sinica*, 2007, 56(9): 1362141 (in chinese))
- 3 张若洵. 不确定超混沌 Lorenz 系统的参数自适应同步. *河北师范大学学报*, 2008, 32(4): 729 (Zhang Ruoxun. Adaptive parameters synchronization of uncertain Lorenz hyperchaotic system. *Journal of East China Normal University*, 2008, 32(4): 729 (in chinese))
- 4 宁娣, 陆君安. 一个临界系统与 Lorenz 系统和 Chen 系统的异结构同步. *物理学报*, 2005, 54: 4590 ~ 4596 (Ning Di, Lu Jun-an. Synchronization of a critical chaotic system with Lorenz system and Chen system. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54: 4590 ~ 4596 (in chinese))
- 5 吴先用, 万钧力. Rossler 系统与统一混沌系统的异结构同步. *系统工程与电子技术*, 2008, 30(4): 7152718 (Wu Xianyong, Wan Junli. Synchronization of Rossler system and unified chaotic system with different structure. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2008, 30(4): 7152718 (in chinese))
- 6 王兴元, 王勇. 基于主动控制的三维自治混沌系统的异结构反同步. *动力学与控制学报*, 2007, 5(1): 13 ~ 17

(Wang Xingyuan, Wang Yong. Anti-synchronization of three-dimensional autonomous different-structural chaotic systems via active control. *Journal of Dynamics and Control*, 2007,5(1):13 ~ 17(in chinese))

优同步. 动力学与控制学报. 2006,4(4):320 ~ 325(Gao jie, LuJun-an. Optimal syschronization of hyerchaotic Lü system with uncertain parameters. *Journal of Dynamics and Control*, 2006,4(4):320 ~ 325(in chinese))

7 高洁,陆君安. 不确定参数下的四维超混沌吕系统的最

SYNCHRONIZATION OF LORENZ SYSTEM AND ROSSLER SYSTEM WITH DIFFERENT STRUCTURE

Jiang Nan Wei Yiqiang

(College of Science, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract This paper studied the synchronization between Lorenz system and Rossler system with unknown parameters. Based on Lyapunov stability theory, the active synchronization and adaptive synchronization make the different systems acheive synchronization. And numerical simulations show the effectiveness and feasibility of these methods.

Key words chaotic system, active synchronization, adaptive synchronization, Lyapunov stability theory