

# 一类分数阶四维混沌系统及其投影同步\*

黄苏海

(淮海工学院理学院,连云港 222005)

**摘要** 提出了一个新的四维自治类新混沌系统. 首先在整数阶下分析了该系统的基本动力学特性. 并利用数值仿真、功率谱分析了当参数固定时,分数阶新混沌系统随微分算子阶数变化时的动力学特性. 研究表明:当微分算子阶数为 0.85 时,分数阶新系统随参数变化经短暂混沌和边界转折点分叉而进入混沌. 针对一类结构部分未知分数阶混沌系统,基于 Chebyshev 正交函数神经网络,稳定性理论<sup>[14]</sup>和分数阶 PI 滑模面构造方法设计了一种新型的含有补偿器的自适应非线性观测器,实现了分数阶新混沌系统的投影同步. 数值仿真验证了设计方法的有效性.

**关键词** 分数阶, 动力学特性, 投影同步, Chebyshev 正交多项式, 分数阶滑模面, 补偿器

## 引言

非线性现象广泛存在于现实世界中,在一定条件下,非线性将导致混沌. 近些年来,由于混沌在图像数据加密、非线性系统辨识、计算机图形处理、密码学、流体混合、生物系统、机械震动故障诊断等领域得到应用,因此有关混沌的产生、控制与同步的研究得到了越来越多的关注<sup>[1-3]</sup>.

自从 1963 年 Lorenz<sup>[4]</sup>在三维自治系统中发现了第一个混沌吸引子以来,近年来随着对混沌的深入研究 and 实际工程需要,各种非线性混沌系统也被相继提出,并得到了广泛研究.

分数阶微积分是研究任意阶微积分的理论,是普通整数阶微积分向非整数阶的推广. 分数阶微积分理论已有 300 多年的历史直到 1983 年 Mandelbort 首次指出自然界及许多科学技术领域存在大量的分维数事实,分数阶微积分才成为国际上的热点研究课题.

虽然分数阶微分有 300 多年的历史,但由于长期没有实际应用背景而发展缓慢,特别是混沌及其同步方面一直未得到应有. 因此,近些年来许多学者开始从事分数阶混沌动力系统的研究. 研究表明,许多分数阶系统也能产生混沌现象<sup>[5-11]</sup>.

本文构造了一个新的分数阶混沌系统,该系统与前面所述各类混沌系统都是拓扑不等价的,并

且对其进行了动力学行为分析及混沌投影同步控制的研究.

## 1 分数阶微积分

### 1.1 分数阶微积分的定义

本文采用 Caputo 定义.

**定义 1** 一元函数  $f(t)$  的  $q$  阶积分定义为

$${}_a D_t^{-q} f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-x)^{q-1} f(x) dx \quad (t > a, q > 0) \quad (1)$$

其中  $a, t$  分别为积分的下限和上限,  $f(t)$  为被积函数,  $q$  为积分次数,  $\Gamma(q)$  为欧拉函数. 分数阶微分是利用分数阶积分来定义的,其定义如下:

**定义 2** 一元函数的阶微分定义为

$${}_a D_t^q f(t) = {}_a D_t^{-(m-q)} {}_a D_t^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{q+1-n}} dx \quad (n-1 < q < n) \quad (2)$$

### 1.2 分数阶系统稳定理论

**引理 1**<sup>[12-13]</sup> 考虑自治系统

$$\frac{d^q x}{dt^q} = Ax \quad (3)$$

其中:  $x \in R^n (n \in N), A \in R^{n \times n}$

1) 当系统(3)是渐近稳定的,当且仅当对矩阵  $A$  的任意特征值  $\lambda, \arg(\lambda) > \frac{q\pi}{2}$  都成立.

2) 当系统(3)是稳定的,当且仅当对矩阵  $A$

2011-02-21 收到第 1 稿,2011-03-28 收到修改稿.

\* 淮海工学院自然科学基金资助项目 (Z2009042)

的任意特征值  $\lambda$ ,  $\arg(\lambda) \geq \frac{q\pi}{2}$  都成立.

**引理 2**<sup>[14]</sup> 对于分数阶系统(3), 当阶数  $q < 1$  时, 如果系统的系数矩阵  $A$  满足 Lyapunov 方程, 即存在实对称正定矩阵  $P$ , 半正定矩阵  $Q$  使得方程  $A^H P + PA = -Q$  对于任意的状态变量  $x$  恒成立, 则分数阶系统(3) 渐近稳定.

**定理 1**<sup>[14]</sup> 对于分数阶系统(3), 当系统阶数  $q < 1$  时, 如果存在实对称正定矩阵  $P$ , 使得对任意状态变量  $x(x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T)$ , 方程  $J = x^T P \frac{d^q x}{dt^q} \leq 0$  恒成立. 则分数阶系统(3) 渐近稳定.

## 2 新系统的模型及基本动力学特性

根据 Chen 吸引子非线性部分的特征, 构造了一个四维非线性动力学系统. 系统的模型如下:

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt^q} = a(y - x) + yz \\ \frac{d^q y}{dt^q} = (c - a)x - xz + cy \\ \frac{d^q z}{dt^q} = x^2 - bz - y - w \\ \frac{d^q w}{dt^q} = yz - xz - dw \end{cases} \quad (4)$$

其中  $x = (x, y, z, w)^T \in \mathbf{R}^4$  为系统的状态变量,  $a, b, c, d$  是正值参数.

在系统(4)中, 把第 4 个方程中的非线性项改为  $xy \rightarrow yz$ , 其他不变, 又得到一个新的混沌系统:

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt^q} = a(y - x) + yz \\ \frac{d^q y}{dt^q} = (c - a)x - xz + cy \\ \frac{d^q z}{dt^q} = x^2 - bz - y - w \\ \frac{d^q w}{dt^q} = xy - xz - dw \end{cases} \quad (5)$$

比较系统(4)和系统(5), 可以看出 2 个系统只是第 4 个方程中的非线性项不同, 因此可以把 2 个系统作为子系统, 通过一个 2 输入端的数据选择器使系统(4)和系统(5)组成一个切换混沌系统. 本文利用开关函数将系统(4)和(5)构造成为一个新的切换混沌系统, 见本文第 3 节.

下面以系统(4)为例研究动力学特性.

### 2.1 基本动力学特性

令  $D^q x = D^q y = D^q z = D^q w = 0$  此时系统只有一个平衡点  $S_0(0, 0, 0, 0)$ .

在  $S_0$  处对系统(4) 线性化, 有 Jacobian 矩阵

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ c - a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -d \end{bmatrix} \quad (6)$$

解得矩阵  $J$  的特征值为:

$$\lambda_1 = -d, \quad \lambda_2 = \frac{c - a + \sqrt{c^2 + 6ac - 3a^2}}{2},$$

$$\lambda_3 = \frac{c - a - \sqrt{c^2 + 6ac - 3a^2}}{2}, \quad \lambda_4 = -b$$

令  $\det(J_{S_0} - \lambda I)$ , 当  $a = 37, b = 3, c = 26, d = 38$ , 解得矩阵  $J$  的特征根:  $\lambda_1 = -29.6919, \lambda_2 = 18.6919, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = -38$ , 因为  $\lambda_2$  是正实数,  $\lambda_1, \lambda_3$  和  $\lambda_4$  是三个负实数, 这里四个特征根都是实根, 但是不全为负实根. 根据 Routh - Hurwitz 条件, 可得平衡点  $S_0$  是不稳定的鞍点.

系统(4)和(5)的 Jacobian 矩阵在一个平衡点处的特征值并且大小相等且性质也相同, 说明二系统具有同样的分岔特性, 相空间中流的演化速度也相等. 二系统的平衡点都是不稳定的鞍焦点, 所以二混沌系统都是双细胞奇异吸引子. 从以上分析可知, 二系统的非线性函数特性相同、平衡点的个数相等、奇异吸引子的类型相同, 二系统都存在同一映射意义上的混沌, 因此它们是两个拓扑共轭的异结构混沌系统.

为了进一步分析新系统(4) 的混沌动力学特性, 下面将分如下 2 种情况进行讨论:

### 2.2 研究 $q = 1$ , 也就是新系统为整数阶的情况

#### 2.2.1 耗散性和吸引子的存在性

同时, 考虑系统(4)的向量场散度(7), 也就是系统的 Jacobin 矩阵(6)的迹:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{V} \frac{d\bar{V}}{dt} = \text{div} \bar{V} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} =$$

$$-a + c - b - d \quad (7)$$

当  $a + b + d - c > 0$  则系统(4) 是耗散的, 且以指数形式收敛:  $\frac{d\bar{V}}{dt} = e^{-(a+b+d-c)}$  即体积元  $\mathbf{V}(0)$  在时刻  $t$  时收缩为体积元  $\mathbf{V}(0) e^{-(a+b+d-c)}$ . 这意味着, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 包含系统轨迹的每个体积元以指数率  $-(a$

+ b + d - c) 收缩到零. 因此, 所有系统轨迹线最终会被限制在一个体积为零的集合上, 且它渐进运动固定在一个吸引子上.

### 2.2.2 混沌吸引子

系统(4) 参数为  $a = 37, b = 3, c = 26, d = 38$  时, 初值  $(-0.1, 0.2, -0.5, 0.3)$  时, 存在一个典型的混沌吸引子. 本文采用了四阶龙格 - 库塔离散化算法, 得到混沌吸引子相图(图 1) 以及在不同相平面上的投影图像(图 2) 所示.

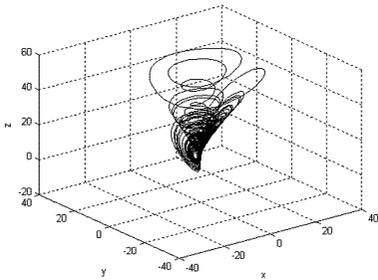


图 1 当  $a = 37, b = 3, c = 26, d = 38$  时, 系统(4) 的混沌吸引子

Fig.1 The chaotic attractor of system (4) with parameter values

$$a = 37, b = 3, c = 26, d = 38$$

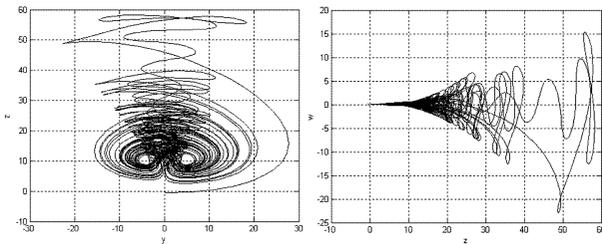


图 2 系统(4) 的混沌吸引子在不同平面上的投影

Fig.2 The projections of the chaotic attractor of

system (4) on the planes

### 2.2.3 Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数

由混沌理论可知, 在状态空间混沌吸引子的相邻轨线之间呈现出彼此排斥的趋势, 并以指数速率相互分离, 而 Lyapunov 指数正是定量描述轨线收缩或扩张的量. 利用奇异值分解的算法, 取  $a = 37, b = 3, c = 26, d = 38$ , 初值  $(-0.1, 0.2, -0.5, 0.3)$  时, 采用积分步长 0.001, 计算得该混沌吸引子在时间序列中的 4 个 Lyapunov 指数为

$$\lambda_{L1} = 18.3796, \quad \lambda_{L2} = -3.0091,$$

$$\lambda_{L3} = -30.6386, \quad \lambda_{L4} = -39.5216$$

并由 Kaplan - Yorke 猜想公式可求得 Lyapunov 维数

$$D_L = k + \frac{1}{|\lambda_{L,k+1}|} \sum_{i=1}^k \lambda_{L,i} = 2 + \frac{\lambda_{L1} + \lambda_{L2}}{|\lambda_{L3}|} = 2 + \frac{18.3796 - 3.0091}{-30.6386} = 2.5016 \quad (8)$$

由此可见, 这个新系统的 LE 维数是分数维数, 从而验证了该系统为混沌系统.

### 2.2.4 系统参数的影响

随着系统参数的改变, 系统平衡点的稳定性将会发生变化, 从而系统也将处于不同的状态. 从系统的 LE 谱和分岔图可很直观的分析出各个参数变化时, 系统的变化情况.

对于系统(4)

1) 固定参数  $b = 3, c = 26, d = 38$ , 改变  $a, a \in [30, 40]$ .

当  $a \in [30, 40]$  变化时, 系统的 LE 谱以及关于 z 的分岔图如图 3 所示. 由图 3 可见, 随着 a 的变化, 系统的 LE 在变化, 系统状态也在发生改变. 当  $a \in [30, 40]$ , 系统只有一个正的 LE, 表明随着 a 的增加系统由平衡态演化到混沌状态.

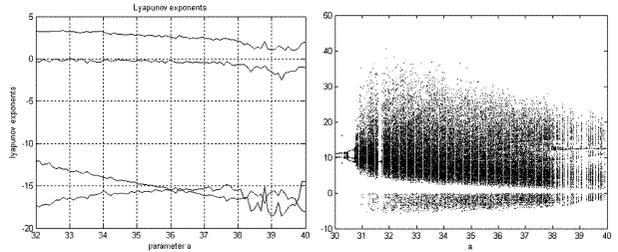


图 3 控制参数 a 变化时的关于 z 轴的分岔图及 Lyapunov 指数谱

Fig.3 Bifurcation diagram and Lyapunov - exponent spectrum for specific values set  $(c = 26, b = 3, d = 28)$  versus the control parameter a

2) 固定参数  $b = 3, a = 37, d = 38$ , 改变  $c, c \in [20, 30]$ .

当  $c \in [20, 30]$  时, 系统的 LE 谱以及关于 z 的分岔图如图 4 所示. 从图 4 中可知当  $c \in [20, 30]$  时, 系统仅有一个正的 LE, 系统处于混沌状态.

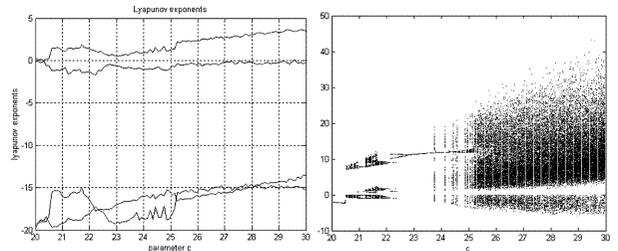


图 4 控制参数 c 变化时的关于 z 轴的分岔图, Lyapunov 指数谱

Fig.4 Bifurcation diagram, Lyapunov-exponent spectrum for specific values set  $(a = 37, b = 3, d = 38)$  versus the control parameter c

对于系统(5)

3) 固定参数  $b = 3, c = 26, d = 38$ , 改变  $a, a \in [30, 40]$ .

当  $a \in [30, 40]$  变化时, 系统的 LE 谱以及关于  $z$  的分岔图如图 5 所示. 由图 5 可见, 随着  $a$  的变化, 系统的 LE 在变化, 系统状态也在发生改变. 当  $a \in [30, 40]$ , 系统只有一个正的 LE, 表明随着  $a$  的增加系统由平衡态演化到混沌状态.

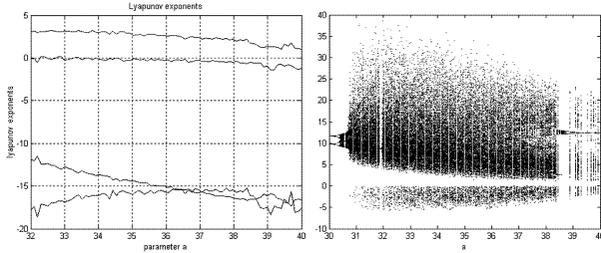


图 5 控制参数  $a$  变化时的关于  $z$  轴的分岔图及 Lyapunov 指数谱  
Fig. 5 Bifurcation diagram and Lyapunov-exponent spectrum for specific values set ( $c = 26, b = 3, d = 28$ ) versus the control parameter  $a$

### 2.3 研究 $0 < q < 1$ , 新系统为分数阶的情况

#### 2.3.1 数值模拟

事实上, 齐次分数阶混沌系统(4)有唯一的平衡点:  $S_0(0, 0, 0, 0)$ . 利用上面的引理 1 计算可得:  $0 < q$  就可能产生混沌现象, 显然这仅仅是系统(4)产生混沌现象的一个必要条件. 进一步, 在下面的图 6 中, 我们给出了分岔参数为阶次参数的分岔图, 从数值结果可以看出: 仅当  $q$  取值为  $0.845 \sim 1.000$  时, 系统会呈现较为复杂的动力学行为.

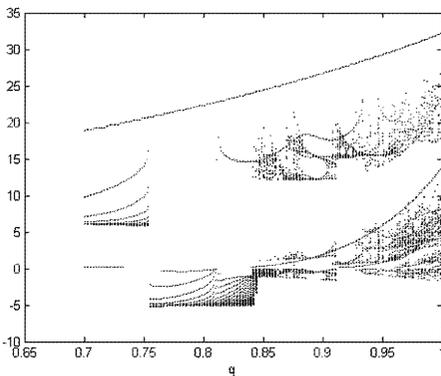


图 6 系统(4)关于分数阶  $q$  的分岔图

Fig. 6 Bifurcation graph of the system(4) versus order parameter  $q$

#### 2.3.2 参数为某一固定值时的系统动力学特性分析

下面分别对分数阶  $q$  时分数阶系统的动力学特性进行分析

##### (1) 系统相图分析

根据预估-校正法, 利用 Matlab 模拟了  $q = 0.84 - 0.86$  和  $0.90$  的结果. 对不同的分数阶数  $q$  均取系统初值  $(-0.1, 0.2, -0.5, 0.3)$ , 仿真时间为

$20s$ , 数值模拟显示, 当  $q = 0.85 \sim 0.90$  时, 相空间变量存在随机分离状态, 即混沌吸引子, 说明系统处于混沌状态; 当  $q = 0.84$  时, 相图曲线为极限环, 说明系统处于周期状态. 图 7 分别给出了  $q = 0.84$  和  $q = 0.85$  的相图.

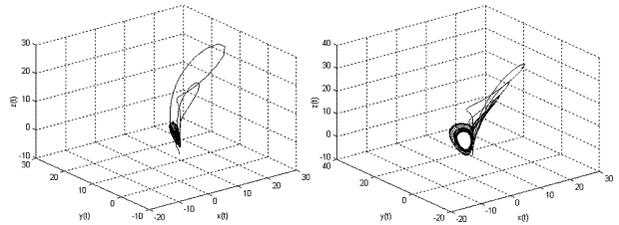


图 7 不同阶数时系统(4)的 3 维相图

Fig. 7 Phase figure of system (4) with different fractional-order on 3-D plane

#### (2) 功率谱分析

一个信号的时域描述和频域描述是一一对应的, 功率谱分析能够提供信号的频域信息, 从功率谱分析可以观察到系统是否具有混沌特征. 对于周期运动, 功率谱为离散谱; 对于混沌运动, 功率谱则为连续谱. 所以可以通过绘出分数阶系统产生的信号的功率谱图来判断系统是否为混沌系统.

当  $q = 0.85 \sim 0.90$  时, 功率谱为连续谱, 说明系统处于混沌状态; 当  $q = 0.84$  时, 功率谱为离散谱, 说明系统处于周期状态. 图 8 分别给出了  $q = 0.84$  和  $q = 0.85$  的功率谱图.

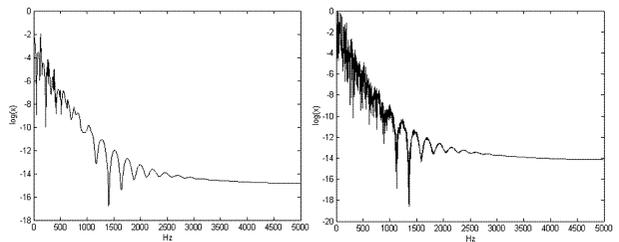


图 8 不同阶数时系统功率谱曲线

Fig. 8 Curves of system power spectrum with different fractional-order

### 3 切换系统构成

本文构造如下的开关函数

$$f(p) = \begin{cases} x, & p = 1 \\ z, & p = 0 \end{cases}, \quad p = g(z) = \begin{cases} 0, & z \geq 0 \\ 1, & z < 0 \end{cases} \quad (9)$$

则系统(4)和系统(5)可以表示为如下的切换混沌系统

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt^q} = a(y-x) + yz \\ \frac{d^q y}{dt^q} = (c-a)x - xz + cy \\ \frac{d^q z}{dt^q} = x^2 - bz - y - w \\ \frac{d^q w}{dt^q} = yf(g(z)) - xz - dw \end{cases} \quad (10)$$

当  $z \geq 0$  时,系统(10)运行子系统(4),而  $z < 0$  时,系统(10)运行子系统(5),因此当  $t \rightarrow \infty$  时,切换系统(10)在系统(4)和系统(5)之间随机变换. 切换混沌混沌系统具有更复杂的动力学特性和更好的伪随机性,在保密通信中的应用中有更广泛的前景.

#### 4 系统的自适应投影同步研究

自从 Pecora 和 Carroll 在 1990 年引入混沌同步的方法并在实验室实现以后. 近年来,一些学者拓宽了同步的概念,提出并实现了不同类型的混沌同步,如完全同步、广义同步、相同步、延迟同步、投影同步等. 在混沌保密通信中,投影同步可以把二进制数扩展到  $M$  进制以实现更快的传输,因此对投影同步的研究具有重要的理论意义和应用前景. 为此,本文把投影同步扩展到分数阶系统,利用稳定性理论<sup>[14]</sup>和 back-stepping 方法,设计一个同步方案,实现了一类分数阶混沌系统的投影同步.

神经网络因其强大的学习能力和能够以任意精度逼近非线性函数的能力,已被广泛应用于非线性系统的建模、预测、模式识别以及控制等. 正交神经网络比普通的多感知器网络具有更快的收敛速度和更高的效率. 因为它不仅可以在紧集上逼近任意非线性函数,而且可以逼近用普通 BP 网络表示的数学模型,其结构图见文献[15].

采用文献[16]的 Chebyshev 正交多项式方法,正交神经网络输出如下:

$$X_{out} = W\Phi(X) = \sum_{i=1}^n W_i \Phi_i(X) \quad (11)$$

式中:  $X \in R^n$  为网络的输入向量;  $\Phi(X)$  为正交基函数.  $W$  为权值矩阵

##### 4.1 广义方法投影同步

给定分数阶混沌系统

$$D^\alpha X = MX + BF(X) + G(X)\theta \quad (12)$$

其中:  $X \in R^n$ ,  $M \in R^{n \times n}$  为常数矩阵,未知非线性函数  $F(X) \in R^n$ ,  $\theta^T \in R^m$  是未知参数向量,  $G(X) \in$

$R^{n \times n}$  为已知函数矩阵. (12) 作为驱动系统.

利用正交神经网络的非线性逼近能力,我们设计一个如下非线性观测器

$$D^\alpha Y = MY + \frac{1}{\beta} B(\tilde{W}\Phi(Y) + u + v(t)) + \frac{1}{\beta} G(Y)\hat{\theta} \quad (13)$$

式中:  $Y \in R^n$  为观测器的状态向量;  $\hat{\theta} \in R^m$  未知参数估计量,  $\beta$  是投影比例,  $\tilde{W}$  和  $u$  分别是需要设计的正交神经网络权值矩阵和控制量.  $v(t)$  为补偿器.

实际上,由于物理上的限制,补偿器的控制输入存在非线性. 这些非线性因素用表示:  $\phi(v)$

这是一个在  $[\gamma_1, \gamma_2]$  区间内的连续函数,即

$$\gamma_1 v^T v \leq v^T \phi(v) \leq \gamma_2 v^T v \quad (14)$$

式中,  $\gamma_1, \gamma_2$  是非零正常数且  $\phi(0) = 0$ .

**引理 3:** 给定一个任意小的正数  $\varepsilon$  和一个连续函数  $f(x) \in R^n$ , 存在一个权值矩阵  $W^* \in R^n$  使得一个具有  $s$  个正交基函数的正交神经网络的输出满足

$$\max \| W^* \Phi(x) - f(x) \| \leq \varepsilon$$

因此本文选取 Chebyshev 多项式作为神经网络的正交基函数

根据上面的描述,对于式(12)中的  $F(X)$ , 一定存在一个具有  $s$  个正交基函数的正交神经网络和相应的最优权值  $W^*$ , 使得  $F(X) = W^* \Phi(Y) + \delta$ , 且  $\delta$  显然满足  $\|\delta\| \leq \delta^*$ ,  $\delta^*$  为一个已知的常数, 则式(12)可以写成

$$D^\alpha X = MX + BW^* \Phi(Y) + B\delta + G(X)\theta \quad (15)$$

式(15)与式(13)的误差方程为

$$D^\alpha E = ME + B(\tilde{W}\Phi(Y) + u + \phi(v) - \delta) + G(Y)\hat{\theta} - G(X)\theta$$

$$E = \beta Y - X \quad \hat{\theta} = \hat{\theta} - \theta \quad \tilde{W} = \tilde{W} - W^* \quad (16)$$

分数阶滑模面定义为:

$$S = \sigma E - D^{-\alpha}(\sigma M + \sigma BK)Ed\tau$$

**定理 2:** 设定权值矩阵  $\frac{d^\alpha \tilde{W}}{dt^\alpha} = -\sigma B\Phi(Y)$ ,

未知参数  $\theta$  的估计值  $\hat{\theta}$  满足:  $\frac{d^\alpha \hat{\theta}}{dt^\alpha} = -\sigma G(X)$ , 设计如下控制器:  $u = -\sigma G(\hat{\theta}(G(Y) - G(X)) - \eta \text{sgn}(\sigma B))$ ,  $v(t) = -\mu M \frac{\sigma BS}{|\sigma BS| + \tau}$ ,  $\mu = |(\sigma B)^{-1}| \gamma_1^{-1}$ ,

$M = |\sigma BKE|$ , 则式(16)的状态收敛于零, 系统(15)与(13)是投影同步的.

## 4.2 证明推导

根据文献[14]利用 back - stepping 方法构造  $J$  函数:

第一步:

$$J_1 = S \frac{d^\alpha S}{dt^\alpha} = -S\sigma B(\tilde{W}\Phi(Y) + u + \phi(v) - \delta) + S\sigma G(X)\tilde{\theta} + S\sigma \hat{\theta}(G(Y) - G(X)) - S\sigma BKE \quad (17)$$

第二步:

$$J_2 = J_1 + tr \tilde{W} \frac{d^\alpha \tilde{W}}{dt^\alpha} \quad (18)$$

最后

$$J_3 = J_2 + \tilde{\theta} \frac{d^\alpha \tilde{\theta}}{dt^\alpha} = S\sigma B(\tilde{W}\Phi(Y) + u - \delta) + S\sigma G(X)\tilde{\theta} + S\sigma \hat{\theta}(G(Y) - G(X)) - S\sigma BKE + S\sigma B\phi(v) + tr \tilde{W} \frac{d^\alpha \tilde{W}}{dt^\alpha} + \tilde{\theta} \frac{d^\alpha \tilde{\theta}}{dt^\alpha} = S\sigma B(u - \delta) + S\sigma \hat{\theta}(G(Y) - G(X)) + tr(\tilde{W} \frac{d^\alpha \tilde{W}}{dt^\alpha} + S\sigma B \tilde{W}\Phi(Y) + \tilde{\theta}(\frac{d^\alpha \tilde{\theta}}{dt^\alpha} + S\sigma G(X))) - S\sigma BKE + S\sigma B\phi(v) \quad (19)$$

其中取:

$$\frac{d^\alpha \tilde{W}}{dt^\alpha} = \frac{d^\alpha \hat{W}}{dt^\alpha} = -S\sigma B\Phi(Y) \quad (20)$$

$$\frac{d^\alpha \tilde{\theta}}{dt^\alpha} = \frac{d^\alpha \hat{\theta}}{dt^\alpha} = -S\sigma G(X) \quad (21)$$

$$u = -S\sigma \hat{\theta}(G(Y) - G(X)) - \eta \text{sgn}(S\sigma B) \quad (22)$$

注意到补偿器

$$v(t) = -\mu M \frac{\sigma BS}{|\sigma BS| + \tau}, \quad \mu = |(\sigma B)^{-1}| \gamma_1^{-1}, M = |\sigma BKE| \quad (23)$$

由于

$$-S\sigma BKE + S\sigma B\phi(v) \leq |S| |\sigma BKE| + S\sigma B\phi(v) \quad (24)$$

根据(14)式和式(23)可推得

$$v(t)\phi(v) = -\mu M \frac{\sigma BS}{|\sigma BS| + \tau} \phi(v) \geq \gamma_1 \mu^2 M^2 \left( \frac{\sigma BS}{|\sigma BS| + \tau} \right)^2 \Rightarrow S\sigma B\phi(v) \leq -\gamma_1 \mu M \frac{(\sigma BS)^2}{|\sigma BS| + \tau} \quad (25)$$

将(25)代入方程(24),得到

$$|S| |\sigma BKE| + S\sigma B\phi(v) \leq |S| |\sigma BKE| - \gamma_1 \mu M \frac{(\sigma BS)^2}{|\sigma BS| + \tau} \leq |S| |\sigma BKE| -$$

$$\gamma_1 \mu M \left( |\sigma BS| - \frac{(\sigma BS)\tau}{|\sigma BS| + \tau} \right) \quad (26)$$

结合前面(19),最终得到:

$$J_3 \leq M(1 - \gamma_1 \mu |\sigma B|) \left( |S| - \frac{\gamma_1 \mu \tau}{\gamma_1 \mu |\sigma B| - 1} \right) + (|\delta| - \eta) |\sigma B| \quad (27)$$

当  $\eta > \delta^*$ , 且  $|S| > \frac{\gamma_1 \mu \tau}{\gamma_1 \mu |\sigma B| - 1}$  时,  $J_3 < 0$ .

根据定理2,设计的控制器能使分数阶响应系统(13)与分数阶驱动系统(15)实现了投影同步

## 4.3 数值模拟

以系统(4)为例,其中  $\alpha = 0.95$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F(x) = \begin{bmatrix} x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 \\ x_1^2 \\ x_2 x_3 - x_1 x_3 \end{bmatrix},$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_4 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

文中正交神经网络设计为4-12-4结构.设计权值矩阵  $W$ 、未知参数  $\hat{\theta}$  和  $u$  的调节规律如式(20)、式(21)和式(22)

滑模面  $S = \sigma E - D^{-\alpha}(\sigma M + \sigma BK)Ed\tau$  中,

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

其中非线性补偿器仍取为

$$\phi(v(t)) = [0.7 + 0.2\sin(v(t))]v(t)$$

根据式(14),  $\gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = 0.9, v(t)$  中  $\tau = 0.01$ .

根据预估-校正法,本文利用 Matlab 进行仿真.所示下面对以上的结果进行仿真,系统初始状态的取值为:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-0.1, 0.2, -0.5, 0.3),$$

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0.7, -0.6, -0.2, 0.8)$$

系统(15)参数取为  $a = 37, b = 3, c = 26, d =$

38, 以确保系统进入混沌状态. 通过控制函数(22)来使驱动系统(15)与响应系统(13)达到了自适应投影同步. 图9给出了比例因子 $\beta$ 选取为 $-2$ 时, 系统(15)和(13)达到投影同步时的吸引子.

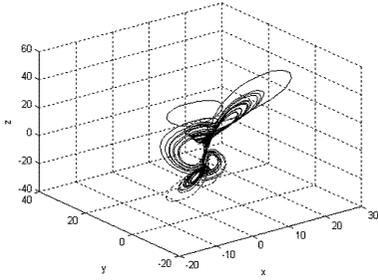


图9  $\beta = -2$  时驱动响应系统的混沌吸引子比较

Fig. 9 Comparison of attractor between drive system and response system with  $\beta = -2$

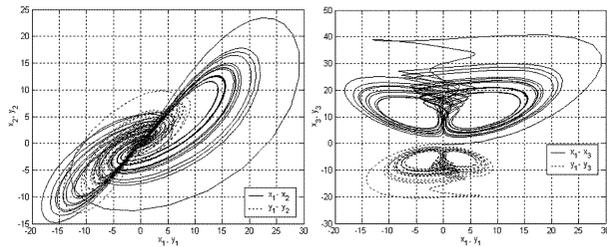


图10 系统(15)和系统(13)的相轨迹在二维平面的投影

Fig. 10 Phase trajectory in the two-dimensional projection plane

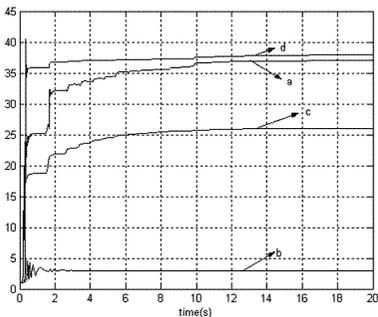


图11 估计参数 $a, b, c, d$ 的变化规律

Fig. 11 the change of  $a, b, c, d$

图10为系统(15)的状态 $x_i (i=1, 2, 3, 4)$ 和系统(13)的状态 $y_i (i=1, 2, 3, 4)$ 之间的投影同步仿真曲线. 由图10可见, 系统(15)状态矢量的幅值分别是系统(13)的2倍, 两系统的相位为反相, 即系统(15)和系统(13)的吸引子按指定的比例因子达到了投影同步.

自适应参数的初始值为 $(\hat{a}(0), \hat{b}(0), \hat{c}(0), \hat{d}(0)) = (1, 1, 1, 1)$ . 图11显示了估计参数 $a, b, c, d$ 的变化规律. 由以上图可知两系统渐近实现投影同步时, 且当 $t \rightarrow \infty$ 时, 参数未知系统的参数值最终趋向 $a=37, b=3, c=26, d=38$ .

## 5 结论

提出了一个新的四维自治类新混沌系统. 首先在整数阶下理论分析了该系统的动力学特性, 通过计算系统的时间序列的 Lyapunov 指数谱、Lyapunov 维数、分岔图等研究了系统的动力学特性. 利用数值仿真、功率谱密度分别分析了当参数固定时, 新混沌系统随微分算子阶数变化时的动力学特性, 得出了分数阶系统随系统参数和系统阶数变化而出现混沌状态的规律, 研究了分数阶系统通向混沌的道路. 当微分算子阶数为 0.85 时, 分数阶新系统随参数变化经短暂混沌和边界转折点分叉而进入混沌. 针对一类结构部分未知分数阶混沌系统, 基于 Chebyshev 正交函数神经网络, 利用稳定性理论<sup>[14]</sup>和分数阶 PI 滑模面构造方法设计了一种新型自适应正交神经网络非线性观测器, 实现了分数阶新混沌系统的投影同步. 数值仿真验证了稳定性理论的准确性及控制器设计方法的有效性.

## 参 考 文 献

- 苑学梅, 陈博文, 魏杰, 马茜. 混沌的 Liénard 系统的鲁棒同步及应用. 动力学与控制学报, 2010, 8(2): 128 ~ 131 (Yuan X M, Chen B W, Wei J, Ma Q. Robust control synchronization and application of chaotic Liénard systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(2): 128 ~ 131 (in Chinese))
- Park J H. Synchronization of Genesio chaotic system via backstepping approach. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 27(4): 1369 ~ 1375
- Wang F Q, Liu C X. Synchronization of unified chaotic system based on passive control. *Physica D*, 2007, 225(11): 55 ~ 60
- Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. *J Atmos Sci*, 1963, 20: 130 ~ 141
- 刘杰, 李新杰, 何小亚, 董鹏真. 分数阶超混沌系统的线性广义同步观测器设计. 动力学与控制学报, 2009, 7(3): 245 ~ 251 (Liu J, Li X J, He X Y, Dong P Z. Linear generalized synchronization observer design of the fractional hyperchaotic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(3): 245 ~ 251 (in Chinese))
- Peng G J, Jiang Y L, Chen F. Generalized projective synchronization of fractional order chaotic systems. *Physica A*, 2008, 387(14): 3739 ~ 3746
- 刘崇新. 一个超混沌系统及其分数阶电路仿真实验. 物

- 理学报,2007,56(12):6865~6873(Liu C X. A hyper-chaotic system and its fractional order circuit simulation. *Acta Physica Sinica*, 56(12):6865~6873( in Chinese))
- 8 Zhou S B, Li H, Zhu Z Z. Chaos control and synchronization in a fractional neuron network System. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008,36(4):973~984
- 9 陈保颖,张家军,苑占江. 分数阶 Rucklidge 混沌系统的同步研究. 动力学与控制学报,2010,8(3):234~238(Chen B Y, Zhang J J, Yuan Z J. Synchronization of chaotic fractional order Rucklidge systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2010,8(3):234~238( in Chinese))
- 10 Ge Z M, Hu M Y. Chaos excited chaos synchronizations of integral and fractional order generalized vanderpol system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008,36(3):592~604
- 11 廖少锴,张卫. 分数阶 Duffing 振子的动力学研究. 动力学与控制学报,2008,6(2):122~125(Liao S K, Zhang W. Dynamics of fractional duffing oscillator. *Journal of Dynamics and Control*, 2008,6(2):122~125( in Chinese))
- 12 Matignon D. Stability results on fractional differential equations with applications to control processing. Lille, France: IMACS, IEEE-SMC, 1996:963~968
- 13 Ogata K. Modern control engineering, Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall, 1990
- 14 胡建兵,韩焱,赵灵冬. 一种新的分数阶系统稳定理论及在 back-stepping 方法同步分数阶混沌系统中的应用. 物理学报,58(4):2235~2239(Hu J B, Han Y, Zhao L D. A novel stability theorem for fractional systems and its applying in synchronizing fractional chaotic system based on back-stepping approach. *Acta Physica Sinica*, 58(4):2235~2239( in Chinese))
- 15 王宏伟,于双和. 基于 Chebyshev 正交函数神经网络的混沌系统鲁棒自适应同步. 控制理论与应用,26(10):1100~1104(Wang H W, Yu S H. Robust adaptive synchronization of chaotic systems based on Chebyshev orthogonal function neural network. *Control Theory & Applications*, 26(10):1100~1104( in Chinese))
- 16 CHIEH F. Properties and performance of orthogonal neural network in function approximation. *International Journal of Intelligent Systems*, 2001,16(12):1377~1392

## A CLASS OF 4-D CHAOTIC SYSTEMS WITH FRACTIONAL ORDER AND PROJECTIVE SYNCHRONIZATION\*

Huang Suhai

(School of Science, HuaiHai Institute of Technology, Lianyungang 222005, China)

**Abstract** A new four-dimensional autonomous chaotic system was presented. First, some basic dynamical properties of this system with integer order were studied. The dynamic characteristics of the fractional-order system varying with the differential operator orders with fixed parameter are analyzed by numerical simulation and the power spectrum. The results show that, with the variation of system parameter at a differential operator order of 0.85, the fractional-order new system enters into chaotic state by transient chaos and boundary crisis bifurcation. Based on Chebyshev orthogonal neural network, a stability theorem<sup>[14]</sup> and the fractional-order PI switching surface, a novel adaptive nonlinear observer with a compensator was designed for a class of fractional-order chaotic system, where the nonlinear portion of the structure cannot be evaluated. The projective synchronization of fractional order new chaotic system can be achieved. Numerical simulation certifies the effectiveness of the method.

**Key words** fractional order, dynamic characteristic, projective synchronization, Chebyshev orthogonal polynomials, the fractional-order switching surface, compensator