第9卷第2期2011年6月
1672-6553/2011/09(2)/102-5

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 9 No. 2
Jun. 2011

从第一积分构造 Lagrange 函数的直接方法

丁光涛
(安徽师范大学物理与电子信息学院，芜湖 241000)

摘要 提出力学系统 Lagrange 函数和第一积分之间存在一种新关联,在此基础上给出变分法逆问题的一种新的直接解法. 证明系统 Lagrange 函数可以由带修正因子的第一积分构成,导出修正因子应满足的偏微分方程,运用此解法构建不同系统的 Lagrange 函数和函数族,并讨论新解法的特点.

关键词 分析力学， 变分法逆问题， 微分方程， 第一积分， Lagrange 函数

引 言

经典力学从建立在运动定律基础上的 Newton 力学阶段,发展到以变分原理为基础的 Lagrange 力学和 Hamilton 力学阶段,是巨大的进步,不仅对力学体系自身的发展影响深远,而且对物理学的其他领域,如量子力学和场论的发展也具有重大意义[1,2]. Lagrange 力学与 Hamilton 力学的发展和成就,要求将不能表示成传统 Lagrange 力学形式的力学系统以及众多非物理系统的微分方程模型表示成 Lagrange 方程形式[2,3,4]. 变分法逆问题研究由来已久[3-10],文献[3,4]及其所收录的大量参考文献反映和总结了相关研究的发展历程和重要成果. 逆问题的解法有普遍的也有特殊的,普遍解法一般是建立在把微分方程变换成自伴随形式的基础上,而特殊解法则大多数是对微分方程的结构或对 Lagrange 函数结构作出特别的限制或规定,以直接计算构造 Lagrange 函数. 值得重视的是,国内外近年来仍有大量工作涉及这个领域,例如,将耗散系统和非完整系统表示成 Lagrange 形式和 Hamilton 形式,研究其量子化问题,等等[11-20].

本文在提出力学系统第一积分与其 Lagrange 函数存在密切关联的基础上,给出从微分方程构造其 Lagrange 函数的一种新解法,包括提出由第一积分和修正因子构成 Lagrange 函数,导出确定修正因子的偏微分方程组,并证明由这样构成的 Lagrange 函数列出的方程与原方程等效. 这种新解法不需要将微分方程变换成自伴随形式,也不需要预先对微分方程系统的特点及对应的 Lagrange 函数的结构作出具体选择和限制,因而是一种带有普遍性的直接解法. 本文最后通过几种不同系统 Lagrange 函数的构造,说明了所提出的解法在给出的几类微分方程中的应用和优越性.

1 从第一积分构造 Lagrange 函数的原理和方法

研究二阶运动微分方程系统

$$M_{ij}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\ddot{q}_j+N_i(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0,\ (i,j=1,\cdots,n) \tag{1}$$

设系统是规则的,即

$$\det(M_{ij})\neq 0 \tag{2}$$

则从(1)式可以解得运动学形式运动微分方程

$$\ddot{q}_i=F_i(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\quad (i=1,\cdots,n) \tag{3}$$

积分方程组(1)或(3),得到第一积分

$$I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=const \tag{4}$$

设 I 满足如下条件

$$\det\left(\frac{\partial^2 I}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right)\neq 0 \tag{5}$$

命题 系统(1)的 Lagrange 函数由带修正因子的第一积分(4)组成,即

$$L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=A(t,\boldsymbol{q})I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+B_i(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_i+B_0(t,\boldsymbol{q}) \tag{6}$$

式中 I 满足条件(5),$A(t,\boldsymbol{q})$,$B_i(t,\boldsymbol{q})$ 和 $B_0(t,\boldsymbol{q})$ 修正因子函数,满足下列偏微分方程

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\frac{\partial I}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial A}{\partial q_i}I-2A\frac{\partial I}{\partial q_i}-A\frac{\partial I}{\partial\dot{q}_j}\frac{\partial F_j}{\partial\dot{q}_i}+$$

2010-11-22 收到第1稿,2010-11-30 收到修改稿.

$$\frac{\partial B_i}{\partial t}+\left(\frac{\partial B_i}{\partial q_j}-\frac{\partial B_j}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j-\frac{\partial B_0}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,\cdots,n) \tag{7}$$

证明:首先证明 A、B_i 和 B_0 应满足方程(7). 为此将(6)式中 L 代入 Lagrange 方程,并沿着系统在位形空间中真实运动展开得

$$E_i(L)=A\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_i}\right)+\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial A}{\partial q_i}I-$$
$$A\frac{\partial I}{\partial q_i}+\frac{\partial B_i}{\partial t}+\left(\frac{\partial B_i}{\partial q_j}-\frac{\partial B_j}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j-\frac{\partial B_0}{\partial q_i}=0 \tag{8}$$

式中

$$\frac{\bar{d}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_j\frac{\partial}{\partial q_j}+F_j(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \tag{9}$$

由于 I 是第一积分,故对真实运动有

$$\frac{\bar{d}}{dt}I=\frac{\partial I}{\partial t}+\dot{q}_j\frac{\partial I}{\partial q_j}+F_j\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_j}\equiv 0 \tag{10}$$

直接计算得到下列关系

$$\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\bar{d}I}{dt}\right)-\frac{\partial I}{\partial q_i}-\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial F_j}{\partial \dot{q}_i}=$$
$$-\frac{\partial I}{\partial q_i}-\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial F_j}{\partial \dot{q}_i} \tag{11}$$

将(11)式代入(8)式,就得到修正因子应满足的方程(7),解此偏微分方程组得到 $A(t,\boldsymbol{q})$, $B_i(t,\boldsymbol{q})$ 和 $B_0(t,\boldsymbol{q})$,代入(6)式,构建出 Lagrange 函数.

其次,证明由构造出的 $L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 能导出给定的方程(1)或(3). 为此将按上述步骤得到的 $L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 代入 Lagrange 方程,并展开得

$$E_i(L)=A\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_i}\right)+\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial A}{\partial q_i}I-$$
$$A\frac{\partial I}{\partial q_i}+\frac{\partial B_i}{\partial t}+\left(\frac{\partial B_i}{\partial q_j}-\frac{\partial B_j}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j-\frac{\partial B_0}{\partial q_i}=0 \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_j\frac{\partial}{\partial q_i}+\ddot{q}_j\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \tag{13}$$

因为 A,B_i 和 B_0 满足方程(7),故由(12)式可得

$$E_i(L)=A\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_i}\right)+A\frac{\partial I}{\partial q_i}+A\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial F_j}{\partial \dot{q}_i}=0 \tag{14}$$

将(11)式代入上式,展开后得到

$$A\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}(\ddot{q}_j-F_j(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}))=0 \tag{15}$$

由于 I 满足条件(5),故由(15)式可得方程(3). 这就是说,从构造得到的 Lagrange 函数 L 列出的 Lagrange 方程与方程(1)或(3)等价,证毕.

上面给出的 Lagrange 函数结构式(6)和导出的确定修正因子的方程(7),建立了力学系统 Lagrange 函数和第一积分之间的一种关联,这是一种独立于对称性和守恒量理论之外的新关联性,是本文提出的变分法逆问题新解法的基础. 新解法的步骤如下:(i)积分微分方程(1)或(3),得到一个满足条件(5)的第一积分(4);(ii)从方程(7)解出修正因子 $A(t,\boldsymbol{q})$, $B_i(t,\boldsymbol{q})$ 和 $B_0(t,\boldsymbol{q})$;(iii)代入式(6)构成待求的 Lagrange 函数.

对上述变分法逆问题的新解法作如下几点说明:

(i)应用新解法得到的方程(1)或(3) Lagrange 函数不是唯一的. 这是因为方程(1)或(3)满足条件(5)的第一积分不是唯一的,新解法导出的 Lagrange 函数与选择的第一积分相关,选择不同的第一积分可以构建出不同的 Lagrange 函数,但是这些函数是同位等效的[3,4],或者说,彼此间存在 Lagrange 对称性. 此外,方程(7)的解中,A 确定后,B_i 和 B_0 仍不是唯一的,当(6)式函数 L 作规范变换时,变换后的 B'_i 和 B'_0 也满足同样的方程(7),换句话说,选定第一积分后,新解法仍可以得出不同的规范等效的 Lagrange 函数.

(ii)从方程(1)或(3)直接导出的积分 I 可能不满足条件(5),有几种方法解决这个问题:一是由 I 构造新的第一积分 $I'=\phi(I)$,使 I' 满足条件(5);二是导出方程(1)或(3)的满足条件(5)的其它第一积分;三是导出方程(1)或(3)的若干第一积分,由这些积分的函数组成满足条件(5)的第一积分.

(iii)对 n 维系统而言,方程(7)有 n 个偏微分方程,而待求的函数有 $n+2$ 个,在一般情况下是可解的;但是,变分法逆问题的研究已经证明,不论利用何种构造 Lagrange 函数的方法,都存在这样的二阶微分方程组,它们不能表示成 Lagrange 方程形式,不能构建出 Lagrange 函数,在这样情况下方程(7)没有解. 文献[10]指出,这种情况下可以把方程组变换为一阶微分方程组,再构成一阶 Lagrange 函数.

2　几种力学系统的 Lagrange 表示

为了说明上述构建 Lagrange 函数理论和方法的应用,本节将选择两个力学系统,包括了一维的和多维的、保守的和耗散的、线性的和非线性的系统,构建 Lagrange 函数. 这些算例表明本文所提出

的变分法逆问题的新解法，比较容易发现和构建出系统的 Lagrange 函数族.

2.1 一维简谐振动

$$\ddot{x}+x=0 \quad (\text{取 } \omega^2=1) \tag{16}$$

容易得到两个第一积分

$$I_1=\dot{x}\cos t+x\sin t;\ I_2=\dot{x}\sin t-x\cos t \tag{17}$$

组合成满足条件(5)的第一积分

$$I=I_1^2+I_2^2=\dot{x}^2+x^2 \tag{18}$$

解法 1：设系统 Lagrange 函数为

$$L=A(\dot{x}^2+x^2)+B_1\dot{x}+B_0 \tag{19}$$

代入方程(7)，得

$$2\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}\right)\dot{x}-4Ax+\frac{\partial B_1}{\partial t}-\frac{\partial A}{\partial x}(\dot{x}^2+x^2)-\frac{\partial B_0}{\partial x}=0 \tag{20}$$

方程的两组特解分别为

$$A=\frac{1}{2},\quad B_1=0,\quad B_0=-x^2;$$

$$A'=\frac{1}{2},\quad B'_1=2xt,\quad B'_0=0 \tag{21}$$

对应的两个 Lagrange 函数

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2-x^2);\ L'=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+x^2)+2x\dot{x}t \tag{22}$$

L 和 L' 是规范等效 Lagrange 函数.

解法 2：取任意的满足条件(5)的光滑函数为新的第一积分

$$I'=F(I_1)=F(\dot{x}\cos t+x\sin t) \tag{23}$$

代入方程(7)，得

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}\right)\cos t\,\frac{dF}{dI_1}-\frac{\partial A}{\partial x}F-2A\sin t\,\frac{dF}{dI_1}+\frac{\partial B_1}{\partial t}-\frac{\partial B_0}{\partial x}=0 \tag{24}$$

一组特解为

$$A=1/\cos^2 t,\quad B_1=0,\quad B_0=0 \tag{25}$$

得到简谐振动一个 Lagrange 函数族为

$$\bar{L}'=\frac{1}{\cos^2 t}F(\dot{x}\sin t-x\cos t) \tag{26}$$

解法 3：取 I_2 组成新的满足条件(5)的第一积分

$$I''=F(I_2)=F(\dot{x}\sin t-x\cos t) \tag{27}$$

可以导出简谐振动另一个 Lagrange 函数族

$$\bar{L}''=\frac{1}{\sin^2 t}F(\dot{x}\sin t-x\cos t) \tag{28}$$

简谐振动是力学和物理学中重要的基本运动模式之一，通常只选取式(22)中 L 为其 Lagrange 函数，这里用新解法得到了两个新的 Lagrange 函数族，有一定的理论意义，例如讨论它们的 Hamilton 化问题.

2.2 二维非线性变系数阻尼运动

$$\begin{aligned}&m\ddot{x}+\gamma(x\dot{x}+2y\dot{x}\dot{y}-x\dot{y}^2)=0\\&m\ddot{y}+\gamma(y\dot{y}+2y\dot{x}\dot{y}-y\dot{x}^2)=0\end{aligned} \tag{29}$$

直接计算可以得到两个第一积分[4]

$$I=\ln(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{\gamma}{m}(x^2+y^2) \tag{30}$$

$$I'=\ln(x\dot{y}-y\dot{x})+\frac{\gamma}{m}(x^2+y^2) \tag{31}$$

I 满足规则条件(5)，而 I' 不满足该条件，故设系统的 Lagrange 函数为

$$L=A\left[\ln(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{\gamma}{m}(x^2+y^2)\right]+B_1\dot{x}+B_2\dot{y}+B_0 \tag{32}$$

由(29)式得到

$$\begin{aligned}&\ddot{x}=F_1=-\frac{\gamma}{m}(x\dot{x}+2y\dot{x}\dot{y}-x\dot{y}^2)\\&\ddot{y}=F_2=-\frac{\gamma}{m}(y\dot{y}+2y\dot{x}\dot{y}-y\dot{x}^2)\end{aligned} \tag{33}$$

代入方程(7)，整理后得到

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A}{\partial y}\dot{y}\right)\frac{2\dot{x}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}-\frac{\partial A}{\partial x}\Big[\ln(\dot{x}+\dot{y})+\\&\quad\frac{\gamma}{m}(x^2+y^2)\Big]+\frac{\partial B_1}{\partial t}+\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}-\frac{\partial B_2}{\partial x}\right)\dot{y}-\frac{\partial B_0}{\partial x}=0\\&\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A}{\partial y}\dot{y}\right)\frac{2\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}-\frac{\partial A}{\partial y}\Big[\ln(\dot{x}+\dot{y})+\\&\quad\frac{\gamma}{m}(x^2+y^2)\Big]\frac{\partial B_2}{\partial t}+\left(\frac{\partial B_2}{\partial x}-\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)\dot{x}-\frac{\partial B_0}{\partial y}=0\end{aligned} \tag{34}$$

一组特解为

$$A=\text{常数},\quad B_1=B_2=0,\quad B_0=0$$

取 $A=1$，则系统的 Lagrange 函数为

$$L=\ln(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{\gamma}{m}(x^2+y^2) \tag{35}$$

系统(29)也存在 Lagrange 函数族. 取 I 的任意光滑函数为新的第一积分，即

$$\bar{I}=F(I)=F\left[\ln(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{\gamma}{m}(x^2+y^2)\right] \tag{36}$$

通过上列同样的方法，可以得到 Lagrange 函数族为

$$\bar{L}=F\left[\ln(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{\gamma}{m}(x^2+y^2)\right] \tag{37}$$

如果取 F 为指数函数,则得

$$L_1 = \exp\left[\frac{\gamma}{m}(x^2+y^2)\right](\dot{x}^2+\dot{y}^2) \tag{38}$$

这是文献[4]给出过的 Lagrange 函数(相差 1/2 系数),但是[4]中并没有给出其他 Lagrange 函数,更没有指出 Lagrange 函数族的存在. 直接把方程(29)变换成自伴随形式的是困难的,然而在得到 Lagrange 函数族后,写成 Lagrange 方程就是自伴随形式的方程,这种方程有任意多个,对应的变换矩阵也是任意多个.

顺便指出,(31)式 I' 不满足规则条件(5),而且 I' 的任意光滑函数组成的新积分,也不能满足条件(5).

3　结论与讨论

本文研究求解变分法逆问题即 Lagrange 力学逆问题的新解法. 我们提出并证明了系统 Lagrange 函数与第一积分紧密相关,由带修正因子的第一积分可以构成 Lagrange 函数的新命题,这个命题是新解法的理论基础. 在给出 Lagrange 函数的结构,导出确定修正因子的偏微分方程后,证明了构建 Lagrange 函数新解法. 通过对实际系统 Lagrange 函数的构造,表明这种新解法步骤规范明确,能够应用于多种系统,对力学中经典的系统也导出了新的结果,特别是可以直接得到 Lagrange 函数族. 求得 Lagrange 函数族后,将引起如何选择适当的 Lagrange 函数来求出 Hamilton 函数,进而讨论系统的量子化等问题. 这既说明新解法的可行性,又反过来说明关于 Lagrange 函数与第一积分新的关联性的提出有一定的理论价值.

提出的变分法逆问题的新解法与 Lagrange 函数的两种等效变换紧密相关. 事实上,新解法求出的 Lagrange 函数与第一积分的选取相对应,不同的第一积分对应构建出不同的 Lagrange 函数,这些函数间是同位等效的[3,4],或者说存在着 Lagrange 对称性;一个 Lagrange 函数族则是与一族第一积分相对应. 新解法不仅可以得出同位等效的 Lagrange 函数[1,3,4],也可以得到规范等效的 Lagrange 函数,在修正因子 B_i 和 B_0 中,引入规范函数对时间的微商项后,仍满足同一个确定修正因子的偏微分方程(7).

本文提出的新解法特点在于不需要先将微分方程变换成自伴随形式,而只需要先求出一个满足条件(5)的第一积分;此外,新解法对给定的微分方程系统的类型没有特定的要求,对待求的 Lagrange 函数结构特点也未加预先的限制,因此新解法是一种带有较大普遍性的解法. 应当指出,在逆问题解法中也有其他方法是从第一积分(守恒量)导出 Lagrange 函数的,但其理论基础是对称性理论[16],而本文的方法并没有利用这种理论.

参　考　文　献

1　Goldstein H, Poole C, Safko J. Classical Mechanics, 3nd ed. Redwood City: Addison-Wesley, 2002

2　罗绍凯,张永发. 约束系统动力学研究进展. 北京:科学出版社,2008 (Luo S K, Zhang Y F. Advances in the study of dynamics of constrained systems. Beijing: Science Press, 2008 (in Chinese))

3　Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics I. New York: Springer-Verlag, 1978

4　Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics II. New York: Springer-Verlag, 1983

5　梅凤翔,刘端,罗勇. 高等分析力学. 北京:北京理工大学出版社,1991 (Mei F X, Liu D, Luo Y. Advanced analytical mechanics. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1991 (in Chinese))

6　Darboux G. Lecons sur la Theorie Generale des Suefaces Vol3. Paris: Gauthier-Villars, 1894

7　Douglas D. Solution of the inverse problem of the calculus of variations. *Trans. Am. Math. Soc.*,1941,50:71 ~ 128

8　Currie D G, Saletan E J. q-Equivalent particle Hamiltonians I. *J. Math. Phys.*,1966, 7:967 ~ 974

9　Hojman S. Harleston H. Equivalent Lagrangians: Multidimensional Case. *J. Math. Phys.*,1981, 22:1414 ~ 1419

10　Hojman S, Urrutia L F. On the inverse problem of the calculus of variations. *J. Math. Phys.* 1981, 22:1896 ~ 1903,

11　Lopez G. Hamiltonian and Lagrangian for N – dimensional Autonomous Systems. *Ann. Phys.*, 1996, 251: 363 ~ 371

12　Lopez G. One-dimensional Autonomous systems and dissipative systems. *Ann. Phys.*,1996,251:372 ~ 383

13　Bloch A M, Fernandez O E, Mestdag T. Hamiltonization of nonholonomic systems and the inverse problem of the calculus of variations. *Reports on Math. Phys*,2009,63:225 ~ 249

14 Cieslinski J L, Nikicink T. A direct approach to the construction of standard and non-standard Lagrangian for dissipative-like dynamical systems with variable coefficients. *J. Phys. A: Math, Theor*,2010, 43:175205,

15 梅凤翔. 分析力学专题. 北京:北京工业学院出版社, 1988 (Mei F X. Analytical Mechanical Special Problems. Beijing: Beijing Institute of Technology Press1988 (in Chinese))

16 梅凤翔. 动力学逆问题. 北京:国防工业出版社,2009 (Mei F X. Inverse Problem of Dynamics. Beijing: National Defence Industry Press 2009 (in Chinese))

17 丁光涛. 一种构造 Lagrange 函数的直接方法. 安徽师范大学学报,1996,19:382 ~ 386 (Ding G T. A direct method for the construction of a Lagrangian. *J. Anhui Normal Univ.*, 1996, 19:382 ~ 386 (in Chinese))

18 丁光涛,陶松涛. 一阶 Lagrange 力学逆问题及其在非力学领域中的应用. 科学通报,2008,53:872 ~ 876 (Ding G T, Tao S T. Inverse problem of first-order Lagrangian mechanics and its application in non-mechanics subjects. *Chin. Sci. Bull*, 2008, 53: 872 ~ 876 (in Chinese))

19 丁光涛. 一阶 Lagrange 力学逆问题的直接解法. 动力学与控制学报,2010,8(3):193 ~ 196(Ding G T. Direct solutions for inverse problem of first-order Lagrangian mechanics. *Journal of Dynamics and Control*, 2010,8(3): 193 ~ 196 (in Chinese))

20 丁光涛. 从运动方程构造 Lagrange 函数的直接方法. 动力学与控制学报,2010,8(4):305 ~ 310(Ding G T. A direct approach to the construction of Lagrangians From the motion equation. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8:305 ~ 310(in Chinese))

A DIRECT APPROACH TO CONSTRUCTION OF THE LAGRANGIAN FROM THE FIRST INTEGRAL

Ding Guangtao

(*College of Physics and Electronic Infofmation*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000 ,*China*)

Abstract A new relation between the Lagranian and the first integral of a mechanical system was presented. On the basis of the relation, a new direct method to solve the inverse problem of the calculus of variations was given. It is proved that a first integral of differential equations with modified factors can be constructed a Lagrangian of the system. The partial differential equations to determine the modified factors were obtained. The new method was used to construct the Lagrangians and the families of Lagrangians of some different systems. The characteristics of the new solution were disscused.

Key words analytical mechanics, the inverse problem of the calculus of variations, differential equation, first integral, Lagrangian

Received 22 November 2010, revised 30 November 2010.