

脱层板固有频率的有限元方法分析

但敏 卿光辉

(中国民航大学航空工程学院, 天津 300300)

摘要 结合弹性材料修正后的 H-R (Hellinger-Reissner) 变分原理和二次插值函数, 建立了平面坐标系下 Hamilton 正则方程推导了八节点等参元列式. 考虑到脱层板的连接界面上应力和位移的连续性, 将脱层板离散成上下两层, 采用“分离合并”技术, 建立脱层情况下板的控制方程. 本文具体研究了脱层结构的固有频率问题, 数值实例证明了本文方法的正确性. 八节点等参元的使用不仅减少了节点数, 同时也大大提高了计算效率.

关键词 固有频率, Hamilton 正则方程, 半解析法, 八节点等参元, 脱层

引言

层合板的脱层问题一直是材料界和力学研究的热点, Tay^[1] 比较系统地评述了近几十年来该领域所取得的新结果. Chai^[2] 为复合材料结构脱层损伤的理论做出了杰出贡献, 杨金花^[3] 研究了脱层圆柱壳的静力学和动力学问题. 但是这些方法都基于一定的假设前提, 模型的建立都有一定的局限性.

用弹性力学 Hamilton 正则方程的半解析法^[4] 仿真板壳等结构的优点之一是: 可处理复杂侧面边界、复杂几何形状及复杂外载荷作用下层合梁、层合板壳等结构的各类力学问题, 甚至于可处理各向异性材料; 另一个突出的优点是对于强厚度板壳或层合板壳, 无需任何位移或应力假设; 传递矩阵技术的顺利实施使得控制方程的未知数与结构的层数无关, 并保证了层与层之间的位移和应力的连续性, 为数值分析结果的准确性提供保证.

卿光辉、刘艳红等人^[4-7] 在将 Hamilton 正则方程现有的半解析法与四节点等参元相结合研究上做了大量研究, 但是将 Hamilton 正则方程现有的半解析法与层合板的脱层问题相结合的文献较少见, 基于八节点等参元具有比四节点等参元计算精度高、收敛速度快等优点^[7], 且笔者未曾查到将八节点等参元与 Hamilton 正则方程相结合, 来求解层合板脱层后的固有频率问题的文献. 故本文采用文献^[6] 的技术, 推导了层合板脱层情况下 Hamilton 正

则方程八节点等参元列式. 在实例分析中, 本文具体研究了脱层结构的固有频率问题, 数值实例证明了本文方法的正确性. 八节点等参元的使用不仅减少了节点数, 同时也大大提高了计算效率.

1 单层板的控制方程

对于各种类型的板, 都可视为由许多个单层薄板组成, 使用同一种混合状态 Hamiltonian 等参元离散各层. 将每一层薄板的网格都与最上层网格相同, 如图 1 所示:

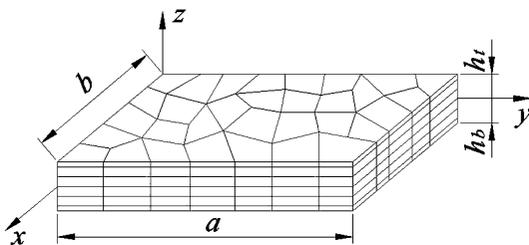


图 1 层合板
Fig. 1 Laminated plates

对于薄层板中的每一个网格, 参考文献^[5, 8-11], 对于各向同性、正交异性或各向异性弹性板, 修正后的 Hellinger-Reissner 变分原理可表示为

$$\begin{aligned} \Pi = & \iiint_V (\mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z} - H) dV - \iint_{S_r} [\bar{T}_x u + \bar{T}_y v + \\ & \bar{T}_z w] dS - \iint_{S_u} [T_x (u - \bar{u}) + T_y (v - \bar{v}) + \end{aligned}$$

$$T_z(w - \bar{w})]dS \quad (1)$$

式(1)中各符号详细情况请参考文献[5, 7], 利用高阶单元具有比低阶线性单元更高的收敛率, 八节点元比四节点元具有更快的收敛率, 本文引入八节点形函数^[7], 见图2.

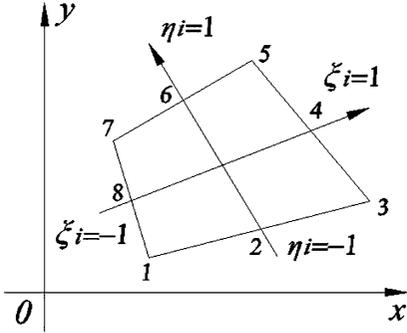


图2 八节点等参元

Fig. 2 8-node isoparametric element

$$N_i(\xi, \eta) = \begin{cases} (1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)/2; & i = 2, 6 \text{ (下上两边的中点)} \\ (1 + \xi_i \xi)(1 - \eta^2)/2; & i = 4, 8 \text{ (右左两边的中点)} \\ (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1)/4; & i = 1, 3, 5, 7 \text{ (四个角点)} \end{cases} \quad (2)$$

可得板的整体坐标 x 和 y 与局部坐标 ξ 和 η 有如下的转换关系:

$$\begin{cases} x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 + N_5 x_5 + \\ N_6 x_6 + N_7 x_7 + N_8 x_8 \\ y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 + N_5 y_5 + \\ N_6 y_6 + N_7 y_7 + N_8 y_8 \end{cases} \quad (3)$$

即可得一个网格的形函数矩阵:

$$N_{all} = \begin{bmatrix} \bar{N}(x, y) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{N}(x, y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{N}(x, y) \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中:

$$\bar{N}(x, y) = [N_1(\xi, \eta) \ N_2(\xi, \eta) \ N_3(\xi, \eta) \ N_4(\xi, \eta) \ N_5(\xi, \eta) \ N_6(\xi, \eta) \ N_7(\xi, \eta) \ N_8(\xi, \eta)]$$

设混合状态 Hamiltonian 等参元的场函数为

$$\begin{cases} u(x, y, z) = N_{all} U_{all}^T(z) \\ v(x, y, z) = N_{all} V_{all}^T(z) \\ w(x, y, z) = N_{all} W_{all}^T(z) \end{cases}; \begin{cases} \tau_{xz}(x, y, z) = N_{all} \tau_{xz, all}^T(z) \\ \tau_{yz}(x, y, z) = N_{all} \tau_{yz, all}^T(z) \\ \sigma_z(x, y, z) = N_{all} \sigma_z, all}^T(z) \end{cases} \quad (5)$$

式中:

$$U_{all}(z) = [u_1(z) \cdots u_8(z)]; V_{all}(z) = [v_1(z) \cdots v_8(z)];$$

$$W_{all}(z) = [w_1(z) \cdots w_8(z)]; \tau_{xz, all}(r) = [\tau_{xz1}(z) \cdots \tau_{xz8}(z)];$$

$$\tau_{yz, all}(r) = [\tau_{yz1}(z) \cdots \tau_{yz8}(z)]; \sigma_z, all}(r) = [\sigma_{z1}(z) \cdots \sigma_{z8}(z)]$$

根据式(2)和式(3), 可将 P 和 Q 写成矩阵形式为

$$\begin{cases} P = NP_e \\ Q = NQ_e \end{cases} \quad (6)$$

式(6)中下标 e 表示一个网格, 在处理完边界后, 整合成下列方程

$$\begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} P_e \\ Q_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ F & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_e \\ Q_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Xi_e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

式(7)中矩阵 C, A, B, F, D 和 Ξ 的详细表达见文献[6], 将该薄层中的所有网格进行拼装, 即可得到单层板的控制方程.

2 层合板的控制方程

对于脱层情况下层合板如图3(a)和图3(b)所示, 根据脱层位置将层合板分量为上下两个子板, 对于层合板的每一层都采用相同的 Hamilton 等参元离散平面, 各子层的网格划分及结点编号完全相同, 并且每层的结点和未知量编号保持完全一致, 子板又可以分成不同厚度子层, 把任意子层全部单元按一般有限元方法拼装即可得到子层的控制方程.

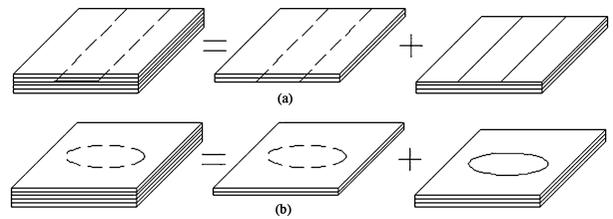


图3 层合板脱层三维模型

Fig. 3 3D models of delaminated plates:

(a) 1D throughout model; (b) 2D internal model

对于上子板可得子层的控制方程为

$$M_m \frac{\partial H_m(z_m)}{\partial z} = K_m H_m(z_m) + G_m \quad (8)$$

式中 $H_m(z_m) = [P_m(z_m) \ Q_m(z_m)]^T$, G_m 表示为体积力.

对于齐次边界情况并不考虑体积力的问题, 故有 $G_m = \mathbf{0}$, 所以方程(8)的通解为:

$$H_m(z_m) = K H_m(0) \quad (9)$$

式中 z_m 是第 m 层的厚度. 对于有 n 层的上子板, 根

据层间应力和位移的连续性,有

$$\mathbf{H}_n(h_t) = \left(\prod_{j=1}^n \mathbf{K}_j \right) \mathbf{H}_1(0) \quad (10)$$

将上子板中连续区域与脱层区域分开表达,则方程(10)可写为下面矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{H}_c^u(h_t) \\ \mathbf{H}_d^u(h_t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_c^{bb}(0) \\ \mathbf{H}_d^{bb}(0) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

式中 h_t 表示上子板的厚度, \mathbf{H}^u 中第一个上标表示上子板;第二个上标 t 表示上子板的上表面,第二个上标 b 表示上子板的下表面. 约定:列向量 $\mathbf{H}_c^u(h_t)$ 和 $\mathbf{H}_c^{bb}(0)$ 包含了连续区上所有节点的平面外应力和位移(包括裂纹前缘上所有节点平面外应力变量和节点位移变量);列向量和包含了脱层区上所有节点的平面外应力和位移(不包括裂纹前缘上所有节点平面外应力变量和节点位移变量).

对于下子板,同理可得到相同的矩阵控制方程

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{H}_c^{bt}(0) \\ \mathbf{H}_d^{bt}(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_c^{bb}(-h_b) \\ \mathbf{H}_d^{bb}(-h_b) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

式中 h_b 是下子板的厚度,第一个上标 b 表示下子板;第二个上标 t 表示下子板的上表面,第二个上标 b 表示下子板的下表面.

合并上下子板的控制方程:因为上子板的下表面和下子板的上表面在连续区内有 $\mathbf{H}_c^{bt}(0) = \mathbf{H}_c^{bb}(0)$,故联立式(11)和(12)得

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{H}_c^u(h_t) \\ \mathbf{H}_d^u(h_t) \\ \mathbf{H}_d^{bt}(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{T}_{11}\mathbf{B}_{12} & \mathbf{T}_{11} \\ \mathbf{T}_{21}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{T}_{21}\mathbf{B}_{12} & \mathbf{T}_{22} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_c^{bb}(-h_b) \\ \mathbf{H}_d^{bb}(-h_b) \\ \mathbf{H}_d^{bt}(0) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_c^u(h_t) &= [\mathbf{H}_{cr}^u(h_t) \quad \mathbf{H}_{cu}^u(h_t)]^T; \mathbf{H}_c^{bb}(-h_b) = \\ &= [\mathbf{H}_{cr}^{bb}(h_b) \quad \mathbf{H}_{cu}^{bb}(-h_b)]^T; \mathbf{H}_d^u(h_t) = [\mathbf{H}_{dr}^u(h_t) \\ &= \mathbf{H}_{du}^u(h_t)]^T; \mathbf{H}_c^{bb}(-h_b) = [\mathbf{H}_{cr}^{bb}(-h_b) \quad \mathbf{H}_{cu}^{bb}(-h_b)]^T; \mathbf{H}_d^{bt}(0) = [\mathbf{H}_{dr}^{bt}(0) \quad \mathbf{H}_{du}^{bt}(0)]^T; \mathbf{H}_d^{bb}(0) = \\ &= [\mathbf{H}_{dr}^{bb}(0) \quad \mathbf{H}_{du}^{bb}(0)]^T. \end{aligned}$$

故式(13)可写为

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}' \\ \mathbf{u}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^b \\ \mathbf{u}^b \end{Bmatrix} \quad (14)$$

式中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}' &= [\mathbf{H}_{cr}^u(h_t) \quad \mathbf{H}_{dr}^u(h_t) \quad \mathbf{H}_{dr}^{bt}(0)]^T; \\ \boldsymbol{\sigma}^b &= [\mathbf{H}_{cr}^{bb}(-h_b) \quad \mathbf{H}_{dr}^{bb}(-h_b) \quad \mathbf{H}_{dr}^{bt}(0)]^T; \\ \mathbf{u}' &= [\mathbf{H}_{cu}^u(h_t) \quad \mathbf{H}_{du}^u(h_t) \quad \mathbf{H}_{du}^{bt}(0)]^T; \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}^b = [\mathbf{H}_{cu}^{bb}(-h_b) \quad \mathbf{H}_{du}^{bb}(-h_b) \quad \mathbf{H}_{du}^{bt}(0)]^T.$$

对于自由振动问题,板的上下表面的应力向量 $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}^b = 0$,所以在式(14)中有

$$\mathbf{k}_{12}\mathbf{u}^b = 0 \quad (15)$$

为了求得式(15)的非零解,带有故有频率未知量的多项式方程有

$$|\mathbf{k}_{12}| = 0 \quad (16)$$

采用二分法即可方便求取上式的解.

3 数据计算和分析

算例1 八节点的精度和效率:取某 Q235 碳素钢板,在脱层区域为零(即无脱层时),材料参数长 $a = 2\text{m}$,宽 $b = 2\text{m}$,厚度 $h = 0.1\text{m}$, $E = 200\text{GPa}$, $\mu = 0.3$, $\rho = 7800\text{kg/m}^3$,计算其固有频率,ANSYS 解是通过各向异性立体元 Solid64 元素得到.

表1 前三阶固有频率比较/Hz

	SSSS			CSCS		
	First	Second	Third	First	Second	Third
8 - node	118.612	294.653	465.345	173.730	323.815	410.617
4 - node	118.291	294.018	464.625	173.931	324.308	411.461
ANSYS	119.58	296.64	469.57	174.56	327.13	413.12
Error 1 (%)	0.8095	0.6698	0.8898	0.4755	1.0133	0.6059
Error 2 (%)	1.078	0.8839	1.053	0.3603	0.8627	0.4016

表1中的 SSSS 表示四边简支;CSCS 表示对边简支,对边固支.

本文误差计算方法是 |ANSYS 解 - 八(四)节点解| / 八(四)节点解 $\times 100$. 误差1是 ANSYS 解和本文八节点解(81个元素,280个节点,共1680个未知量)结果进行对比得到;误差2是解析解和四节点解(324个元素,361个节点,共2166个未知量)结果进行对比得到. 运用 AMD Athlon 2.80GHz(双核),2G内存电脑计算本文中八节点(81个元素)平均需要 13.8608s;四节点(324个元素)平均需要 35.014s.

算例2 脱层长度对固有频率影响:参考文献[12,13],考虑复合材料与复合材料粘结层合板,板长 $L = 1\text{m}$,宽 $W = 0.8\text{m}$,厚度 $h = 0.02\text{m}$,经外力作用在板的粘结中间位置出现脱层,如图3(a)所示,该板上层为环氧树脂,下层为玻璃增强树脂基复合材料,环氧树脂参数为: $E_x = 14.5\text{GPa}$, $E_y = 13.66\text{GPa}$, $E_z = 5.9\text{GPa}$, $\mu_{xy} = 0.149$, $\mu_{yz} = 0.3$, $\mu_{xz} = 0$.

1, $G_{xy} = 1.78\text{GPa}$, $G_{yz} = 1.69\text{GPa}$, $G_{xz} = 1.46\text{GPa}$, $\rho = 2000\text{kg/m}^3$; 玻璃增强树脂基复合材料为: $E_x = 70\text{GPa}$, $E_y = 68\text{GPa}$, $E_z = 68\text{GPa}$, $\mu_{xy} = 0.065$, $\mu_{yz} = 0.065$, $\mu_{xz} = 0.4$, $G_{xy} = 5\text{GPa}$, $G_{yz} = 5\text{GPa}$, $G_{xz} = 1.4\text{GPa}$, $\rho = 1110\text{kg/m}^3$; 脱层位置从中间向两边扩散。

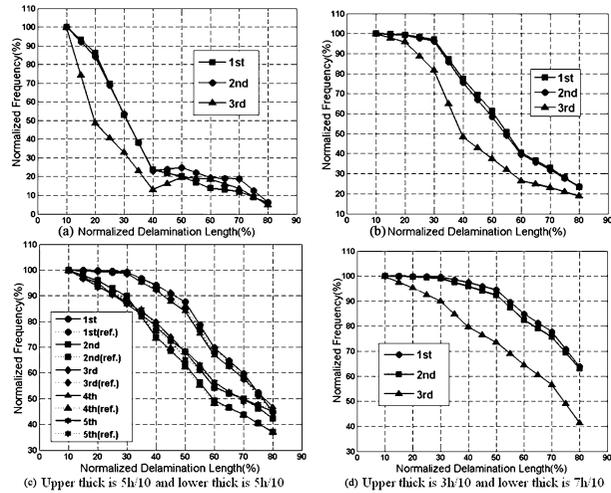


图4 不同脱层厚度的固有频率

Fig. 4 The natural frequencies of different delaminate thickness

文献[12,13]中的结论与图5中图(c)吻合较好,由此可以验证本方法的正确性.从图5中图(a)、图(b)、图(c)和图(d)中可以看出,当下层厚度较小时,该层合板的固有频率下降速度随脱层长度的增加变化剧烈,但随后变化不大,随着下层厚度的逐渐增加,该层合板的各阶固有频率下降的速度随着脱层长度的增加而减缓.

4 结论

本文是基于弹性材料修正后的H-R变分原理,引入二次插值函数,建立了平面坐标系下Hamilton正则方程八节点等参元列式,并对脱层情况下板的固有频率进行分析.本文突出了:(1)利用二次插值函数较高的计算精度,结合等参元可以处理各种形状的优点,丰富了Hamilton正则方程的半解析法;(2)本文首次将文献[6]中的“分离合并”技术与脱层相结合,研究了同种材料不同厚度情况下,脱层板的各阶固有频率下降情况,该结论可以为使用该材料时候,根据选择设备需要,避免进入共振区.

本文的方法可以进一步推广到压电材料中去.对于九节点,仍可采用本文方法同样进行类推.

参考文献

- Tay T E. Characterization and analysis of delamination fracture in composite: An overview of developments form 1990-2001. *Applied Mechanics Review*, 2003, 51(1): 1 ~ 32
- Chai H, Babcock C D, Knauss W G. One delamination modeling of failure in laminated plates by delamination buckling. *International Journal of Solids Structures*, 1981, 17(1): 1069 ~ 1083
- 杨金花,傅衣铭,王永.考虑接触效应的具轴对称脱层层合圆柱壳的非线性动力响应分析. *工程力学*, 2006, 23(3): 69 ~ 75 (Yang J H, Fu Y M, Wang Y. Analysis of nonlinear dynamic response for axisymmetrical delaminated laminated cylindrical shell under considering the effect of contact. *Engineering Mechanics*, 2006, 23(3): 69 ~ 75 (in Chinese))
- 卿光辉,邱家俊,胡宇达.双壳耦合结构与大型发电机定子系统的振动特性分析. *工程力学*, 2004, 21(2): 101 ~ 106 (Qing G H, Qiu J J, Hu Y D. Vibrational characteristics of double-shell coupling structures and large generator stator systems. *Engineering Mechanics*, 2004, 21(2): 101 ~ 106 (in Chinese))
- Qing G H, Liu Y H, Qing G, Zhang D D. Dynamic analysis for three-dimensional laminated plates and panels with damping. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2008, 50(1): 83 ~ 91
- 卿光辉,王喆,刘艳红.壁厚不连续不对称圆柱壳和开口壳的自由振动分析. *工程力学*, 2006, 23(1): 25 ~ 29 (Qing G H, Wang Z, Liu Y H. Free vibration analysis of cylindrical shells and open shells with thickness discontinuity and dissymmetry. *Engineering Mechanics*, 2006, 23(1): 25 ~ 29 (in Chinese))
- 卿光辉,但敏,郭巧荣.柱坐标系下正则方程的八节点等参元列式. *动力学与控制学报*, 2010, 8(2): 165 ~ 169 (Qing G H, Dan M, Guo Q R. 8-node Isopapametric element on cylindrical shell for hamilton canonical equation and its natural frequency. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(2): 165 ~ 169 (in Chinese))
- 钟万勰.弹性力学求解新体系.大连:大连理工大学出版社,1995 (Zhong W X. A new systematic methodology for theory of elasticity. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1995 (in Chinese))
- 范家让.强厚叠层板壳的精确理论.北京:科学出版

- 社, 1996(Fan J R. Exact theory of laminated thick plates and shells. Beijing: Science Press, 1996(in Chinese))
- 10 Ding H J, Chen W Q, Xu R Q. New state space formulations for transversely isotropic piezoelectricity with application. *Mechanics Research Communications*, 2000, 27(3): 319 ~ 326
- 11 Ding K W, Tang L M. Exact solution for axisymmetric thick laminated shells. *Composite Structures*, 1999, 46:125 ~ 129
- 12 梁清香, 牛学仁, 李雷等著. 脱层对两端固支层合板固有频率影响的研究. 太原科技大学学报, 2006, 27(2): 124 ~ 126(Liang Q X, Niu X R, Li L. Research on the effects of delaminates on natural Frequency of the lamination board with fixed ends. *Journal of Tai-yuan University of Science and Technology*, 2006, 27(2):124 ~ 126(in Chinese))
- 13 雷建平, 张根全, 武海龙. 不同边界条件下脱层对层合梁自然频率的影响. 工程力学, 2002, 19(4): 42 ~ 45 (Lei J P, Zhang G Q, Wu H L. Effect of delamination on the natural frequencies of laminated beam under various boundary conditions. *Engineering Mechanics*, 2002, 19(4), 42 ~ 45(in Chinese))

NATURAL FREQUENCIES ANALYSIS OF DELAMINATION PLANES WITH FINITE ELEMENT METHOD

Dan Min Qing Guanghui

(College of Aeronautical Engineering, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

Abstract By combining the modified H-R variational principle for elastic material with the quadratic interpolation functions, the formulation of isoparametric element with 8-node for Hamilton canonical equation in the plane-coordinate was derived. The continuity of stresses and displacements on the interface between layers was applied to separate into top/bottom layers. By using the separating-combining method, the state equation with delamination situation was established. The natural frequencies of delaminated plate were studied and the numerical examples show that the method presented is correct. The method of using isoparametric element with 8-node for Hamilton canonical equation reduces the number of nodes, and improves the efficiency.

Key words natural frequencies, Hamilton canonical equation, semi-analytical solution, parametrical element with 8-node, delamination