

# 刚杆非定点碰撞的几何学及动力学模拟\*

高路路<sup>1</sup> 姚文莉<sup>2</sup>

(1. 山东科技大学信息科学与工程学院, 青岛 266510) (2. 青岛理工大学理学院, 青岛 266520)

**摘要** 两刚性杆件在运动过程中其接触碰撞点的位置是不确定的. 本文给出了此模型接触碰撞时的两种接触碰撞模式, 分析了寻找接触碰撞点位置的方法, 由此得出判断接触碰撞模式的方法, 并通过 MATLAB 对此模型进行了几何学及动力学模拟.

**关键词** 接触碰撞模式, 接触点, 非定点接触碰撞

## 引言

关于接触与碰撞问题的研究由来已久, 但因其复杂性, 至今仍是国际上该领域研究的热点和难点.

研究多体系统碰撞和接触的运动学及动力学问题, 首先要回答的是系统在何时及以何种方式发生接触. 对于一般平面运动体接触运动学关系在文献[1]中已有所介绍. 当接触物体是特殊的几何体时, 其运动过程中潜在接触点对及其之间的最小距离可以根据几何体的特性来求解, 从而简化问题的计算过程.

本文研究了接触物体为刚性杆件的情况, 对于其运动过程中接触碰撞点的位置的求法在文献[3][4]有所讨论, 文献[3]中只考虑了短杆与长杆在运动过程中发生接触碰撞时其接触碰撞点位置的求法, 而对于长杆也可能与短杆发生接触碰撞的情况没有考虑; 文献[4]中的方法给出了求碰撞点位置的自动搜索法, 算法中步骤相对来说比较繁琐. 在上述这些研究的基础上进一步探讨了寻找其接触碰撞点位置的方法, 并根据平面多体系统几何学与运动学相关原理<sup>[5,6]</sup>给出此模型接触碰撞时可能出现的接触模式, 及判断其接触模式的方法.

## 1 两刚性杆件组成的多体系统的相对运动学描述

在这里仍采用文献[4]中的模型, 如图1所示. 设2个质量分别为  $m_1$  和  $m_2$ , 长分别为  $l_1$  和  $l_2$

的均质刚性杆  $O_1A$  和  $O_2B$  与固定面用铰链连接.  $O_1$  与  $O_2$  之间的距离为  $d$ .  $O_1A$  杆和  $O_2B$  杆与铅垂线夹角分别为  $\varphi$  和  $\theta$ .

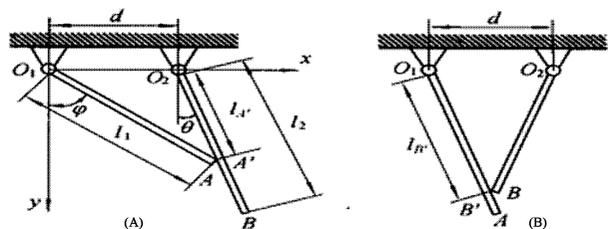


图1 刚性杆件多体系统碰撞位置示意图

Fig. 1 The collision position diagram of the multi-body system consisted of two rigid rods

图1中的(A)为  $O_1A$  杆  $A$  端与  $O_2B$  杆上的某一点接触碰撞; (B)为  $O_2B$  杆  $B$  端与  $O_1A$  杆上的某一点接触碰撞.

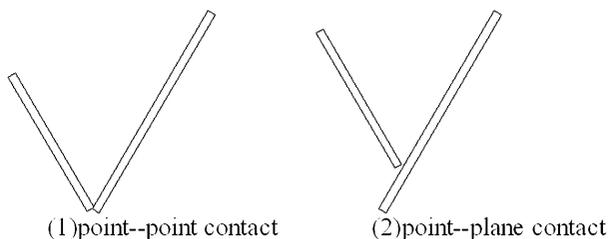


图2 两刚性杆的接触碰撞模式

Fig. 2 The contact impact model of the two rigid rods

由文献[2]知对于平面物体, 在运动过程中物体的潜在接触点对有三种情况: 在折点—折点处达到距离极小; 折点—光滑弧内点处距离达到极小; 光滑弧内点—光滑弧内点距离达到极小. 对于两刚性杆件组成的多体系统而言, 其潜在接触点只有前

两种情况,由此可知此模型在运动过程中当两刚性杆件接触碰撞时其接触碰撞模式也只有两种类型:一是尖点—尖点接触碰撞;一是尖点—平面接触碰撞.如图2所示.

下面给出判断两刚性杆件在运动过程中是否会发生接触碰撞及判断接触碰撞点位置的一种新方法,根据此法还可以判断出接触碰撞模式.其方法如下:

$$\text{若(1)} l_{A'} = \sqrt{d^2 + l_1^2 - 2dl_1 \sin\varphi} \leq l_2;$$

$$(2) d_{AA'} = 0;$$

(3)  $v_A^n, v_{A'}^n$  反向,或者同向时其中一个速度大于另一速(即当两杆都顺时针转动时,  $v_A^n < v_{A'}^n$ ; 当两杆都逆时针转动时,  $v_A^n > v_{A'}^n$ ).

当以上三个条件同时满足时,刚性杆件  $O_1A$  的  $A$  端与  $O_2B$  上距  $O_2$  为  $l_{A'}$  的点发生接触碰撞.其中  $v_A^n, v_{A'}^n$  为两接触碰撞点的速度在接触面公法线上的投影,  $d_{AA'}$  为两潜在接触点对  $A, A'$  之间的距离.

$$\text{否则(1)} l_{B'} = \sqrt{d^2 + l_2^2 - 2dl_2 \sin\theta} \leq l_1;$$

$$(2) d_{BB'} = 0;$$

(3)  $v_B^n, v_{B'}^n$  反向,或者同向时其中一个速度大于另一速度(即当两杆都顺时针转动时,  $v_B^n < v_{B'}^n$ ; 当两杆都逆时针转动时,  $v_B^n > v_{B'}^n$ ).

当以上三个条件同时满足时,刚性杆件  $O_2B$  的  $B$  端与  $O_1A$  上距  $O_1$  为  $l_{B'}$  的点发生接触碰撞.其中  $v_B^n, v_{B'}^n$  为两接触点速度在接触面公法线上的投影.  $d_{BB'}$  为两潜在接触点对  $B, B'$  之间的距离.

由图1给出模型可以知道当模型中各个量满足不同的条件时,其接触碰撞状态是不同的.有以下三种情况:

(a) 当  $l_1 \geq l_2 + d$  时,只有图1(B)所示的接触状态会发生;

(b) 当  $l_2 \geq l_1 + d$  时,只有图1(A)所示的接触状态会发生;

(c) 当  $|l_1 - l_2| < d$  时,两刚性杆件在运动过程中,图1所示的两种接触状态都有可能发生.

因此,针对两刚性杆件的具体情况可以具体分析.对于情况(a),只需要用算法中的后一部分就可以判断出接触碰撞点的位置;对于情况(b),只需用算法中的前一部分就可以判断出接触碰撞点的位置;只有当两刚性杆件长度与  $d$  的关系满足情况(c)时,其接触碰撞点的求法才用上述的算法的

完整形式.无论是上述三种情况中哪一种情况,若接触碰撞时有  $l_{A'} = l_2$  或  $l_{B'} = l_1$  则其接触碰撞模式为尖点—尖点接触碰撞,其它的接触碰撞皆为尖点—平面接触碰撞.

## 2 两刚性杆件碰撞过程的分析

在非碰撞阶段,该系统的动力学方程为

$$J_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum M_O(F).$$

碰撞过程的分析需要建立碰撞前后系统状态的关系,因此需要用到恢复系数,在这里采用牛顿恢复系数  $k: k = \frac{v_r'^n}{v_r^n}$ , 其中,  $v_r^n$  和  $v_r'^n$  分别为两个运动物体在碰撞前瞬时和碰撞后瞬时接触点沿接触面法向的相对速度.

下面就图1中(A)的接触碰撞状态,利用牛顿恢复系数法建立两刚性杆件碰撞前后角速度之间的关系.对于图1中(B)的情况可以同理推得.

在图1(A)中,刚性杆  $O_1A$  与  $O_2B$  上的  $A'$  点接触碰撞,此时  $O_2B$  杆就相当于接触碰撞点的接触面,而此时  $A'$  点的速度是沿着公法线的,而  $A$  点的速度方向则不是,所以此碰撞是斜碰撞.

设碰撞前  $A, A'$  两点的速度分别为  $v_A, v_{A'}$ , 这两速度在公法线上的投影分别为  $v_A^n, v_{A'}^n$ , 碰撞前两杆件的摆角分别为  $\varphi_0, \theta_0$ , 角速度分别为  $\dot{\varphi}_0, \dot{\theta}_0$ .

则有:

$$v_A^n = v_A \cos(\varphi_0 - \theta_0) = l_1 \dot{\varphi}_0 \cos(\varphi_0 - \theta_0) \quad (1)$$

$$v_{A'}^n = v_{A'} = l_{A'} \dot{\theta}_0 \quad (2)$$

$$k = \frac{v_{A_1}^n - v_{A_1'}^n}{v_{A'}^n - v_A^n} \quad (3)$$

其中  $v_{A_1}^n, v_{A_1'}^n$  分别为碰撞后  $A$  与  $A'$  两点沿接触面公法线方向的速度.

对  $O_1A$  杆用冲量矩定理,可得:

$$J_{O1} \dot{\varphi}_1 - J_{O1} \dot{\varphi}_0 = -\Pi l_1 \cos(\varphi_0 - \theta_0) \quad (4)$$

同理对  $O_2B$  杆用冲量矩定理,可得:

$$J_{O2} \dot{\theta}_1 - J_{O2} \dot{\theta}_0 = \Pi l_{A'} \quad (5)$$

其中  $\dot{\varphi}_1, \dot{\theta}_1$  分别为碰撞后两刚性杆件的角速度,  $\Pi$  为碰撞时候的冲量.  $J_{O1} = \frac{1}{3} m_1 l_1^2, J_{O2} = \frac{1}{3} m_2 l_2^2$ .

进一步可得:

$$v_{A_1}^n = l_{A'} \dot{\theta}_1, v_{A_1'}^n = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_0 - \theta_0) \quad (6)$$

由(1)一(6)式可解得碰撞后瞬时两刚性杆件各自的角速度.

同理图1(B)所示的接触碰撞过程也可以用上面的知识进行碰撞过程的分析.

### 3 数值算例

为验证以上方法的正确性,给出以下算例.

对图1中的模型,设  $l_1 = 1\text{m}$ ,  $l_2 = 1.6\text{m}$ ,  $m_1 = m_3 = 3\text{kg}$ ,  $d = 0.5\text{m}$ , 开始时,  $O_1A$  杆处在  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  的位置无初速度下落,  $O_2B$  杆处在  $\theta = 0$  的位置静止, 初始时间为  $t = 0$ , 取恢复系数  $k = 1$ , 在运动过程中, 除两杆件各自的重力外, 系统不受其它外力的影响, 且接触碰撞的过程是光滑的. 经过 MATLAB 的数值模拟, 得到如下所示的结果: (在此例中, 以  $O_1$  为原点, 建立一个坐标系).

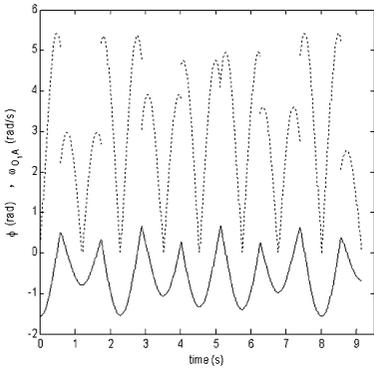


图3  $O_1A$  杆转角和角速度

Fig. 3 The rotation angle and angular velocity of  $O_1A$

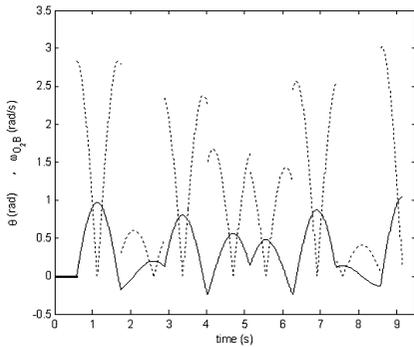


图4  $O_2B$  杆转角和角速度

Fig. 4 The rotation angle and angular velocity of  $O_2B$

图3中虚曲线是杆  $O_1A$  角速度随时间的变化曲线, 其中角速度值发生跳跃的时间就是杆  $O_1A$  的  $A$  端与杆  $O_2B$  上距  $O_2$  为  $l_{A'}$  的点发生接触碰撞的时间. 图3中实曲线杆  $O_1A$  的转角随时间的变化曲

线.

图4中虚曲线是杆  $O_2B$  角速度随时间的变化曲线, 其中角速度值发生跳跃的时间就是杆  $O_1A$  的  $A$  端与杆  $O_2B$  上距  $O_2$  为  $l_{A'}$  的点发生接触碰撞的时间. 图4中实曲线是杆  $O_2B$  的转角随时间的变化曲线. 因为从运动到第一次接触碰撞之前  $0.5820\text{s}$  的时间内  $O_2B$  杆是静止的, 所以转角和角速度在这段时间里都是个恒值为  $0(\text{rad})$  和  $0(\text{rad/s})$ , 即图中直线所示部分.

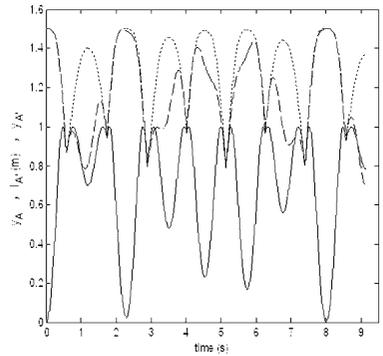


图5 潜在接触点对  $A, A'$  两点的纵坐标和  $l_{A'}$

Fig. 5 The ordinate of the potential contact points  $A, A'$  and the  $l_{A'}$

图5中实线为  $y_A$  随时间变化的曲线; 点虚线为  $l_{A'}$  随时间变化的曲线; 剩下的一条曲线为  $y_{A'}$  随时间变化的曲线. 由此图中数值结果分析可知: 机构对此算例而言,  $O_2B$  杆上的潜在接触点  $A'$  与  $O_1A$  发生碰撞时, 其  $l_{A'}$  基本上处于  $0.8\text{m}$  到  $1\text{m}$  之间, 其尖点一平面接触碰撞的情况几乎是以概率1发生的, 而另一种接触模式发生的概率几乎为零.

### 4 结论

本文分析了两刚性杆件组成的多体系统在运动过程中的接触碰撞模式, 给出了求解接触碰撞点的新方法, 根据此方法可以判断出此模型的接触碰撞模式; 并通过 Matlab 对运动过程进行了动力学模拟. 从该模拟的结果可看出, 在运动过程中发生了多次碰撞, 同实际物理过程相符, 从而间接证明本文所提供的计算方法的有效性. 进一步的工作将针对更为复杂的接触情况来研究高效精确的通用方法.

### 参考文献

- 1 彼得·艾伯哈特, 胡斌. 现代接触动力学. 南京: 东南大

- 学出版社,2003 (Eberhard peter, Hu bin. Advanced contact dynamics. Nanjing: Southeast University Press, 2003 (in Chinese))
- 2 傅由甲,杨克俭,王玉华. 一种快速计算三维空间中物体碰撞接触面的方法. 计算机仿真. 2005,22(1):68~72 (Fu youjia, Yang kejian, Wang yuhua: A Method for Rapidly Calculating the Contact Regions of Colliding Objects in Three - Dimensional Space. *Computer Simulation*, 2005, 22(1):68~72 (in Chinese))
  - 3 许力君. 带有单面约束的多体系统的数值分析. 大连:大连理工大学出版社,2008 (Xu lijun. Numerical value analysis of multibody systems with unilateral constraint. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2008 (in Chinese))
  - 4 金俐,王琪,陆启超. 多体系统碰撞点自动搜索方法. 中国农业大学学报,2004,9(1):57~59 (Jin li, Wang qi, Lu qishao, Mei shuli. An automatic searching method for collision points of multibody systems. *Journal of china agricultural university*, 2004,9(1):57~59 (in Chinese))
  - 5 哈尔滨工业大学力学教研室编. 理论力学. 北京:高等教育出版社,2005,第六版 (Theoretical Mechanics Department of Harbin Institute of Technology: Theoretical mechanics. Beijing: Higher Education Press, 2005 (in Chinese))
  - 6 尉立肖,刘才山. 圆柱铰间隙运动学分析及动力学仿真. 北京大学学报,2005,9:41(5) (Wei lixiao, Liu caishan. Dynamic simulation and kinetic description of revolute joint with spatial clearanc. *J. Beijing Peking University Press*, 2005,9:41(5)679~687 (in Chinese))

## THE GEOMETRY AND THE DYNAMICS SIMULATION OF THE RIGID ROD NON-FIXED POINT COLLISION \*

Gao lulu<sup>1</sup> Yao wenli<sup>2</sup>

(1. College of Mechanical and Electronic Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, China)

(2. Department of Engineering Mechanics, Qingdao Technological University, Qingdao 266520)

**Abstract** For the multi-body system consisted of two rigid rods, the position of contact impact point is inconclusive in the motion process. Two contact impact models for this multi-body system were proposed, the method of searching the contact impact point was analyzed, and the method of judging the contact impact model was obtained. The dynamics simulation of this multi-body system was done by MATLAB.

**Key words** contact impact model, contact point, non-fixed point contact and impact