

# (2 + 1) 维 KD 方程的解及分岔行为\*

温纪云<sup>1</sup> 符文彬<sup>1</sup> 黄琼伟<sup>1</sup> 杨先林<sup>2</sup>

(1. 湖南大学机械与运载工程学院, 长沙 410082) (2. 湖南广播电视大学理工教学部, 长沙 410004)

**摘要** 通过行波变换, 将非线性偏微分方程化为常微分方程, 利用辅助常微分方程的解来构造偏微分方程的精确解, 获得了(2 + 1)维 Konopelchenko-Dubrovsky 方程的孤波解和周期解. 然后直接研究变换以后的常微分方程, 揭示该方程控制的动力系统的鞍结分岔行为, 画出了系统的分岔图.

**关键词** 非线性偏微分方程, 行波变换, 精确解, 分岔

## 引言

非线性科学的很多问题是利用非线性偏微分方程来描述的, 随着非线性科学的不断发展, 非线性偏微分方程数量和类型不断地增多, 非线性偏微分方程的求解成为了非线性科学研究的一个热点<sup>[1-8]</sup>. 求非线性偏微分方程的精确解到目前为止已经提出了许多求解方法, 例如: 双线性法、分离变量法、波数合并法、齐次平衡法和投影方程法等等. 其中有些方法对求 Konopelchenko-Dubrovsky 方程(KD 方程)的孤子解很有效<sup>[4,5]</sup>. 但是, 目前还没有见到研究 KD 方程分岔行为的文献.

分岔是非线性微分方程重要的动力学性态, 对非线性常微分方程的分岔行为的研究已取得了许多成果<sup>[9,10]</sup>, 而对非线性偏微分方程的分岔现象研究的成果还很少. 而且很多问题都是用 Galerkin 积分分离变量, 化为常微分方程来研究系统的分岔行为. 这是一种近似研究方法, 因为 Galerkin 截断以后的方程只是原系统的近似.

本文首先通过行波变换, 将偏微分方程化为常微分方程, 然后再利用辅助常微分方程法<sup>[5]</sup>, 求 KD 方程的孤波解和周期解. 然后, 直接研究行波变换以后的常微分方程, 揭示该动力系统的鞍结分岔行为. 行波变换是一种精确变换, 方程变换后不会改变非线性系统的动力学性质.

## 1 (2 + 1) 维 Konopelchenko-Dubrovsky 方程

考虑(2 + 1)维 Konopelchenko-Dubrovsky 方程

$$u_t - u_{xxx} - 6buu_x + \frac{3}{2}a^2u^2u_x - 3v_y + 3au_xv = 0 \quad (1)$$

$$u_y = v_x \quad (2)$$

进行行波变换

$$u(x, y, t) = U(\xi)$$

$$v(x, y, t) = V(\xi)$$

$$\xi = kx + ly + \lambda t \quad (3)$$

则式(1)可化为

$$\lambda U' - k^3U''' - 6bkUU' + \frac{3}{2}a^2kU^2U' - 3lV' + 3alU'V = 0 \quad (4)$$

式(2)可化为

$$V = \frac{l}{k}U \quad (5)$$

由(4)、(5)消去 V 得

$$\lambda U' - k^3U''' - 6bkUU' + \frac{3}{2}a^2kU^2U' - \frac{3l^2}{k}U' + 3alUU' = 0$$

将上式积分得

$$\lambda U - k^3U'' - 3bkU^2 + \frac{1}{2}a^2kU^3 - 3\frac{l^2}{k}U + \frac{3}{2}alU^2 = 0$$

化简为

$$U'' = \left(\frac{\lambda}{k^3} - \frac{3l^2}{k^4}\right)U + \left(\frac{3al}{2k^3} - \frac{3b}{k^2}\right)U^2 + \frac{a^2}{2k^2}U^3 \quad (6)$$

一般情况下, 对于非线性偏微分方程

$$N_i(u_i, u_{i,x_j}, u_{i,x_jx_k}, \dots) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots; j, k = 0, 1, 2, \dots, l) \quad (7)$$

如果可进行行波变换

2010-10-18 收到第1稿, 2011-01-18 收到修改稿.

\* 湖南省科学技术厅科技计划资助项目(2009FJ3077)

$$u_i(x) = U_i(\xi), \xi = \sum_{j=0}^l k_j x_j \quad (8)$$

式中  $k_j (j=0, 1, 2, \dots, l)$  是待定常数, 则方程(7)可化为非线性常微分方程

$$H_i(U_i, U'_i, U''_i, \dots) = 0 \quad (9)$$

行波变换未作任何形式的近似, 方程变换后不会改变非线性系统的动力学行为.

## 2 精确解

利用辅助微分方程法来求方程的精确解, 解的构造可以考虑以下形式

$$\varphi'^2 = c_2 \varphi^2 + c_3 \varphi^3 + c_4 \varphi^4 \quad (10)$$

或

$$\varphi'' = c_2 \varphi + \frac{3}{2} c_3 \varphi^2 + 2c_4 \varphi^3 \quad (11)$$

其中  $\varphi$  是  $\xi$  的函数.

1) 当  $c_2 > 0$  时, 方程(11)的解为

$$\varphi_1(\xi) = \frac{-c_2 c_3 \operatorname{sech}^2\left(\pm \frac{\sqrt{c_2}}{2} \xi\right)}{c_3^2 - c_2 c_4 \left(1 - \tanh\left(\frac{\sqrt{c_2}}{2} \xi\right)\right)^2} \quad (12)$$

2) 当  $c_2 > 0, c_4 > 0$  时, 方程(11)有下列解

$$\varphi_2(\xi) = \frac{c_2 \operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{c_2}}{2} \xi\right)}{c_3 + 2\sqrt{c_2 c_4} \coth\left(\frac{\sqrt{c_2}}{2} \xi\right)} \quad (13)$$

$$\varphi_3(\xi) = \frac{4c_2 (\cosh\sqrt{c_2} \xi + \sinh\sqrt{c_2} \xi)}{4c_2 c_4 - (c_3 + \cosh\sqrt{c_2} \xi + \sinh\sqrt{c_2} \xi)^2} \quad (14)$$

3) 当  $c_2 > 0, c_3^2 - 4c_2 c_4 = 0$ , 方程(11)有下列解

$$\varphi_4(\xi) = -\frac{c_2}{c_3} \left(1 \pm \tanh\left(\frac{\sqrt{c_2}}{2} \xi\right)\right) \quad (15)$$

$$\varphi_5(\xi) = -\frac{c_2}{c_3} \left(1 \pm \coth\left(\frac{\sqrt{c_2}}{2} \xi\right)\right) \quad (16)$$

4) 当  $c_2 < 0, c_4 > 0$ , 方程(11)有下列解

$$\varphi_6(\xi) = \frac{-c_2 \operatorname{csc}\left(\frac{\sqrt{-c_2}}{2} \xi\right)}{c_3 \sin\left(\frac{\sqrt{-c_2}}{2} \xi\right) + 2\sqrt{-c_2 c_4} \cos\left(\frac{\sqrt{-c_2}}{2} \xi\right)} \quad (17)$$

$$u_6(x, y, t) = \frac{(3l^2 - \lambda k) \operatorname{csc}\left(\frac{\sqrt{3l^2 - \lambda k}}{2K^2}(kx + ly + \lambda t)\right)}{(alk - 2bk^2) \sin\left(\frac{\sqrt{3l^2 - \lambda k}}{2K^2}(kx + ly + \lambda t)\right) + ak\sqrt{\lambda k - 3l^2} \cos\left[\frac{\sqrt{3l^2 - \lambda k}}{2K^2}(kx + ly + \lambda t)\right]} \quad (23)$$

式(6)与式(11)对照, 有

$$c_2 = \frac{\lambda}{k^3} - \frac{3l^2}{k^4}, \quad c_3 = \frac{al}{k^3} - \frac{2b}{k^2},$$

$$c_4 = \frac{a^2}{4k^2}$$

由式(12) - (17), 可知方程(11)的解为

$$u_1(x, y, t) = -4(alk^2 \lambda - 2bk^3 \lambda - 3al^3 k + 6bl^2 k^2) \operatorname{sech}^2\left[\pm \frac{\sqrt{\lambda k - 3l^2}}{2K^2}(kx + ly + \lambda t)\right] / \{(2alk - 4bk^2)^2 - a^2(\lambda k^3 - 3l^2 k^2)\} \{1 - \tanh\left[\pm \frac{\sqrt{\lambda k - 3l^2}}{2K^2}(kx + ly + \lambda t)\right]\}^2 \quad (18)$$

$$u_2(x, y, t) = \frac{(\lambda k - 3l^2) \operatorname{csch}^2\left[\frac{\sqrt{\lambda k - 3l^2}}{2K^2}(kx + ly + \lambda t)\right]}{alk - 2bk^2 + ak\sqrt{\lambda k - 3l^2} \coth\left[\frac{\sqrt{\lambda k - 3l^2}}{2K^2}(kx + ly + \lambda t)\right]} \quad (19)$$

$$u_3(x, y, t) = 4k^2(\lambda k - 3l^2) \left[ \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda k - 3l^2}}{2K^2}(kx + ly + \lambda t)\right) + \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda k - 3l^2}}{2K^2}(kx + ly + \lambda t)\right) \right] / \{a^2(\lambda k - 3l^2) - [al - 2bk + k^3 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda k - 3l^2}}{K^2}(kx + ly + \lambda t)\right) + k^3 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda k - 3l^2}}{K^2}(kx + ly + \lambda t)\right)]^2\} \quad (20)$$

$$u_4(x, y, t) = -\frac{\lambda k - 3l^2}{alk - 2bk^2} \pm \frac{\lambda k - 3l^2}{alk - 2bk^2} \tanh\left[\frac{\sqrt{\lambda k - 3l^2}}{2K^2}(kx + ly + \lambda t)\right] \quad (21)$$

$$u_5(x, y, t) = -\frac{\lambda k - 3l^2}{alk - 2bk^2} \pm \frac{\lambda k - 3l^2}{alk - 2bk^2} \coth\left[\frac{\sqrt{\lambda k - 3l^2}}{2K^2}(kx + ly + \lambda t)\right] \quad (22)$$

取  $k=1, l=1, a=-2, b=-1$ , 在  $t=0, 5, 10s$  时, 通过使用 Mathematica 软件可以画出方程

10s 时, 通过使用 Mathematica 软件可以画出方程

(11)的孤波解如图1所示.

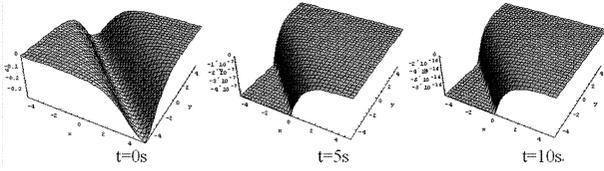


图1 KD方程的孤波解

Fig. 1 Solitary wave solutions of KD equation

取  $k=1, l=1, a=-2, b=-1$ , 在  $t=0, 5, 10s$  时, 通过使用 Mathematica 软件可以画出方程(11)的周期解如图2所示.

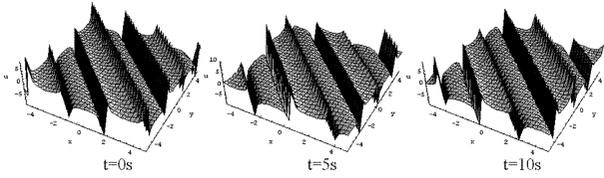


图2 KD方程的周期解

Fig. 2 Periodic solutions of KD equation

### 3 分岔行为

在方程(6)中, 只研究当  $\frac{3al}{2k^3} - \frac{3b}{k^2} = 0$  时, 即不考虑  $U^2$  项的情况时 KD 方程的分岔行为, 这时方程就可以用下式表示

$$U'' + pU - qU^3 = 0 \tag{24}$$

加上控制项  $f$  以后, 式(24)可以表示

$$U'' + pU - qU^3 = f(\xi) \tag{25}$$

若  $f = F_0 \sin \Omega \xi$  考虑弱非线性, 用摄动法可求出其分岔方程如下

$$\left(\sigma a + \frac{3q}{8\omega} a^3\right)^2 - \frac{F_0^2}{4\omega^2} = 0 \tag{26}$$

其中,  $\omega^2 = p, q = \frac{a^2}{2k^2}, a, \sigma$  为调谐参数,  $F_0$  为激励幅值,  $a$  为响应幅值.

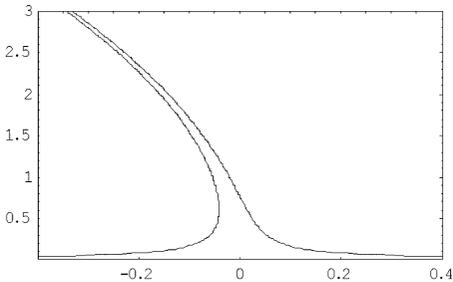


图3 KD方程的鞍结分岔

Fig. 3 Bifurcation diagram of KD equation

取  $q=0.3, \omega=3, F_0=0.1$ , 式(26)绘出的分岔响应曲线如图3所示, 系统具有鞍结分岔. 系统的幅频响应存在多值、跳跃等动力学行为.

改变控制参数  $F_0$  的值, 可以对系统的鞍结分岔进行控制. 取  $q=0.3, \omega=3, F_0=0.025$ , 式(26)的鞍结分岔图如图4所示. 显然, 分岔响应曲线的弯曲程度有改变, 解的稳定域也有改变.

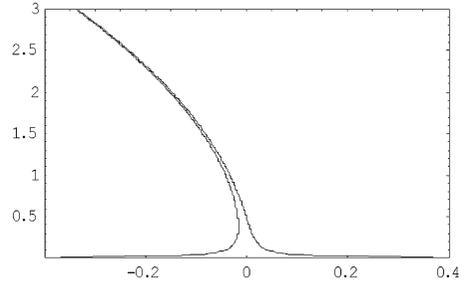


图4 鞍结分岔控制

Fig. 4 Control of bifurcation diagram

从图3可以看出(2+1)维 Konopelchenko - Dubrovsky 方程的分岔响应曲线一定向左边弯曲, 这是由式(25)非线性项的系数为负决定的. 这是与 Burgers - KdV 方程、修改的(2+1)维 Kadomtsev - Petviashvili 方程、非线性 Klein - Gordon 方程等方程的不同之处.

### 4 结论

利用行波变换将非线性偏微分方程化为常微分方程, 若辅助常微分方程有精确解, 则可获得非线性偏微分方程的孤波解和周期解等精确解. 直接分析行波变换以后的常微分方程, 为研究非线性偏微分方程的分岔行为提供了一条途径, 适合于可以进行行波变换的偏微分方程和方程组.

### 参 考 文 献

- 1 Lax P D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Commun. Pure Appl. Math.*, 1968, 21: 467 ~ 490
- 2 张解放, 黄文华, 郑春龙. 一个新(2+1)维非线性演化方程的相干孤子结构. *物理学报*, 2002, 51: 2676 ~ 2682 (Zhang Jiefang, Huang W H, Zheng C L. Coherent soliton structures of a new (2+1) dimensional evolution equation. *Acta Phys. Sin.*, 2002, 51: 2676 ~ 2682 (in Chinese))
- 3 马松华, 方建平. 联立薛定谔系统新精确解及其所描述的

- 孤子脉冲和时间孤子. 物理学报, 2006, 55: 5611 ~ 5616 (Ma S H, Fang J P. New exact solutions for the related Schrödinger equation and the temporal-soliton and soliton-impulse. *Acta Phys. Sin.*, 2006, 55: 5611 ~ 5616 (in Chinese))
- 4 Xie F D, Yan Z Y. Exactly fractional solutions of the (2 + 1)-dimensional modified KP equation via some fractional transformations. *Chaos, Soliton and Fractals*, 2008, 36: 1108 ~ 1112
- 5 叶彩儿, 张卫国. (2 + 1) 维 Konopelchenko-Dubrovsky 方程新的多孤子解. 物理学报, 2010, 59: 5229 ~ 5234 (Ye C E, Zhang W G. New multisoliton solutions for (2 + 1)-dimensional Konopelchenko-Dubrovsky equations. *Acta Phys. Sin.*, 2010, 59: 5229 ~ 5234 (in Chinese))
- 6 Yang X L, Tang J S. New traveling wave solutions for combined KdV-mKdV equation and (2 + 1)-dimensional Broer-Kaup-Kupershmidt system. *Chinese Physics*, 2007, 16: 310 ~ 317
- 7 Xie Y X, Tang J S. New explicit exact solutions to the Born-Infeld equation. *International Journal of Theoretical Physics*, 2006, 45: 6 ~ 16
- 8 Yang X L, Tang J S. Traveling wave solutions of the compound KdV-type equation with nonlinear terms of any order. *IL Nuovo Cimento B*, 2008, 123: 523 ~ 532
- 9 Tang J S, Chen Z L. Amplitude control of limit cycle in van der Pol system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2006, 16: 487 ~ 495
- 10 孙健, 那仁满都拉. 具强迫项的变系数 Burgers 方程的特殊孤波结构. 动力学与控制学报, 2010, 8(2): 114 ~ 118 (Sun Jian, Naranmandula. Special solitary wave structures of a variable coefficient forced Burgers equation. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(2): 114 ~ 118 (in Chinese))

## EXACT SOLUTION AND BIFURCATION FOR (2 + 1) DIMENSIONAL KD EQUATION\*

Wen Jiyun<sup>1</sup> Fu Wenbin<sup>1</sup> Huang Qiongwei<sup>1</sup> Yang Xianlin<sup>2</sup>

(1. College of Mechanical and Vehicle Engineering, HNU, Changsha 410082, China)

(2. Hunan Radio and Television University, Changsha 410004, China)

**Abstract** By means of the traveling wave transformation nonlinear partial differential equations are reduced to ordinary differential equations. Applying solutions of the ordinary differential equation, we have constructed exact solutions of nonlinear partial differential equations and have obtained some exact solitary wave solutions and periodic solutions for the (2 + 1) dimensional Konopelchenko – Dubrovsky equation. The ordinary differential equation is directly studied and a bifurcation diagram of the system is drawn. The saddle – node bifurcation which leads to jump and hysteresis is analyzed.

**Key words** nonlinear partial differential equation, wave transformation, exact solution, bifurcation