

稳定性切换点法在时滞系统的鲁棒稳定性中的应用

狄成宽

(南京工程学院应用数学研究所,南京 211167)

摘要 讨论了一类参数与时滞相关的时滞系统的鲁棒稳定性.在“稳定性切换几何判据法”的基础上提出了“稳定性切换点法”,使用该方法可得到相应方程零解稳定的参数变化区域.针对向日葵方程这一实际例子,利用文中所提出的方法并结合 Maple 软件作图可以容易地得到稳定性区域和不稳定性区域以及两区域的分界线、Hopf 分岔点等;进一步通过对时滞大小的调控得到方程零解的鲁棒稳定性.

关键词 时滞, 稳定性切换, 切换点, 稳定性区域, 鲁棒稳定性

引言

稳定性是许多实际系统的基本要求.由于系统的约化,系统参数测量误差以及环境变化等原因,常常难以得到系统参数的精确值,但可以确定它们在一定范围(如给定参数取值区间)内取值;实际系统常常要求稳定性应具有鲁棒性,使得系统在规范范围内对参数的任意组合总是稳定的^[1,2,3,4].鲁棒稳定性是目前时滞系统控制论所关心的中心问题之一,通常采用 Lyapunov 函数(泛函)法或特征根分析法来研究.前者中,特别是以 Lyapunov 方法为基础的 LMI(线性矩阵不等式)方法近年来得到了较大的发展,如文[5][6]等采用线性矩阵不等式法讨论了一类不确定性的区间系统的鲁棒稳定性问题;文[7][8][9]则用向量比较方法分析了线性时变系统的区间稳定性和鲁棒稳定性,得到了一些结果;而文[10]利用矩阵测度研究时变系统的区间稳定性和具有非线性时变摄动的线性时变系统的鲁棒稳定性,所得到的稳定性判别准则与文[7-9]相比互有优势.特征根分析法的重要进展是棱边定理;对固定时滞, Fu 等人证明了一个棱边定理^[11]:要使滞后型时滞系统的拟多项式组成的多胞形稳定当且仅当其各棱边稳定.这一结果又被推广到中立型时滞系统^[12].但对于某些时滞系统,特别是参数与时滞相关的时滞系统,其鲁棒稳定性仍是一个困难的研究课题,这方面也少见国内外的研究报告.

本文研究滞后型时滞系统平衡点的鲁棒稳定性,对应的特征方程具有形式

$$P(\lambda, \tau) + Q(\lambda, \tau)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (1)$$

其中 $P(\lambda, \tau), Q(\lambda, \tau)$ 为关于 λ 的多项式,且 $\deg P(\lambda, \tau) > \deg Q(\lambda, \tau)$. 假定特征拟多项式 $P(\lambda, \tau) + Q(\lambda, \tau)e^{-\lambda\tau}$ 依赖于参数 $a, b, c \dots$ 等和时滞 τ . 已知当 $a = a_0, b = b_0, \tau = \tau_0$ 时,所有特征根都具有负实部,从而系统对应的平衡点是渐近稳定的.考虑到系统参数值 $a = a_0, b = b_0, \tau = \tau_0$ 有一定程度(如 $r\%$)的误差,那么参数在各自区间

$$a \in [\underline{a}, \bar{a}] : [a_0(1-r\%), a_0(1+r\%)]$$

$$b \in [\underline{b}, \bar{b}] : [b_0(1-r\%), b_0(1+r\%)]$$

$$\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] : [\tau_0(1-r\%), \tau_0(1+r\%)]$$

取值;鲁棒稳定性分析就是要判断是否对所有 $a \in [\underline{a}, \bar{a}], b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ 以及 $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$, 特征拟多项式的根总是具有负实部.对于(1)式 Beretta 和 Kuang^[13]提出了一种稳定性分析的几何方法;在此基础上,我们提出了一种称之为“稳定性切换点法”的方法来确定时滞系统的稳定性区域,进而研究其鲁棒稳定性;并将该方法应用于向日葵方程中,探讨其鲁棒稳定性.

本文安排如下:第一部分利用稳定性切换几何判据法提出了“稳定性切换点法”;第二部分根据第一部分所提出的方法讨论了向日葵方程零解的稳定性区域并进一步讨论其鲁棒稳定性;最后是总结.

1 稳定性切换点方法

文[13]针对特征方程(1)提出了一种几何判别法,即引入一辅助函数

$$S_j(\tau) = \tau - \tau_j, j=0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

通过该函数的零点求出可能切换点 τ 的值,并根据相关结论由 $\frac{dS_j}{d\tau}$ 在临界点处符号即可判别稳定性切换方向;进而求出切换点、稳定性区间和不稳定性区间.由稳定性切换公式(2)可求得稳定性切换点.对于 S_j 的零点 τ 值,即 $S_j=0$;理论上 τ 总可以表示为

$$\tau = \tau(a, b, c, \dots) \quad (3)$$

即切换点 τ 值是 a, b, c 等参数的函数.在使 S_j 有意义 a, b, c 定义域范围内,根据隐函数理论可知,函数 $\tau = \tau(a, b, c, \dots)$ 是连续的.

如果通过公式(2)可证明原方程的零解只有唯一稳定性切换点,那么我们可以预先设定一个切换点 τ_0 值代入(3)式,这样便得到一个关于参数 a, b, c 等的方程,作出该方程对应曲线或曲面图等,这些曲线或曲面将参数平面或空间划分为一系列的小区域.在该曲线图上点的参数所决定的切换点值为 τ_0 ,而在每一个区域内,参数所决定的切换点值应保持始终 $\tau > \tau_0$ 或 $\tau < \tau_0$.然而我们感兴趣的是 $\tau > \tau_0$ 的那一侧;因为在这一区域内,参数 a, b, c 的取值使得切换点值大于 τ_0 ,当取 $\tau \leq \tau_0$ 时显然在该区域内方程的零解是稳定的,这样我们就得到了参数的稳定性区域.这里为说明“零解只有唯一稳定性切换点”的有效性,根据文[13]中切换点的判别法定理,我们可得如下结论:

推论 1: 如果 S_j 满足不等式 $S'_j = \frac{dS_j}{d\tau} > 0$,则特征方程(1)对应的时滞方程零解只有唯一稳定性切换点,且该切换点由 $S_0=0$ 产生.

由推论 1 可得:如果稳定性区域的边界曲线具有单调性,则对于参数的一个给定区间,可以反过来求出相应的 τ_0 值,使当 $\tau \leq \tau_0$ 时、在这些区间内零解是稳定的.这样即得到零解的鲁棒稳定性区间.

2 向日葵方程的鲁棒稳定性

2.1 向日葵方程的稳定性讨论

我们先利用稳定性切换几何判据法^[13]来讨论向日葵方程零解的稳定性.文[14]讨论了如下的向日葵方程 Hopf 分岔的存在性和周期解的全局存在性条件.

$$\ddot{x} + \frac{a}{\tau}\dot{x} + \frac{b}{\tau}\sin x(t - \tau) = 0 \quad (a > 0, b > 0) \quad (4)$$

其线性化形式的特征方程为

$$\lambda^2 + \frac{a}{\tau}\lambda + \frac{b}{\tau}e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (5)$$

当 $\lambda > 0$ 时,上式可同解变形为

$$\tau\lambda^2 + a\lambda + be^{-\lambda\tau} = 0 \quad (6)$$

对(6)式而言,当 $\tau=0$ 时 $\lambda = -\frac{b}{a} < 0$;于是当 τ 在 $\tau=0$ 的充分小的领域内时,由(6)式确定的 λ 应满足 $\text{Re}(\lambda) < 0$.由于(5)式与(6)式在 $\tau > 0$ 时的同解性,故对于充分小的 τ , (5)式的 λ 应满足 $\text{Re}(\lambda) < 0$,即当 $\tau \rightarrow 0$ 时,有 $\text{Re}(\lambda) < 0$.所以对充分小的 τ 值(4)式的平衡点是稳定的.根据文[15]也同样可得:当 $\tau \rightarrow 0$ 时,有 $\text{Re}(\lambda) < 0$;令 $\lambda = i\omega$ 代入(5)式,可得

$$-\omega^2\tau + ia\omega + b(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau) = 0$$

分离实部与虚部并利用 $\sin^2\omega\tau + \cos^2\omega\tau = 1$ 可得

$$F(\omega, \tau) = \tau^2\omega^4 + a^2\omega^2 - b^2 = 0 \quad (7)$$

由文[13]可定义函数

$$S_j = \tau - \frac{\theta + j2\pi}{\omega}, \quad j=0, 1, 2, \dots$$

并且

$$\tan\theta = \frac{a}{\tau\omega} \quad (8)$$

解方程(7),得

$$\omega^2 = \frac{-a^2 + \sqrt{a^4 + 4\tau^2 b^2}}{2\tau^2} \quad (9)$$

对 τ 求导,得

$$\omega\omega' = \frac{a^2\sqrt{a^4 + 4\tau^2 b^2} - a^4 - 2\tau^2 b^2}{2\tau^3\sqrt{a^4 + 4\tau^2 b^2}} \quad (10)$$

令 $S_j=0$,求得零点记 τ_j ,则得 $\theta + j2\pi = \tau\omega$. S_j 对 τ 求导可得

$$S'_j = 1 + \frac{\omega'}{\omega^2}(\theta + j2\pi) - \frac{1}{\omega}\theta' = 1 + \frac{\tau\omega'}{\omega} - \frac{1}{\omega} \cdot$$

$$\frac{-a}{a^2 + \tau^2\omega^2}(\omega + \tau\omega') = \frac{\omega^2 + \tau\omega\omega'}{\omega} \left(1 + \frac{a}{a^2 + \tau^2\omega^2}\right)$$

由(9)式及(10)式可得

$$\omega^2 + \tau\omega\omega' = \frac{\sqrt{a^4 + 4\tau^2 b^2} - a^2}{2\tau^2} + \tau \frac{a^2 \sqrt{a^4 + 4\tau^2 b^2} - a^4 - 2\tau^2 b^2}{2\tau^3 \sqrt{a^4 + 2\tau^2 b^2}} = \frac{2\tau^2 b^2}{2\tau^2 \sqrt{a^4 + 4\tau^2 b^2}} > 0$$

因为 $a > 0$, 所以 $S'_j > 0$; 由前面推论 1 可知, S_0 的零点即为方程 (4) 的第一个稳定性切换点且也是唯一的. 由 $S_0 = \tau - \frac{\theta}{\omega} = 0$, 得 τ, a, b 的方程为 $\theta = \tau\omega$, 把 $\tan\theta = \tan(\tau\omega)$ 代入 (8) 式, 得 τ, a, b 的方程为:

$$\frac{a}{\tau\omega} = \tan(\tau\omega) \tag{11}$$

结合 (9), 方程 (11) 确定一个隐函数 $\tau = \tau(a, b)$ 且连续.

2.2 向日葵方程的稳定性区域

现在考虑对任意的 τ , 记

$$H(a, b, \tau) = \sqrt{\sqrt{a^4 + 4\tau^2 b^2} - a^2} \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\sqrt{a^4 + 4\tau^2 b^2} - a^2}\right) - \sqrt{2}a = 0 \tag{12}$$

对于方程 (12), 我们有下列两个结论:

命题 1: 方程 $H(a, b, \tau) = 0$ 所确定的 τ 对 b 的函数 $\tau = \tau(a, b)$ 的偏导数 $\partial\tau/\partial b < 0$.

证: 由隐函数理论求导得: $\frac{\partial\tau}{\partial b} = -\frac{H_b}{H_\tau} = -\frac{\tau}{b} < 0$, 即 τ 是 b 递减函数, 则结论成立.

该命题即说明了越靠近横轴 a 的下端区域部分其切换点值 τ 越大.

引理: 函数 $f(x) = \frac{\tan x}{x} + \sec^2 x$, 当 $x > 0$ 时, 有 $f(x) > 0$.

证: $f(x) = \frac{x + \sin x \cos x}{x \cos^2 x}$, 令 $\varphi(x) = x + \sin x \cos x$,

则 $\varphi(0) = 0, \varphi'(x) = 1 + \cos 2x \geq 0$, 即 $\varphi(x)$ 为递增函数, 所以当 $x > 0$ 时, $\varphi(x) > \varphi(0)$. 因此当 $x > 0$ 时, 有 $f(x) > 0$.

命题 2: 方程 $H(a, b, \tau) = 0$ 所确定的 b 对 a 的偏导数 $\partial b/\partial a$, 即 $H=0$ 确定了一个 b 对 a 的递增函数.

证: 我们记 $\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{a^4 + 4\tau^2 b^2} - a^2} = x$, 由引理及隐函数理论求导可得

$$\frac{\partial b}{\partial a} = -\frac{H_a}{H_b} = -\frac{a}{2b\tau^2} (\sqrt{a^4 + 4\tau^2 b^2} - a^2) +$$

$$\frac{\sqrt{a^4 + 4\tau^2 b^2}}{2b\tau^2} \left[\frac{\sqrt{2} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{a^4 + 4\tau^2 b^2} - a^2}\right)}{\sqrt{\sqrt{a^4 + 4\tau^2 b^2} - a^2}} + \sec^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{a^4 + 4\tau^2 b^2} - a^2}\right) \right]$$

该结果的前一项大于零, 后一项中括号项为 $\frac{\tan x}{x} + \sec^2 x > 0$, 因此有 $\frac{\partial b}{\partial a} > 0$. 故得命题 2 成立.

当 τ 分别取 2 和 0.5 时, 作出 (12) 式隐函数图形如图 1 和图 2 即可验证两命题的合理性, 其中 a 为横轴, b 为纵轴.

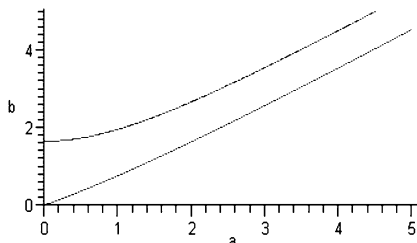


图 1 tau=2 时, 方程 (12) 的图形

Fig. 1 The polt of Eq(12) for tau=2

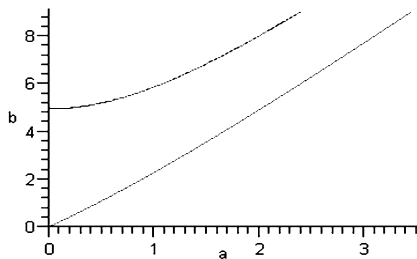


图 1 tau=0.5 时, 方程 (12) 的图形

Fig. 1 The polt of Eq(12) for tau=0.5

为讨论方程 (4) 零解的稳定性区域, 取 $\tau = 1$ 代入 (12) 式, 得到一个 a, b 的方程, 记为

$$H(a, b, 1) = h(a, b) = \sqrt{\sqrt{a^4 + 4\tau^2 b^2} - a^2} \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sqrt{a^4 + 4\tau^2 b^2} - a^2}\right) - \sqrt{2}a = 0 \tag{13}$$

通过 Maple 软件对方程 (13) 作图, 如下图 3. 由于 $a > 0, b > 0$, 因此我们仅在第一象限考虑稳定性问题.

如图 3 所示: 曲线 $h(a, b) = 0$ 把第一象限分为三个区域部分, 记为 I、II、III. 我们在区域 I 部分取点 $A(1, 3)$, 由公式 $S_0 = \tau - \tau_0 = 0$, 解得 $\tau = 0.37831$;

我们在区域 II 部分取点 $B(1, 2)$, 同样可解得

切换点为: $\tau = 0.56746$;

在区域Ⅲ部分取点 $C(2, 1.2), D(3, 2)$, 分别解得切换点 $\tau = 2.03842$ 和 1.9248 .

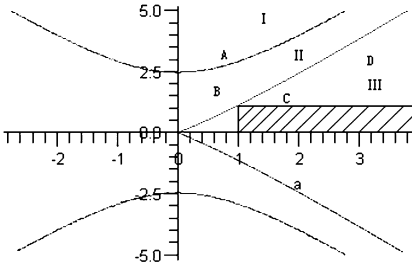


图3 切换点 $\tau = 1$ 的 a, b 关系曲线图, 横轴为 a 、纵轴为 b
 Fig. 3 The plot of a vs b with $\tau = 1$, a being horizontal axis, b being vertical axis

由上述讨论可知, 图中区域Ⅲ部分即为方程(4)对于参数 a, b 变化范围的稳定性区域, 这里 $\tau \in [0, 1]$. 因此当 $\tau = 1$ 时, 区域Ⅲ是方程(4)零解的稳定性区域、而区域Ⅰ和Ⅱ是不稳定性区域, 那么区域Ⅱ与Ⅲ的边界、即 $h(a, b) = 0$ 上的点将产生 Hopf 分岔. 论文[16]中讨论了向日葵方程在点 $\tau = 1, a = \frac{\sqrt{3}}{18}\pi, b = \frac{\sqrt{3}}{54}\pi^2$ 和 $\tau = 1, a = 1.1814, b = 2.193$ 的 Hopf 分岔问题, 而这两点正满足方程.

我们取 $\tau = 1, a = 1$ 代入方程(12), 解得点坐标为 $b = 1.13491$, 此即为区域Ⅱ与Ⅲ的边界曲线上的一点. 由此可得一稳定性区间为

$$\tau \in (0, 1], a \times b = [1, +\infty) \times [0, 1.1349]$$

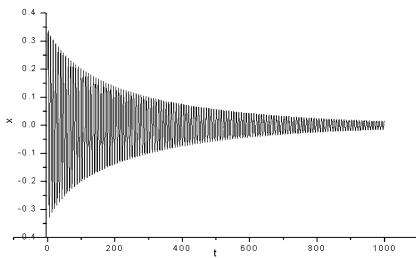


图4 当 $a = 1, b = 1.1, \tau = 1$ 时, $x = 0$ 的时间历程图, 即零解是稳定的, 但由于参数的取值紧靠鲁棒区间的边缘, 所以从图中可看出收敛速度很慢

Fig. 4 Time histories of $x = 0$ with $a = 1, b = 1.1, \tau = 1$ and the trivial solution is stable

我们固定 $\tau = 1, a = 1$, 而分别取 $b = 1.1$ 和 1.2 , 这样的取值分别落入 τ, a, b 的稳定性区间内和 外. 把 $\tau = 1, a = 1, b = 1.1$ 代入方程(4)可作其时间历程图如图4. 同样把 $\tau = 1, a = 1, b = 1.2$ (此时 $a = 1, b = 1.2$ 落入图3中区域Ⅱ部分) 代入方程(4)

可得时间历程图如图5.

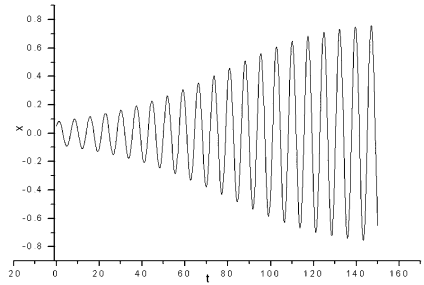


图5 当 $a = 1, b = 1.2, \tau = 1$ 时, $x = 0$ 的时间历程图, 即零解不稳定
 Fig. 5 Time histories of $x = 0$ with $a = 1, b = 1.2, \tau = 1$, and the trivial solution is unstable

2.3 鲁棒稳定性

我们取定如下 a, b 的分布区间:

$$a \times b = [2, +\infty) \times [0, 1.5]$$

这样的矩形域其左上角点为 $(2, 1.5)$, 代入公式 $S_0 = \tau - \frac{\theta}{\omega}$, 计算得切换点为 $\tau_0 = 1.631$, 于是根据命题1及2可求得方程(4)平衡点的鲁棒稳定性区间为

$$\tau \in (0, 1.631), a \times b = [2, +\infty) \times [0, 1.5]$$

对于区间内外参数的取值, 可作方程(4)零解的时间历程图如下: 图6 - 图10.

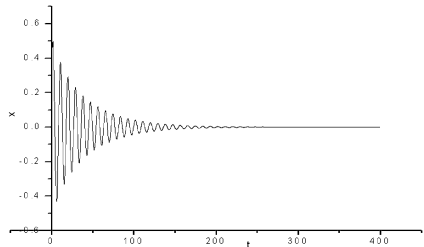


图6 $\tau = 1.5, a = 2, b = 1.48$

Fig. 6 $\tau = 1.5, a = 2, b = 1.48$

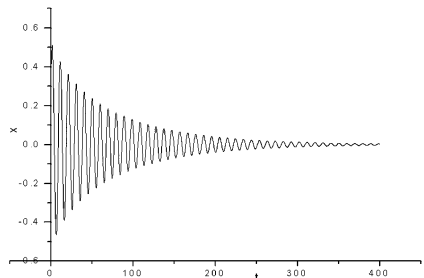


图7 $\tau = 1.63, a = 2.05, b = 1.46$

Fig. 7 $\tau = 1.63, a = 2.05, b = 1.46$

在上述得到的稳定性区间

$$\tau \in (0, 1.631), a \times b = [2, +\infty) \times [0, 1.5]$$

内取值 $\tau = 1.2, a = 2, b = 1$, 这是方程(4)零解的一

个稳定点,若该值有 $\pm 20\%$ 变动时,我们要检验系统对 $a \in [1.6, 2.4], b \in [0.8, 1.2], \tau \in [0.96, 1.44]$ 的稳定性.

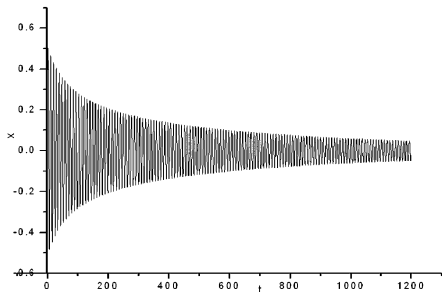


图8 $\tau = 1.6, a = 2, b = 1.5$

Fig. 8 $\tau = 1.6, a = 2, b = 1.5$

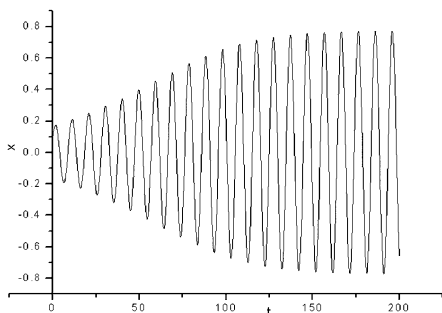


图9 $\tau = 1.64, a = 1.9, b = 1.5$

Fig. 9 $\tau = 1.64, a = 1.9, b = 1.5$

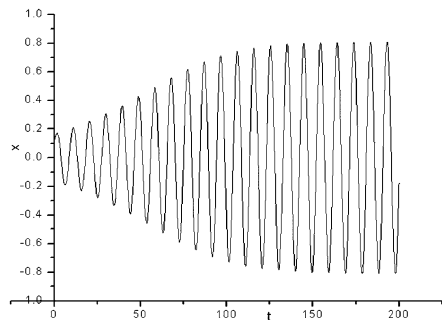


图10 $\tau = 1.64, a = 2, b = 1$

Fig. 9 $\tau = 1.64, a = 2, b = 1$

首先把 a, b 变化范围矩形域的左上角点 $(1.6, 1.2)$ 代入公式 $S_0 = \tau - \frac{\theta}{\omega} = 0$, 计算得切换点 $\tau_0 = 1.5893$. 由第一部分的讨论及推论 1 可知: 当 $\tau \leq \tau_0$ 时, a, b 的取点 $(1.6, 1.2)$ 依然使系统零解保持稳定性; 而对于 $a \geq 1.6, b \leq 1.2$, 由命题 1 和 2 可知此时不可能再产生切换点; 故可得方程 (4) 零解对于 $\tau = 1.2, a = 2, b = 1$ 的变化幅度为 $\pm 20\%$ 的鲁棒稳定性区间为:

$$\tau \in [0.96, 1.44], a \in [1.6, 2.4], b \in [0.8, 1.2].$$

3 结论

关于时滞系统平衡点的局部稳定性, 自从文 [17] 提出了稳定性切换原理以来, 引起了很大的关注, 也给相应稳定性的讨论带来了很大的方便. 文 [18] 讨论了参数与时滞相关的时滞系统稳定性的最终稳定性问题, 得出最终可能稳定也可能不稳定的结论. 而参数与时滞无关的系统若发生稳定性切换, 则切换次数一定有限, 且最终不稳定^{[19][20]}. 可见参数与时滞有无关系对方程零解的最终稳定性影响有着巨大的差异. 这也说明了前者稳定性的讨论更为困难、更加复杂, 后者有关鲁棒稳定性的讨论有很多, 可见文 [3, 4, 6, 11] 等; 而前者使用稳定性切换原理这一工具讨论鲁棒稳定性的文章还未见到. 因此本文所讨论的参数与时滞相关的时滞系统的稳定性区域和鲁棒稳定性这一问题, 如前所述: 本身具有挑战性和重大意义.

本文所提出的“稳定性切换点法”, 并通过对向日葵方程这一参数与时滞相关的时滞系统的例子得到了其零解稳定性的参数变化区域, 说明了它对于参数与时滞相关的时滞系统稳定性区域及其鲁棒稳定性的讨论的有效性. 同时也要注意该方法有待进一步发展, 也就是说在该方法的应用中对于非恒为正值是值得进一步探讨的.

参 考 文 献

- 1 Hu H Y, Wang Z H. Dynamics of controlled mechanical systems with delayed feedback. Berlin: Springer-Verlag, 2002
- 2 Huang L. Fundamentals of stability and robustness. Beijing: Science Press, 2003
- 3 Wang Z H, Hu H Y, Wang H L. Robust stabilization to non-linear delayed systems via delayed state feedback: the averaging method. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 279: 937 ~ 953
- 4 狄成宽. 一阶时滞系统的鲁棒稳定性区域分析. *动力学与控制学报*, 2010, 8(2): 132 ~ 136 (Di Chengkuan. Analysis for robust stability of one order delay differential equations. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(2): 132 ~ 136 (in Chinese))
- 5 Liu P L, Su T J. Robust stability of interval time-delay system with delay-dependence. *System & Control Letters*,

- 1998,33 :231 ~ 239
- 6 H Chapellat, M Dahlch, S p Bhattacharyya. Robust stability under structured and unstructured Perturbations. *IEEE Trans Autom Control*, 1990,35(10):1100 ~ 1108
- 7 施鼎汉, 曾晓军. 线性时变系统的区间稳定性与鲁棒稳定性. 控制理论与应用, 1994,01:34 ~ 39 (Shi Dinghan, Zeng Xiaojun. Interval stability and robust stability of linear time-varying system. *Control Theory and Applications*, 1994,1:34 ~ 39(in Chinese))
- 8 Liao X X. Necessary and sufficient conditions for a class of interval Matrices. *Int. J. Control*, 1987,45(1):211 ~ 214
- 9 Kaining W, Anthony N Michel. On sufficient conditions for the stability of interval Matrices. *System & Control Letters*, 1993,20(5):345 ~ 351
- 10 孙继涛. 线性时变系统的区间稳定性和鲁棒稳定性. 信息与控制, 1999,28(1):1 ~ 4 (Sun Jitao. Interval stability and robust stability of linear time-varying system. *Information and Control*, 1999,28(1):1 ~ 4(in Chinese))
- 11 M Y Fu, A W Olbrot, M Polis. Robust stability for time-delay systems; the edge theorem and graphical tests. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989,34: 813 ~ 820
- 12 Q L Han. Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type. *Automatic*, 2002,38: 71 ~ 723
- 13 E Beretta, Y Kuang. Geometric stability switches criteria in delay differential systems with delay dependent parameters. *SIAM. J. Math. Anal*, 2002, 33:1144 ~ 1165
- 14 A S Solnalinis. Periodic solutions the sunflower equations. *Quartely of Appli Math*, 1978, 4: 465 ~ 478
- 15 Marcos Lizana. Global analysis of the sunflower equation with small delay. *Nonlinear Analysis*, 1999, 36:697 ~ 706
- 16 Li J Y. Hopf bifurcation of the sunflower equation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, 10(4):2574 ~ 2580
- 17 K L Cooke, Z Grossman. Discrete delay, distributed delay and stability switches. *J. Math. Anal. Appl.* 1982, 86: 592 ~ 627
- 18 Li J Q, Ma Z E. Ultimate stability of a type of characteristic equation with delay dependent parameters. *J. Syst. Sci & Complexity*, 2006, 19: 137 ~ 144
- 19 Kuang Y. Delay differential equation with applications to population. Dynamics. New York: Academic Press, 1993
- 20 Wang Z H, Hu H Y. Stabilization of vibration systems via delayed state difference feedback. *Journal of Sound and Vibration*, 2006,296:117 ~ 129

THE APPLICATION OF STABILITY SWITCHES POINT METHOD IN THE ROBUST STABILITY OF A CLASS OF TIME - DELAY SYSTEM

Di Chengkuan

(Nanjing Institute of Technology Institute of Applied Mathematics, Nanjing 211167, China)

Abstract The robust stability for a class of time-delay system with delay dependent parameters was discussed. On the basis of “geometric stability switches criteria”, a new stabilization criterion “stability switches point method” was established. Using the new criterion, the region of the parameters which make the equilibrium asymptotically stable can be obtained easily. As an application, the sunflower equation was studied, and the result shows that one can obtain not only the stable region but also the Hopf bifurcation points with the help of mathematic software: Maple. Moreover, the robust stability of the equilibrium can be reached by adjusting the time delay to proper values.

Key words time-delay, switches points, stability switches, stable region, robust stability