

多自由度局部非线性系统频域响应 及非线性位置的辨识方法*

姚红良 韩清凯 冯霏 闻邦椿

(东北大学机械工程与自动化学院, 沈阳 110004)

摘要 研究了因与外部接触而发生局部非线性的动力学系统. 基于 NOFRF 理论, 对系统中出现的各次谐波分量进行研究, 推导出了该类系统各自由度各阶谐波分量的表达式. 证明了该类动力学系统中各自由度之间高次谐波分量的与原线性系统动柔度矩阵的相关元素成正比关系, 并据此提出了一种简洁的局部非线性位置的辨识方法. 采用这种方法, 可以通过结构体中任意两个部位之间的高次谐波分量的比值关系, 经过一次谐波激励而辨识出非线性的具体位置. 对一个多自由度系统进行数值仿真, 验证了该方法的有效性.

关键词 局部非线性, 非线性输出频率响应函数, 高次谐波, 辨识

引言

工程中的大部分结构需要用多自由度模型来模拟. 很多情况下, 结构本身为线性或近似线性, 但是因为接触等原因, 会产生局部非线性. 这些局部非线性会使结构的动力学特性表现出非线性特性, 出现二倍频、三倍频等高次谐波^[1].

典型的因接触而产生非线性的工程实例有: 齿轮接触中因齿侧间隙发生碰撞^[2]; 梁或桁架结构等与外界发生接触^[3]等. 利用频域方法进行局部非线性系统的机理研究, 可以很方便地求解出系统中各自由度的各阶频率分量的构成, 从而有利于该类系统的辨识, 但是目前的非线性系统频域研究尚不完善, 传统的分析方法, 如渐近法等摄动方法, 仅能分析一维或二维非线性系统; 谐波平衡法和增量谐波平衡法等, 在自由度较多时需要处理系数方程的迭代求解. 因此, 迫切需要研究新的能够适用于高维非线性系统的频域分析方法.

非线性输出频率响应函数 (NOFRF), 是新近提出的一种基于 Volterra 级数, 用来分析非线性系统的方法^[4,5]. 采用该方法能够简便地求得非线性系统的各阶频率组成部分. 目前该方法在局部非线性多自由度系统的机理分析和响应等方面都得到了应用. Peng 等应用 NOFRF 方法分析了单自由度和含内部非线性的链式多自由度系统的动力学问题, 并提出了基于 NOFRF 的局部非线性位置的辨

识方法^[6,7]. 这些研究, 有力地证明了 NOFRF 在局部非线性系统理论分析和辨识中的有效性.

因与外界接触而形成局部非线性的多自由度系统在工程中很常见, 从动力学模型角度, 这类局部非线性相当于在原有线性系统中增加了非线性力, 作用点为发生接触的部位, 非线性力的表现形式为分段线性非线性函数或者其它形式的分段函数. 目前对于这类非线性系统, 尚未见应用 NOFRF 方法进行分析的报道. 因此本文针对该类模型, 基于 NOFRF 理论, 对系统中出现的各次谐波分量进行研究, 推导出了该类系统各自由度各阶谐波分量的表达式. 通过研究, 证明了该类动力学系统中各自由度之间高次谐波分量的与原线性系统频率响应函数矩阵的相关元素成正比关系, 并据此提出了一种简洁的局部非线性位置的辨识方法. 采用这种方法, 可以通过结构体中任意两个部位之间的高次谐波分量的比值关系, 经过一次谐波激励而辨识出非线性的具体位置. 对一个多自由度系统进行数值仿真, 验证了该方法的有效性.

1 结构的动力学模型及接触力的多项式拟合

工程中的大多数结构都可以用多自由度动力学模型来描述, 其动力学模型如:

$$M \ddot{Y} + C \dot{Y} + KY = U \quad (1)$$

其中, M 为质量矩阵, C 为阻尼矩阵, K 为刚度矩阵, Y 为振动响应向量, U 为激励向量.

许多情况下,结构会因振动而与外界发生接触,其接触力往往为分段线性非线性函数,其表达式为:

$$F(y) = \begin{cases} k_{\text{nonlinear}}(y - e) & y > e \\ 0 & -e < y < e \\ k_n(y + e) & y < -e \end{cases} \quad (2)$$

其中, k_n 为接触刚度, e 为间隙量.

根据魏尔施特拉斯逼近定理(Weierstrass Approximation Theorem)^[8],形如式2)的分段线性非线性函数可以展开成多项式级数的形式,即.

$$F(y) \approx \sum_{i=1}^N k_{ni} y^i$$

因此,在这一点因接触产生局部非线性的多自由度系统的运动微分方程可以写作下式:

$$MY + CY + KY + K_n(Y) = U \quad (3)$$

其中, $K_n(Y) = [0, \dots, 0, \sum_{i=1}^n k_{ni} y^i, 0, \dots, 0]$, L 为局部非线性的位置. 因为很多情况下,系统的激励为单点的简谐激励,则的表达式为:

$$U = [0, \dots, 0, \overbrace{Ae^{j\omega t}}^{R-1}, 0, \dots, 0] \quad (4)$$

其中 R 为激励位置, A 为激励幅值, ω 为激振频率.

2 简谐激励下局部非线性多自由度系统的非线性输出频率响应函数

根据 Volterra 级数理论,非线性系统中各自由度响应 y_a 可以展开成 Volterra 级数的形式^[9],即:

$$y_a(t) = \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_{an}(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i) d\tau_i = \int_{-\infty}^{\infty} h_{a1}(\tau_1) u(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{a2}(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{a3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) u(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots \quad (5)$$

Lang 等经过研究,得出了非线性系统的输出频率响应函数表达式^[4,5],即对于输入形式为 $u(t) = Ae^{j\omega t + \beta}$ 的系统,其频域响应为:

$$y_a(jk\omega_F)/2 = \sum_{n=1}^{(N-k+1)/2} G_{a,k+2(n-1)}^H(jk\omega_F) \times A_{k+2(n-1)} \quad (k=0, 1, \dots, N) \quad (6)$$

$$G_{a,n}^H(j(-n+2l)\omega_F) = H_{an}(\underbrace{j\omega_F, j\omega_F, \dots, j\omega_F}_n, \underbrace{-j\omega_F, -j\omega_F, \dots, -j\omega_F}_{n-l}) \quad (7)$$

$$A_n(j(-n+2l)\omega_F) = \frac{1}{2^n l! (n-l)!} |A|^n e^{j(-n+2l)\beta} \quad (8)$$

因此,只要求出各阶 Volterra 级数的核 $H_{a1}(\omega_1)$ 、 $H_{a2}(\omega_1, \omega_2)$ 、 $H_{a3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 、 \dots ,即可求得各自由度的频率域响应.

各阶 Volterra 级数核可以通过谐波检测的方法求得^[7].对于形如式3)的多自由度系统 J ,假设激励点在位置 L ,局部非线性在位置,则采用谐波检测的方法,可以求得各阶 Volterra 级数的核如下:

$$\begin{cases} H_{11}(\omega_1) \\ H_{21}(\omega_1) \\ \dots \\ H_{n1}(\omega_1) \end{cases} = E_1(j\omega_1) \{ \overbrace{0 \dots 0}^{L-1} \quad 1 \quad \overbrace{0 \dots 0}^{n-L} \}$$

$$\begin{cases} H_{1N}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \\ H_{2N}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \\ \dots \\ H_{nN}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \end{cases} = E_1(j(\omega_1 + \omega_2 + \dots +$$

$\omega_N)) \times \{ \overbrace{0 \dots 0}^{L-1} \quad \Lambda_N(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \quad \overbrace{0 \dots 0}^{n-L} \}^T \quad (9)$ 其中, $\Lambda_N(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ 为由 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ 组成的函数.

3 基于非线性输出频率响应函数特性的局部非线性辨识方法

3.1 局部非线性多自由度系统高次谐波的性质

由于:

$$E_1(j\omega) = [K + \Delta K + j\omega C - \omega^2 M]^{-1} = \frac{A_1^*}{|K + \Delta K + j\omega C - \omega^2 M|}, A_1^* \text{ 为 } K + \Delta K + j\omega C - \omega^2 M \text{ 的伴随矩阵. 在 } i=j=L \text{ 时, } \Delta K_{ij} = f(k_l), \text{ 其余位置 } \Delta K_{ij} = 0.$$

可以看出,该类非线性系统除第一阶 Volterra 级数核外,其他的 Volterra 级数核(高阶)的值等于 $E_1(j(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N))$ 的第 L 列乘以一个由 $\Lambda_N(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ 构成的系数,而与激励点位置无关.因此,由第(9)式得出:

$$\frac{H_{iN}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)}{H_{kN}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)} = \frac{E_{iL}(j(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N))}{E_{kL}(j(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N))} \quad (10)$$

根据式(10),结合式(6) - (8),可以得出以下结论:

$$\frac{Y_i(jk\omega)}{Y_k(jk\omega)} = \frac{E_{iL}(jk\omega)}{E_{kL}(jk\omega)} \quad k > 2 \quad (11)$$

考虑原线性系统的频响函数,设 $E(j\omega) = [K + j\omega C - \omega^2 M]^{-1} = \frac{A^*}{|K + j\omega C - \omega^2 M|}$, A^* 为 $K + j\omega C$

$-\omega^2 M$ 的伴随矩阵. 则 $A_{iL}^* = A_{iL}^*$, 即两个伴随矩阵在第 L 列相等. 因此:

$$\frac{Y_i(jk\omega)}{Y_k(jk\omega)} = \frac{E_{iL}(jk\omega)}{E_{kL}(jk\omega)} = \frac{A_{iL}^*}{A_{kL}^*} = \frac{A_{iL}^*}{A_{kL}^*} = \frac{E_{iL}(jk\omega)}{E_{kL}(jk\omega)} \quad (12)$$

由此推导出该类局部非线性多自由度系统响应的一个重要关系, 即: 局部非线性多自由度系统各自由度稳态响应中高次谐波分量之比, 等于原来线性系统动柔度矩阵中第 L 列相应位置元素值之比.

3.2 基于高次谐波的诊断方法

由于局部非线性系统的稳态高次谐波响应满足式(12), 因此提出以下的局部非线性位置辨识方法:

1) 对结构体任意一点进行简谐激励激振或利用结构本身产生的简谐激振, 测得结构体任意两个位置的振动响应, 如梁结构的第一点和最末一点; 求其任一高次谐波分量的值, 如 3 次谐波, 取该两个位置的高次谐波为 $y_1(\omega), y_k(\omega)$;

2) 根据系统的结构参数或经过测试, 求出原线性系统的动柔度矩阵 $E(j\omega)$;

3) 建立下式:

$$\delta = \frac{y_i(\omega)}{y_k(\omega)} - \frac{E_{n,i}(j\omega)}{E_{n,k}(j\omega)} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

4) 求出的 δ 最小时的 n 即为局部非线性的位置.

3.3 诊断方法的数值验证

以图 1 所示的 7 自由度弹簧质量系统为例: 设 $m_i = 1, k_i = 100i, c_i = i$, 假设激振力发生在质量 2 上, 非线性发生在第 5 点, 其非线性表达式形如式 2), 其中, $e = 2.5$. 当 $k_n = 1e1$, 激振力 $F(t) = 1e2e^{i\omega t}$ 时, 设激振频率为 $\omega = 1, 2, \dots, 10$, 则求得激振频率不同时的 δ 变化如图 2a) 和图 2b) 所示.

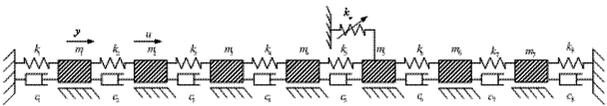


图 1 局部非线性的 7 自由度非线性系统模型

Fig. 1 Local nonlinear model of the 7 degrees of freedom nonlinear systems

该方法不仅对弱非线性系统有效, 对于较强的非线性系统, 只要能够求出稳态周期解, 则该方法同样有效, 如当 $k_n = 1e3$, 激振力 $F(t) = 1e3e^{i\omega t}$ 时, 设激振频率为 $\omega = 1, 2, \dots, 10$, 则求得激振频率不同时的 δ 变化如图 3a) 和图 3b) 所示.

可见, 除 $\omega = 5$ 时以外, 都能准确辨识出局部

非线性的位置. $\omega = 5$ 时方法失效的原因是此时系统处于拟周期状态, 没有周期解.

在事先获知结构的线性动力学模型的情况下, 该方法能够通过很少的几个测点测得的系统高次谐波响应, 很简洁地辨识出局部非线性的位置. 例如对于大型旋转机械, 只能在轴承支撑部位和其他少数位置安置传感器, 目前较常采用的模型诊断方法, 为保证诊断结果的精确性需要三个以上的测点位置, 测点较少时诊断误差较大^[10,11]; 采用本方法, 即可利用轴承部位的少数传感器测得的高频响应, 辨识出碰摩等故障的具体位置.

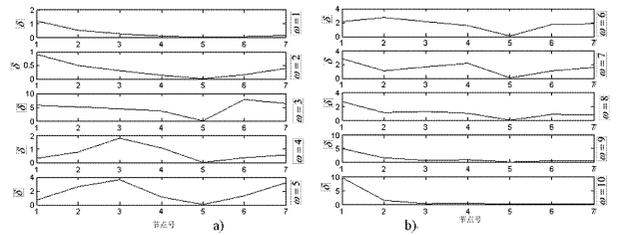


图 2 激振频率不同时辨识方法的结果

Fig. 2 Identification of the excitation frequency is not the result of both

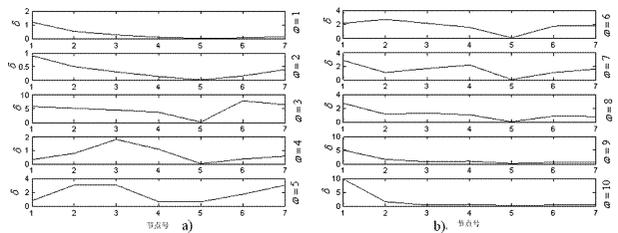


图 3 激振频率不同时辨识方法的结果

Fig. 3 Identification of the excitation frequency is not the result of both

4 结论

(1) 通过 NOFRF 方法, 推导了局部非线性多自由度系统的非线性输出频率响应函数的具体表达式, 该方法可以在非线性较弱时用来进行各自由度各阶频率分量.

(2) 通过分析局部非线性多自由度系统的非线性输出频率响应函数, 得出了系统中高次谐波分量与系统动柔度矩阵元素的对应关系. 基于此, 提出了一种简单的基于系统稳态高次谐波分量的局部非线性位置辨识方法. 采用这种方法, 可以通过结构体中任意两个部位之间的高次谐波分量的比值关系, 经过一次谐波激励而辨识出非线性的具体位置. 对一个多自由度系统进行数值仿真, 验证了该方法的有效性.

(3) 该方法不止对分段线性非线性的局部非线性系统有效,对于工程中出现的其他类型的局部非线性,只要能多项式形式拟合,便可以应用本方法进行局部非线性位置的辨识。

参 考 文 献

- 1 D Pun, S L Lau, S S Law, D Q Cao. Forced vibration analysis of a multidegree impact vibrator. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 213(3): 447 ~ 466
- 2 T C Kim, T E Rook, R Singh. Super- and sub-harmonic response calculations for a torsional system with clearance nonlinearity using the harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 281: 965 ~ 993
- 3 罗旗帜, 黄志斌. 横向撞击下弹性支承轴向受力梁的动力响应. *动力学与控制学报*, 2010, 8(3): 207 ~ 212 (Luo Qizhi, Huang Zhibi. Dynamic responses of axially-loaded beam with elastic supports subject to transversal impact. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(3): 207 ~ 212 (in Chinese))
- 4 Z Q LANG, S A BILLINGS. Energy transfer properties of non-linear systems in the frequency domain. *International Journal of Control*, 2005, 78(5): 345 ~ 362
- 5 Z Q Lang, S A Billings. Output frequency characteristics of nonlinear system. *International Journal of Control*, 1996, 64: 1049 ~ 1067
- 6 Z K Peng, Z Q Lang, S A Billings, G R Tomlinson. Comparisons between harmonic balance and nonlinear output frequency response function in nonlinear system analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 311: 56 ~ 73
- 7 Z K Peng, Z Q Lang. Detecting the position of non-linear component in periodic structures from the system responses to dual sinusoidal excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, 42: 1074 ~ 1083
- 8 H Jeffreys, B S Jeffreys. *Methods of mathematical physics*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1988
- 9 K Worden, G R Tomlinson. *Nonlinearity in structural dynamics*. Institute of Physics Publishing, 2001
- 10 N Babschmid, P Pennacchi, A Vania. Identification of multiple faults in rotor systems. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 254(2), 327 ~ 366
- 11 姚红良, 李鹤, 李小彭, 闻邦椿. 旋转机械局部故障力的模型诊断及瞬时故障力识别. *机械工程学报*, 2007, 43(1): 120 ~ 124 (Yao H L, Li H, Li X P, Wen B C: Diagnosis of local fault and identification of transient fault force in rotating machinery. *Journal of Mechanical Engineering*, 2007, 43(1): 120 ~ 124 (in Chinese))

NOFRF OF THE LOCALLY NONLINEAR MDOF SYSTEM AND THE DETECTION METHOD OF THE NONLINEARITY POSITION*

Yao Hongliang Han Qingkai Feng Fei Wen Bangchun

(School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract The dynamical system with local nonlinearity induced by the contact with outside subjects was studied. The harmonic components including the super-harmonic components were investigated. The relationship between the super-harmonic components of the system response and the frequency response matrix of the linear system was revealed. Then, a simple and fast nonlinearity position identification method was presented. Using this method, the nonlinearity position can be identified based on only two vibration responses of the system and only one time harmonic excitation. Numerical studies on a MDOF (Multi-Degree of Freedom) mass-spring-damping system was carried out to show the efficiency of the presented identification method.

Key words local nonlinear, nonlinear output frequency response functions, high harmonics, identification