

电磁共振腔的节点有限元法*

孙雁¹ 钟万勰^{1,2}

(1. 上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院工程力学系, 上海 200240) (2. 大连理工大学工程力学系, 大连 116023)

摘要 电磁场节点有限元法因未强加电场散度为零的条件而一直受到伪解出现的困扰. 本文针对电磁共振腔问题, 给出在频域的 Maxwell 方程表达式. 通过引入 Lorentz 条件, 推导出电磁共振腔二类变量和三类变量的变分原理, 由此提出了新的电磁共振腔节点有限元法, 避免了伪解的出现. 最后用子空间叠代法求解了共振腔的本征值问题. 数值算例表明本文方法是有效可行的.

关键词 电磁波, 有限元, 共振腔, 本征值, 子空间叠代法

引言

电磁波的理论计算非常重要^[1], 要有电磁波导的分析, 还要有复杂形状的共振腔分析. 对此, 有限元方法是必要的. 共振腔分析当然是动态电磁场, 故类似结构振动问题, 有本征值问题, 也可以是在给定频率下做波传输的分析. 总之, 共振腔的有限元分析是很重要的环节.

电磁场的有限元分析已经有很多研究, 见文献[2]. 其中常见的一类变量变分原理对应的节点有限元法有 C1 连续性的困难, 因此采用了棱边有限元. 前文[3]运用对偶变量的有限元离散就不会出现 C1 连续性的问题. 然而仍有许多伪解, 原因是有限元离散时未曾考虑满足电场 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 的条件, 这本来是 Maxwell 方程的一部分. 文献[4]通过奇异值分解 SVD 试探过该问题, 但有非零伪解等许多问题. 节点有限元比棱边有限元有许多优点, 但若节点有限元预先满足 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 有许多困难. 本文讲述运用 Lorentz 规范场的变分原理推导的节点有限元法, 用变分原理满足 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 的条件, 得到了比较满意的数值结果.

1 变分原理

Maxwell 方程是在时域列式的, 为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t \end{aligned} \quad (1)$$

以及本构关系

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (2a)$$

符号是常用的. 本文只考虑最基本的真空电磁波, 无外源 $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$.

因 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 故可引入磁场向量势

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3)$$

从而有

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}/c - \nabla \varphi \quad (4)$$

如果选择 Lorentz 条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \dot{\varphi}/c = 0 \quad (5)$$

则有微分方程, 见著作[5]

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \ddot{\mathbf{A}}/c^2 = 0, \quad \nabla^2 \varphi - \ddot{\varphi}/c^2 = 0 \quad (6)$$

其中 \mathbf{A}, φ 分别称为: 磁场向量势与电场纯量势; c 为光速.

以上是在时域列式的, 其频域列式可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{h} \cos \omega t = \operatorname{Re}[\mathbf{h} e^{-i\omega t}], \\ \mathbf{E} &= \mathbf{e} \sin \omega t = \operatorname{Re}[\mathbf{e} e^{-i\omega t}] \\ \mathbf{A} &= \mathbf{a} \cos \omega t, \quad \varphi = \phi \sin \omega t \end{aligned} \quad (7)$$

其中电场 $\mathbf{e}(x, y, z, \omega)$, 磁场 $\mathbf{h}(x, y, z, \omega)$ 待求, 它们都是实型函数. 频域微分方程成为

$$\boldsymbol{\mu} \mathbf{h} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\omega} \varepsilon \mathbf{e} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{h} \quad (8a)$$

$\boldsymbol{\mu}$ 与 ε 分别为介磁与介电矩阵. 由(7)式磁场向量势 $\mathbf{a}(x, y, z, \omega)$ 与电场纯量势 $\phi(x, y, z, \omega)$ 的 Lorentz 条件成为

$$\nabla \cdot \mathbf{a} + \omega \phi / c = 0 \quad (9)$$

$$\text{而 } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & -\partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

是算子矩阵. 容易验证

$$\nabla^T \cdot \mathbf{R} = 0, \nabla = \{ \partial/\partial x \quad \partial/\partial y \quad \partial/\partial z \}^T$$

故从(2ab)有 $\nabla \cdot (\boldsymbol{\mu}\mathbf{h}), \nabla \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{e}) = 0$. 也可验证

$$\mathbf{R}^2 = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & & \\ & \partial/\partial y & \\ & & \partial/\partial z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla^2 & & \\ & \nabla^2 & \\ & & \nabla^2 \end{bmatrix}$$

要注意当 $\omega \neq 0$ 时, $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ 与 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 方才有保证. 当 $\omega = 0$ 时, $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ 与 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 还是不可缺少的.

还有边界条件. 设有限域(共振腔)的边界为 S , 理想导体的边界条件是

$$\mathbf{n} \times \mathbf{e} = 0 \quad \text{以及} \quad \mathbf{n}^T \mathbf{h} = 0, \quad \text{在边界 } S \quad (11)$$

其中 \mathbf{n} 是边界外法线单位向量. 条件 $\mathbf{n}^T \mathbf{h} = 0$ 可在有限元程序中加以处理. 域内如有不同介质, 则应当一起分析, 应注意分界面的条件, 不是简单的连续条件. 如果是无限区域, 则要求向无穷远衰减足够快

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, \omega) \rightarrow o(|r|^{-\alpha}), \mathbf{h}(\mathbf{r}, \omega) \rightarrow o(|r|^{-\alpha}), \\ \alpha > 3/2, \text{当 } |r| \rightarrow \infty \quad (12)$$

向量场 \mathbf{e}, \mathbf{h} 应当由方程(8)以及相应的边界条件解出, 对于有限区域 V 与理想导体边界条件, 其变分原理可以表达为

$$\Pi(\mathbf{e}, \mathbf{h}) = \iiint_V [\mathbf{h}^T \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}) - \mu_0 \omega \mathbf{h}^T \mathbf{h} / 2 - \\ \omega \mathbf{e}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e} / 2] dx dy dz + \iint_S [\mathbf{e}^T \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{h})] dS, \\ \delta \Pi = 0 \quad (13)$$

其中向量 \mathbf{h} 与 \mathbf{e} 的各分量当成为独立的试函数. (11)式 $\mathbf{n} \times \mathbf{e} = 0$ 的则成为其自然边界条件. μ_0 是真空的介磁常数. 由 $\delta \Pi = 0$ 可以导出(8). 反之, 真实解使 $\delta \Pi = 0$.

变分原理(13)将理想导体边界条件作为其自然边界条件. 形式上变分原理(13)的泛函不对称. 观察泛函(13)的被积函数, 当然是电场与磁场 \mathbf{e}, \mathbf{h} 的二次齐次函数. 分别有 \mathbf{e} 与 \mathbf{h} 的二次项, 还有 \mathbf{e} 乘 \mathbf{h} 的交互项. 而共振腔可采用齐次边界条件, 则变分原理(13)成为

$$\Pi(\mathbf{e}, \mathbf{h}) = \iiint_V [\mathbf{h}^T \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}) - \mu_0 \omega \mathbf{h}^T \mathbf{h} / 2 - \\ \omega \mathbf{e}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e} / 2] dx dy dz, \delta \Pi = 0 \quad (14)$$

对于有限区域 V , 只有对一些本征值 ω_c 的条件下方才有解. 共振腔的本征解计算是应当认真考虑的. 从

变分原理的函数看, $\delta \Pi = 0$ 是 $\max_{\mathbf{e}, \mathbf{h}} \Pi(\mathbf{e}, \mathbf{h}) = 0$.

变分原理是推导有限元的基础. 本文只讨论协调元. 在推导内部单元时, 其单元边界在区域内部, 场的连续条件替代了单元的边界条件. 虽然在推导单元矩阵时, 考虑该边界项与否当然会影响单元矩阵. 但注意两个相邻单元的外法线恰为反方向, 该边界成为内部面, 只要是同一材料, 内部界面两侧的积分互相抵消. 所以内部界面的边界积分项在推导有限元时不必计算. 如果共振腔的边界是导体, 则计算其边界积分, 即有自然边界条件.

2 Lorentz 条件下电磁势的变分原理

有限元应当明确理想导体边界条件的提法. 理想导体一定是等势的, 因此切面方向的电场 $\mathbf{e}_s = 0$; 但边界条件还有对于磁场的, 理想导体表面磁场的法向分量 $\mathbf{h}_n = 0$. 有限元电场矩阵与磁场矩阵的生成一定要计入表面处 $\mathbf{e}_s = 0, \mathbf{h}_n = 0$ 的边界条件(11).

直接用电场当作未知数的有限元计算, 不能得到满意效果, 因为结果与网格依赖性大. 它相当于采用了 $\phi(x, y, z, \omega) = 0$ 的规范变换^[4], 灵活性丧失. 原因是此时 Lorentz 条件成为 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 相当于要预先满足 $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$ 的约束, 这种约束是全局性的. 造成网格敏感性, 应容忍 $\phi \neq 0$ 的解. 此时

$$\mathbf{e} = (\omega/c) \mathbf{a} - \nabla \phi \quad (15)$$

代入变分原理(14)消去 \mathbf{e} , 有

$$\mathbf{h} = \mathbf{R} \cdot [(1/c\mu_0) \mathbf{a} - \nabla \phi / \omega \mu_0] = (1/c\mu_0) \mathbf{R} \cdot \mathbf{a}$$

$$\Pi(\mathbf{a}, \mathbf{h}, \phi) = \iiint_V [\mathbf{h}^T \cdot [(\omega/c) \mathbf{R} \cdot \mathbf{a}] - \\ \mu_0 \omega \mathbf{h}^T \mathbf{h} / 2 - \omega [(\omega/c) \mathbf{a} - \nabla \phi]^T \boldsymbol{\varepsilon} [(\omega/c) \mathbf{a} - \\ \nabla \phi] / 2] dx dy dz, \delta \Pi = 0$$

其中利用了 $\mathbf{R} \cdot \nabla = 0$ 的算子恒等式. 为简单起见, 认为介质 $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \mathbf{I}$ 是真空. 变分原理的基本未知数是 $\mathbf{h}, \mathbf{a}, \phi$, 增加了函数 ϕ , 而向量 \mathbf{a} 也不再受 $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ 的约束了

$$\Pi(\mathbf{a}, \mathbf{h}, \phi) = \iiint_V [(1/c) \mathbf{h}^T \cdot [\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}] - \\ \mu_0 \mathbf{h}^T \mathbf{h} / 2 - \varepsilon_0 (\omega^2/c^2) \mathbf{a}^T \mathbf{a} / 2 + \varepsilon_0 (\omega/c) \mathbf{a}^T \cdot \nabla \phi - \\ \varepsilon_0 (\nabla \phi)^T (\nabla \phi) / 2] dx dy dz, \delta \Pi = 0 \quad (16)$$

执行变分操作, 得到

$$\delta \mathbf{h} : \mathbf{R} \cdot (\mathbf{a}/c) = \mu_0 \mathbf{h} \\ \delta \mathbf{a} : \mathbf{R} \cdot \mathbf{h} = \varepsilon_0 \omega^2 (\mathbf{a}/c) - \varepsilon_0 \omega \nabla \phi \\ \delta \phi : \nabla^2 \phi = (\omega/c) \nabla \cdot (\mathbf{a}) \quad (17abc)$$

其中方程(17c)的物理意义是 $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$, 只要对于(15)双方取 ∇ 算子就可看到. 而方程(17a, b)则只要将方程(15)代入(8)就可得到. 电场 \mathbf{e} 已经由(15)式所取代.

电场 \mathbf{e} 是物理量而 \mathbf{a}, ϕ 不是. 反映在边界条件, 例如导体, 本来是切线向的 $\mathbf{e}_s = 0$, 应代之以

$$(\omega/c)\mathbf{a}_s - \mathbf{n} \times \nabla \phi = 0, \text{ 在导体边界} \quad (18)$$

还应该注意, 方程中只出现 $\nabla \phi$, 故任意加一个常数不产生作用, 可指定某个点的 $\phi = 0$. 本来是对于 \mathbf{e} 的边界条件, 现在成为 \mathbf{a}, ϕ 的条件, 其中必定有一个条件可任意定.

选择了 Lorentz 条件(5), 其频率域的方程为式(9). 微分方程也成为

$$\nabla^2 \mathbf{a} + (\omega^2/c^2)\mathbf{a} = 0, \quad \nabla^2 \phi + (\omega^2/c^2)\phi = 0 \quad (19)$$

微分方程要求有边界条件方才能定解. 边界条件(18)可分解为 $\mathbf{a}_s = 0, \partial\phi/\partial s = 0$. 因为 $\partial\phi/\partial s = 0$, 其中 s 是切面的任意方向, 所以 $\phi = \text{Const}$ 边界条件为

$$\mathbf{a}_s = 0, \phi = \phi_b = \text{Const} \quad (20)$$

在此, 应对于选择 $\phi = \text{Const}$ 做出说明. A, φ 的选择并非唯一的, 事实上取^[4]

$$A' = A + \nabla \chi, \varphi' = \varphi - \chi/c$$

其中

$$\nabla^2 \chi - \chi/c^2 = 0$$

则 A', φ' 仍满足 Lorentz 条件. 既然理论上函数 χ 的规范变换 (Gauge transformation). 从数学上看, 函数 χ 的规范变换应满足波动方程, 波动方程求解要给出任意的边界条件, 所以用于边界条件 $\phi = \text{Const}$ 的选择是合理的. (20)式只是电场的边界条件, 磁场的边界条件同前.

在边界条件是 $\phi = \text{Const}$ 时, 变分原理可变换为

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{a}, \mathbf{h}, \phi) = & \iiint_V [(\omega/c)\mathbf{h}^T \cdot [\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}] - \mu_0 \omega \mathbf{h}^T \mathbf{h}/2 - \\ & \varepsilon_0(\omega^3/c^2)\mathbf{a}^T \mathbf{a}/2 - \varepsilon_0(\omega^2/c)\phi \cdot (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \\ & \omega \varepsilon_0(\nabla \phi)^T(\nabla \phi)/2] dx dy dz + \\ & \iint_{\Gamma} [\mathbf{a}_n \cdot \text{Const}] d\Gamma, \delta \Pi = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

其中 Γ 代表边界面. 因此, 向量势 \mathbf{a} 的选择不再需要受 $\nabla \cdot \mathbf{a}$ 的限制. 但因为 Gauss 定理, 总体的 $\nabla \cdot \mathbf{a}$ 积分

$$\iiint_V [\nabla \cdot \mathbf{a}] dx dy dz = \iint_{\Gamma} [\mathbf{a}_n] d\Gamma = 0 \quad (22)$$

仍有要求. 既然向量势 \mathbf{a} 是有限元法的未知数, 表面处节点的法线向投影 \mathbf{a}_n 不是完全独立, 而有(22)式的约束. 切线向投影条件已经在(20)式给出.

(21)式是 $\mathbf{h}, \mathbf{a}, \phi$ 的三类变量变分原理. 若想转化为 \mathbf{a}, ϕ 的二类变量变分原理, 则首先对于 \mathbf{h} 取极大, 有 $\mathbf{h} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})/c\mu_0$, 再代入变分原理(21)有

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{a}, \phi) = & \iiint_V [[\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}]^T \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})/c^2 \mu_0] - \\ & \varepsilon_0(\omega^2/c^2)\mathbf{a}^T \mathbf{a} - 2\varepsilon_0(\omega/c)\phi \cdot (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \\ & \varepsilon_0(\nabla \phi)^T(\nabla \phi)/2] dx dy dz + \\ & \iint_{\Gamma} [\mathbf{a}_n \cdot \text{Const}] d\Gamma, \delta \Pi = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

其中取消了乘子 $\omega/2$.

变分原理(23)有2类变量 \mathbf{a} 与 ϕ . 如果将它转换到只有一类变量 \mathbf{a} 的变分原理, 可方便求解. 注意, ϕ 满足 Poisson 方程(17c), 其解的边界条件是边界上 $\phi_b = \text{Const}$. 根据迭加原理, 可成为 $\phi = \phi_1 + \phi_2$, 其中 ϕ_1 是方程(17c)的解, 但边界条件是 $\phi_{1b} = 0$; 而 ϕ_2 是 Laplace 方程的解, 边界条件是 $\phi_{2b} = \text{Const}$, 这说明 ϕ_2 的解就是 $\phi_2 = \text{Const}$. 这样, ϕ 在变分原理(23)之中, 出现于 $-\varepsilon_0(\nabla \phi)^T(\nabla \phi)$ 与 $-2\varepsilon_0(\omega/c)\phi \cdot (\nabla \cdot \mathbf{a})$ 两处的积分. ϕ_2 在第一项中不出现, 而第二项则因为边界条件(22), ϕ_2 也不发挥作用. 所以只要 ϕ_1 就可以了, 可依然写为 ϕ .

采用 \mathbf{a}, ϕ 的变分原理, 就可以不再受到约束条件 $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$ 的困扰. 用(23)式来离散, 就与以往一类变量的程序一致了, 在边界处 $\phi_b = 0$, 只有总体的一个约束条件(22).

3 有限元数值计算

将三类变量变分原理(21)式进行有限元离散求解, 首先要梳理出独立未知数. 观察微分方程(17), 方程(17a, b)则是在 Lorentz 条件下的电磁感应方程. 而(17c)对于 ϕ 的微分方程 $\nabla^2 \phi = (\omega/c) \cdot (\nabla \cdot \mathbf{a})$ 是 Poisson 方程, 其物理意义是保证 $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$ 得到满足. 它们的来源不同, 故式(17)实际是两个问题的综合.

Poisson 方程的要求是保证全部单元能达到 $\nabla \cdot \mathbf{e} = (\omega/c)(\nabla \cdot \mathbf{a}) = 0$. 因为是两个问题的综合所以有限元的网格划分, 并不要求网格相同, 可分别划分之. 以平面问题为例, 选择三角形线性插值

网格. 当划分好磁场向量势 \mathbf{a} 的网格后, 则 \mathbf{a} 的单元数, 就是 $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$ 的数目, 已经确定. 下面就要选择电场势 ϕ 的 Poisson 方程的有限元网格了. 因为 ϕ 是纯量函数, 一个内部节点只提供一个未知数待定. 如果采用 \mathbf{a} 网格的节点划分, 则其未知数数目少于 \mathbf{a} 的单元数许多, 无法满足全部磁场势单元的 $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$ 的要求. 因此, 纯量函数离散应另外划分网格, 使其内部节点数目比全部磁场势单元的数目多, 则就可以满足全部单元 $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$ 的要求. 纯量函数 ϕ 离散的节点多于单元数目是没有问题的, 变分原理可提供恰当数目的方程予以求解的.

设磁场向量势 \mathbf{a} 离散的全部节点 n_b 可区分边界节点个与内部节点 n_i 个, 组成 n_Δ 个三角形单元. 每个内部节点有 3 个 \mathbf{a}_i 的分量, 全部是独立未知数. 而因边界条件 (20), 每个边界节点只有一个 a_n 是未知数; 又因为 (22) 式, 由 a_n 构成的边界独立未知数只有 $n_b - 1$ 个.

再回到电场势. 设 ϕ 的内部节点数目是 n_ϕ 个, 得到 n_ϕ 维向量 $\boldsymbol{\varphi}_d$, 可也组成三角形单元. 当然 $n_\phi > n_\Delta$, 应当能将 n_Δ 个电磁单元 $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$ 做到.

将 (23) 式有限元离散、组装, 得到离散泛函为

$$\Pi(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}_d, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{w}^T \mathbf{K} \mathbf{w} - \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{w}^T \mathbf{M} \mathbf{w} - \boldsymbol{\omega} \mathbf{w}^T \mathbf{F} \boldsymbol{\varphi}_d - \boldsymbol{\varphi}_d^T \mathbf{G} \boldsymbol{\varphi}_d, \delta \Pi = 0 \quad (24)$$

其中 \mathbf{w} 代表全部节点处的向量 \mathbf{a} . 矩阵 \mathbf{G} 是 $n_\phi \times n_\phi$ 的, 而其它矩阵全部有恰当的尺寸. 泛函中出现了 $\boldsymbol{\omega}^2$, $\boldsymbol{\omega}$ 的项, 与普通的本征值问题不同. 应看到矩阵 \mathbf{G} 是正定对称的, 故可对于 $\boldsymbol{\varphi}_d$ 先取最大

$$2\mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}_d + \boldsymbol{\omega}\mathbf{F}^T\mathbf{w} = 0, \boldsymbol{\varphi}_d = -\boldsymbol{\omega}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{w}/2 \quad (25)$$

代入 (24) 式就可消去 $\boldsymbol{\varphi}_d$, 得到只有 $\boldsymbol{\omega}^2$ 的本征值问题.

$$\Pi(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}_d, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{w}^T \mathbf{K} \mathbf{w} - \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{w}^T (\mathbf{M} - \mathbf{F} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}^T / 4) \mathbf{w} \quad (26)$$

这是典型的 Rayleigh 商问题. 如果取 $n_w = 3 \times n_i + n_b$, 而将约束条件延迟处理, 则成为有一个约束条件的本征值问题, 见文献 [7].

(26) 式的本征值问题, \mathbf{K} 相当于刚度阵, 而 $\mathbf{M}_r = (\mathbf{M} - \mathbf{F} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}^T / 4)$ 相当于质量阵. 过去, 不考虑 $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$ 的条件时, 就是 \mathbf{M} 阵, 但考虑了 Lorentz 规范后, 矩阵成为 $(\mathbf{M} - \mathbf{F} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}^T / 4)$, 其中 $\mathbf{F} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}^T / 4$ 是正定的, 减法说明本征值会增加的. 从 (23) 式看到, 质量阵 \mathbf{M} 是非负的, 但不能排除出现零本征值.

电场势 ϕ 的网格无非是使方程 (17c) (物理意义是 $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$) 得到满足, 然而只能在有限元的意

义下得到满足, 不是处处满足. 如果选择与 \mathbf{a} 的网格划分同, 则 ϕ 的节点数目少, 不能达到使所有单元 $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$. 只要合理增加节点, 使得数目足够, 则组成 ϕ 离散的网格仍然可以达到要求的.

既然要增加 ϕ 未知数, 即 $\boldsymbol{\varphi}_d$ 的维数, $n_\phi > n_\Delta$ 不是问题, n_ϕ 越大越好. 当然希望利用磁场势 \mathbf{a} 的网格. 最方便的方案应可取为, 在 ϕ 离散时仍运用 \mathbf{a} 的三角形元, 但用 6 点元的 2 次函数插值. 这就是在每条边的中点增加一点. $\nabla \phi$ 当然是 \mathbf{w} 的线性函数, $\boldsymbol{\omega} \mathbf{a} - c \nabla \phi$ 也是. 这样计算的矩阵就不会出现负的了. 不过当 $\boldsymbol{\omega} \mathbf{a} - c \nabla \phi = 0$ 时, 因为 \mathbf{a} 的线性插值而 2 次元插值时 $\nabla \phi$ 也是线性, 故仍可能出现 0 本征值. 此时, 计算时产生的数值误差, 也可能造成麻烦. 比较保险的方法是将 \mathbf{M}_r 阵加上一个小的对角矩阵 $\boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{I}$, 其中 $\boldsymbol{\varepsilon}'$ 是一个很小的数值, 而又不至于产生很多误差. 这样可免除数值计算中的麻烦.

算例 1 考虑矩形腔体, 横截面尺寸为 $1 \text{ cm} \times 1.1 \text{ cm}$. 有限元网格如图 1 和图 2 所示, 采用平面三角形单元. 图 1 网格是米字形, 图 2 网格为龟背形. 按这两种网格分别计算, 一是用以考核本文方法的正确及计算精度, 二是考察不同网格对计算精度的影响. 表 1 给出了该共振腔本征值问题的解析解和本文提出的对偶节点有限元采用三角形单元计算的前 8 个本征值的计算结果.

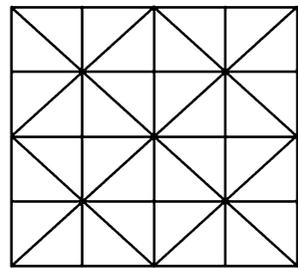


图 1 米字形网格

Fig. 1 Mi-shaped mesh

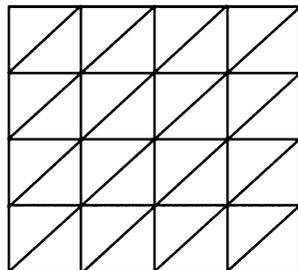


图 2 龟背形网格

Fig. 2 Turtle-shaped mesh

表 1 矩形共振腔 $k_0 = (\epsilon\mu)^{1/2}\omega$ 的最低 8 个本征值的计算结果(单位: cm^{-1})

Table 1 Eight lowest nontrivial eigenvalues k_0 of a rectangular cavity

No.	Mode	Analytical	25 nodes, 32 elements		81 nodes, 128 elements	
			Mi-shaped	Turtle-shaped	Mi-shaped	Turtle-shaped
1	TE ₁₀	2.8560	2.8509	2.8496	2.8557	2.8556
2	TE ₀₁	3.1416	3.1360	3.1345	3.1413	3.1412
3	TE ₁₁	4.2457	4.2276	4.2106	4.2446	4.2439
4	TM ₁₁	4.2457	4.2752	4.2272	4.2520	4.2454
5	TE ₂₀	5.7120	5.4977	5.4576	5.7018	5.7010
6	TE ₀₂	6.2832	5.9587	5.9721	6.2719	6.2710
7	TE ₂₁	6.5189	6.0474	6.0015	6.5157	6.5021
8	TM ₂₁	6.5189	6.3317	6.0916	6.5240	6.5025

由表 1 可以看出,本文提出的对偶节点有限元,由于引入了 Lorentz 条件,非零伪解现象完全消失.解析解和数值解一一对应,并随着网格的细分,计算精度令人满意,并且不同的网格划分形式对计算精度影响不大.

算例 2 为了说明本文的对偶有限元具有处理任意几何形状的能力,考虑圆柱形谐振腔,横截面半径为 $r = 0.5cm$,有限元网格划分如图 3 所示,共 81 个节点、128 个单元.分别按(23)式的二类变量 \mathbf{a}, ϕ 和(21)式的三类变量 $\mathbf{h}, \mathbf{a}, \phi$ 离散处理,前 10 个最低本征值的计算结果见表 2.

表 2 圆柱形共振腔 $k_0 = (\epsilon\mu)^{1/2}\omega$ 的最低 10 个非零本征值的计算结果(单位: cm^{-1})

Table 2 Ten lowest nontrivial eigenvalues k_0 of a cylindrical cavity

No.	analytical	two kinds of variables	three kinds of variables
1	3.682 (TE ₁₁)	3.94965	3.94280
2	3.682 (TE ₁₁)	3.94965	3.94280
3	4.810 (TM ₀₁)	4.84833	4.82371
4	6.108 (TE ₂₁)	6.06466	6.43811
5	6.108 (TE ₂₁)	6.06466	6.43811
6	7.664 (TE ₀₁)	7.89915	7.67271
7	7.664 (TM ₁₁)	7.92927	7.67580
8	7.664 (TM ₁₁)	7.92927	7.67580
9	8.402 (TE ₁₂)	8.39241	8.95997
10	8.402 (TE ₁₂)	8.39241	8.95997

注:TE_ny or TM_ny; n 代表 $\cos n\theta$; $n = 0$ 代表轴对称,否则必然是重根;而 y 代表 Bessel 函数 J'_n or J_n 的第 y 号根.

算例 3 为了说明本文的对偶节点有限元法可以处理各种形状的截面,特别给出了如图 3 所示的横截面有一槽形的共振腔算例.

有限元计算时,分别划分了 65 个节点、96 个

单元和 225 个节点、384 个单元两种情况.图 4 给出的是 65 节点的有限元网格划分.因为没有解析解,故采用不同密度网格的结果进行对比.表 3 给出了 6 个最低非零本征值的计算结果.

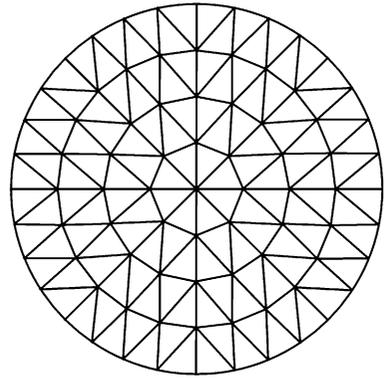


图 3 圆形横截面有限元网络

Fig. 3 circular section finite element mesh

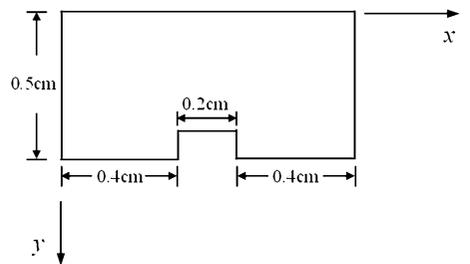


图 4 横截面为槽形的腔体示意图

Fig. 4 Geometry of a rigid cavity

表 3 槽形截面 $k_0 = (\epsilon\mu)^{1/2}\omega$ 的最低 6 个非零本征值的计算结果(单位: cm^{-1})

Table 2 Six lowest nontrivial eigenvalues k_0 of a rigid cavity

No.	65 nodes, 96 elements	225 nodes, 384 elements
1	2.89185	2.89568
2	6.17358	6.18504
3	6.66322	6.67174
4	6.81712	6.83764
5	7.30513	7.54439
6	7.48661	7.64642

由该算例可以看到,本文提出的对偶节点有限元法,在处理场有奇异性问题时,依然有效.而且随着网格不断加密,计算精度将随之提高.

同样的例题,若按变分原理(23)式,而非(21)式进行离散处理,则数值计算结果将略偏大.

本文的算例全部是二维平面问题,相当于波导问题.但本文的推导全部是三维的,对三维问题完全适用.

4 结束语

电磁波的有限元分析是非常重要的课题. 专著 [2] 给出的电磁节点有限元分析采用的一类变量的列式, 有 C1 连续性的困难和伪解问题, 因此采用了棱边元来解决. 但棱边元分析毕竟不如节点元方便. 针对此问题, 本文采用 Lorentz 公式的表达, 给出了电磁场在频域的变分原理, 其对应的节点有限元就消除了 C1 连续性和伪解的难点. 数值例题表明了其有效性.

参 考 文 献

- 1 Ramo S, Whinnery J R, Van Duzer Th. Fields and waves in communication electronics. 2nd ed. New York: J. Wiley & Sons, 1984
- 2 Jin J M. The finite element method in electromagnetics. New York: John Wiley & Sons. Inc., 2002
- 3 钟万勰. 电磁波导的半解析辛分析. 力学学报, 2003, 35(4):401~410 (Zhong W X. Symplectic semi-analytical method for electro-magnetic wave guide. *ACTA Mechanica Sinica*, 2003, 35(4):401~410(in Chinese))
- 4 孙雁, 郑长良, 陈杰夫, 钟万勰. 电磁对偶元伪解的消除. 动力学与控制学报, 2004, 2(1):8~12 (Sun Y, Zheng C L, Chen J F, Zhong W X. On the elimination of spurious solutions using symplectic finite element method for electromagnetic. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(1):8~12(in Chinese))
- 5 Born M, Wolf E. Principles of Optics, 7th ed. Cambridge, 1999: 76~78
- 6 钟万勰. 周期电磁波导的能带辛分析. 计算力学学报, 2001, 18(4):379~387 (Zhong W X. Synplectic energy band analysis for periodical electro-magnetic wave guide. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2001, 18(4):379~387(in Chinese))
- 7 钟万勰. 应用力学对偶体系. 北京: 科学出版社, 2002 (Zhong W X. Duality system in applied mechanics. Beijing: Science Press, 2002(in Chinese))
- 8 钟万勰. 分析结构力学与有限元. 动力学与控制学报, 2004, 2(4):1~8 (Zhong W X. Analytical structural mechanics and finite element. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(4):1~8(in Chinese))

NODE FINITE ELEMENT METHOD FOR ELECTRO-MAGNETIC RESONANT CAVITY *

Sun Yan¹ Zhong Wanxie^{1,2}

(1. Department of Engineering Mechanics, School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

(2. Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract The finite element method in electromagnetics has been puzzled by spurious solutions because electric field divergence is not imposed zero condition. In the paper Maxwell equations are given in frequency domain for the electromagnetic resonant cavity. By further introducing Lorentz condition, The 2 types variational principles with 2 kinds and 3 kinds of variables are conducted respectively. Based on that, a new method of node finite element for electromagnetic resonant cavity is proposed for avoiding spurious solutions, and the cavity eigenvalues are got with subspace iteration method. Numerical results illustrate the feasibility and effectiveness of this method in the paper.

Key words electro-magnetic wave, finite element, resonant cavity, eigenvalue, subspace iteration method