

# 一类经济模型的分岔周期解\*

李静

(解放军理工大学数理系, 南京 211101)

**摘要** 讨论了一类经济模型的稳定性及 Hopf 分岔. 根据特征根给出系统失稳的条件后, 利用伪振子法和迭代法得到了 Hopf 分岔的方向以及周期解的振幅估计, 计算式较简洁, 最后的数值算例很好地验证了方法的准确性. 特别地, 当周期解振幅较大时, 迭代法的估算更准确. 尽管系统失稳后, 产生分岔周期解, 但适当调整参数大小, 仍然可以保证周期解稳定, 也就意味着经济的良性发展.

**关键词** 稳定性, 分岔, 伪振子法, 迭代法

## 引言

经济周期, 也称经济循环或商业循环, 是经济中不可避免的波动, 它常以国民收入的波动为核心, 反应国民收入及经济活动的周期性波动, 同时每个周期又都是繁荣与萧条的交替. 英国经济学家 J. M. Keynes 创立的宏观经济学被称为二十世纪人类知识界的三大革命之一, 他最早提出乘数理论, 但遗憾的是却忽略了加速数的作用, 只在一般意义上涉及经济周期波动和危机<sup>[1]</sup>. 美国经济学家 P. Samuelson 认为把二者结合起来才能更全面、更好的说明收入、消费与投资的关系, 他于 1939 年最早提出了经济周期的数学模型, 并说明了经济体系对于一个小扰动就会引起大的周期性波动<sup>[2]</sup>. 在 Keynes 的启发下, N. Kaldor 建立了非线性的投资和消费函数<sup>[3]</sup>. 英国经济学家 J. Hicks 用精确的乘数-加速数模型, 系统地说明了经济周期形成的原因<sup>[4]</sup>. R. M. Goodwin 研究了一个非线性经济周期模型, 并讨论了平衡点失稳及极限环的不稳定情形<sup>[5]</sup>. 2003 年 T. Puu 结合 Hicks 的消费函数思想, 提出了更加合理的具有立方非线性项的投资函数并研究了此模型的分岔、混沌等动力学行为<sup>[6][7]</sup>, 该模型一直受到广泛关注.

按照非线性动力学理论, 经济的周期性波动对应于非线性动力系统的 Hopf 分岔产生的周期运动, 通常采用中心流形约化法、奇异摄动法来研究. 经济平稳运行要求振动幅值较小, 因此确定一个足

够精确又足够简洁的幅值估计式对认识分岔周期解具有重要的意义. 论文[8]应用范式理论和中心流形约化法讨论了平衡点的稳定性和 Hopf 分岔的存在性及分岔方向, 论文[9]应用中心流形约化法研究了该社会经济系统的动力学行为. 论文[10]应用平均法和李雅普诺夫指数法研究了含时滞项的经济模型, 论文[11]应用数值法和 Lyapunov 函数法讨论了改进的非线性动力学经济周期系统. 其中, 中心流形方法<sup>[8][9][12][13]</sup>是文献中分析 Hopf 分岔问题时普遍采用的一种方法, 但该方法的计算过程复杂, 计算量大, 且计算精度未必高<sup>[14][15]</sup>. 为了克服中心流形方法计算中的复杂性, 论文[16]对标量时滞微分方程的 Hopf 分岔提出了一种简单有效的分析方法-伪振子分析法, 其计算过程简单, 计算量小, 且常常具有很高的计算精度. 针对伪振子分析法难以直接应用于方程组的情形, 论文[17]提出用迭代法求解由 Hopf 分岔产生的周期解. 对标量微分方程, 伪振子分析法和迭代法本质上是一致的, 可得到完全相同的结果.

伪振子分析法<sup>[15][16][18][19]</sup>和迭代法<sup>[17][20]</sup>最初是为了减小时滞微分方程在 Hopf 分岔周期解分析过程中的复杂性而提出来的, 实际上, 这两种方法也同样适合无时滞的微分方程的 Hopf 分岔分析. 本文的目的是对方文轩<sup>[9]</sup>讨论的经济学模型,

$$\ddot{x} + (1 - a)\dot{x} + (1 + a)x^3 + bx = 0 \quad (1)$$

应用伪振子法和迭代法来分析这个非线性常微分

方程的 Hopf 分岔和周期解. 这里  $x$  表示收入, 参数  $a$  表示加速数  $v$  (也称投资系数) 与边际储蓄倾向  $s$  的差 (一般  $v > 1$ ), 而  $b$  代表储蓄率, 并且满足  $a > 0, b > 0$ .

本文主要分为以下四部分: 首先用伪振子法讨论系统失稳后, Hopf 分岔点附近的局部动力学行为, 即分岔方向, 周期解的振幅和稳定性; 第二节当周期解振幅较大时, 伪振子法的结论较粗糙, 则选取恰当的迭代序列来计算周期解; 第三节给出了具体的数值算例, 并结合图形说明结论的准确性; 最后是结论.

## 1 伪振子法

我们先从该经济模型的方程出发, 确定系统保持稳定的条件. 讨论动力系统稳定性, 最常用的方法就是判断它的特征根: 如果所有特征根都具有负实部, 那么系统稳定. 计算(1)式的特征多项式为

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + (1-a)\lambda + b \quad (2)$$

此多项式为一元二次函数, 由根与系数关系可知, 当  $a < 1$  时, 全体特征根都具有负实部, 从而系统的平凡解渐近稳定.

下面考虑临界稳定, 也就是稳定性即将发生改变的临界情形. 假设特征方程有一对共轭的纯虚根  $\lambda = \pm i\omega (\omega > 0)$ , 代入(2)式得  $\Delta(\pm i\omega) = 0$  并分离实虚部得到

$$\begin{cases} \omega^2 = b \\ (1-a)\omega = 0 \end{cases} \quad (3)$$

计算知(2)式有一对纯虚根  $\lambda = \pm i\sqrt{b}$ , 这里  $\omega = \sqrt{b} > 0$ , 此时参数满足  $a = 1$ , 也就是特征方程有纯虚根, 表明系统处于临界稳定状态, 将会发生稳定性切换. 对比模型中的参数, 当加速数与边际储蓄倾向的差为 1 时, 本来稳定的经济系统就会出现不稳定情形.

伪振子法<sup>[15][16][18][19]</sup>的主要思路是建立与(1)式有关的伪振子系统, 然后利用该系统来研究(1)式的局部动力学行为, 也就是 Hopf 分岔点附近的动力学行为. 该方法包括三步:

(一) 首先由无阻尼系统  $\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$  (其中  $\omega_0 = \sqrt{b} > 0$ ), 加以小扰动后建立伪振子方程如下,

$$\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + [(1-a)\dot{x}(t) +$$

$$(1+a)\dot{x}^3(t) + bx(t) - \omega_0^2 x(t)] = 0 \quad (4)$$

为书写简便, 令

$$\phi(t) = (1-a)\dot{x}(t) + (1+a)\dot{x}^3(t) + bx(t) - \omega_0^2 x(t)$$

因为我们只考虑系统在 Hopf 分岔点附近的局部动力学行为, 对充分小的  $|\varepsilon| \neq 0$ , (4)式也就是(1)式的解可写成  $x \approx x_0 = r \cos(\omega_0 t + \theta)$ .

(二) (1)式与(4)式的能量函数等价, 即

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2$$

等式两边分别对  $t$  求导, 则(1)式的伪功函数可以用(4)式的功函数来定义, 即

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{(1)} = -\phi(t) \cdot \dot{x}(t)$$

在(1)式的 Hopf 分岔点附近, 解的主要部分是  $x_0 = r \cos(\omega_0 t + \theta)$ , 且  $\phi(t)$  近似等于 0, 所以功函数的主要部分是以  $T = 2\pi/\omega_0$  为周期且变化缓慢的周期函数. 类似于平均法, 我们采用一个周期内的平均功函数来代替功函数, 即

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{(1)} = h(r) + o(\varepsilon)$$

其中  $h(r)$  是(1)式的平均伪功函数, 即

$$h(r) = -\frac{1}{T} \int_0^T [\phi(t) \cdot \dot{x}(t)] dt$$

计算得该经济模型的平均功函数为

$$h(r) = -\frac{3}{8} b^2 (1+a) r^4 + \frac{1}{2} b (a-1) r^2 \quad (5)$$

(三) 当且仅当  $a > 1$  时,  $h(r) = 0$  有且只有一个正根, 因此系统发生超临界分岔. 此正根可记作

$$r_0 = 2\sqrt{\frac{a-1}{3b(a+1)}} \quad (6)$$

此时, 系统有周期解  $x(t) \approx x_0(t) = r_0 \cos(\sqrt{b}t)$ . 当  $a > 1$  且  $a-1$  较小时, 显然  $h''(0) = b(a-1) > 0$ , 则平均伪功函数局部负定, 即平凡解  $r=0$  不稳定.

此时,  $h(r) = 0$  有正根  $r_0$ , 且  $h'(r_0) = -\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{\frac{(a-1)^3}{a+1}} < 0$  成立, 则正根  $r_0$  稳定, 于是系统的分岔周期解稳定. 这表明尽管经济模型发生分岔, 但仍表现出一定规律的周期性, 也就意味着经济开始呈现相对稳定的周期行为. 例如, 中国国民经济计划的一部分—五年计划, 就是国家依据国民经济重要关系等作出的规划, 近似于以五年为一个周期,

且每个周期都制定了相应方案,提出了预期目标.

## 2 迭代法

以上过程表明伪振子分析法简单易操作,但对振幅有较高要求.换言之,当分岔周期解的振幅较大时,前面对功函数的估计就比较粗糙,导致误差较大,肯定就会影响周期解的精度.其实周期解的振幅仅从迭代法<sup>[17][20]</sup>也可得到,并通过恰当的迭代修正伪振子法的结果,从而进一步提高计算精度.其中伪振子分析法中的平均伪功函数  $h(r) = 0$  等价于下面的 Galerkin 条件.根据该模型,迭代序列可设为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{n+1}(t) = & -(1-a)\dot{x}_n(t) - \\ & (1+a)\dot{x}_n^3(t) - bx_n(t) \end{aligned} \quad (7)$$

选择  $x_0(t) = r\cos(\sqrt{bt})$  作为初始值开始迭代,由此得到第一次迭代

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) = & -r\cos(\sqrt{bt})b + \frac{r}{4}\sqrt{b}[3b(a+1)r^2 - \\ & 4(a-1)]\sin(\sqrt{bt}) - \\ & \frac{r^3}{4}\sqrt{b^3}(a+1)\sin(3\sqrt{bt}) \end{aligned} \quad (8)$$

一般来说,残差力  $\phi(t) = \dot{x}_1 - \dot{x}_0 \neq 0$ ,当然它沿一小段距离  $\delta x$  所作的功  $\phi(t) \cdot \delta x \neq 0$ ,但我们可以适当选择振幅  $r$  使得残差力在一个周期内所做的平均虚功为 0,则有方程的解满足 Galerkin 型条件<sup>[21]</sup>,即

$$\int_0^T (\dot{x}_1 - \dot{x}_0)\sin(\omega t) dt = 0 \quad (9)$$

可以得到

$$\frac{3}{4}b(a+1)r^3 - (a-1)r = 0 \quad (10)$$

(10)式左端的表达式恰好就是伪振子法中的功函数(最多差一个常数倍),即上式等价于  $h(r) = 0$ ,与伪振子法的结论相符.变换初始相位后,周期解可定义为

$$\begin{aligned} x(t) \approx x_1(t) = & r_0\cos(\sqrt{bt}) + \\ & \frac{1}{36}r_0^3(a+1)\sqrt{b}\sin(3\sqrt{bt}) \end{aligned}$$

显然,这个表达式较伪振子法的结果  $x(t) \approx x_0(t) = r_0\cos(\sqrt{bt})$  更精确(具体精度的比较在后面的数值算例中给出),分岔的方向和周期解的稳定性则仍依据前面的伪振子分析法判断.进一步,经济

波动较小意味着周期解的振幅较小,如果  $r_0$  像我们预想的足够小,则表达式后面的高阶项对周期解的影响也很小,此时直接取伪振子法的结论就足够精确;反过来,如果振幅较大,则伪振子法的结论就有较大的误差.

## 3 数值算例

为检验以上的分析,考虑固定参数  $b$  时,系统在  $a = 1$  处,发生 Hopf 分岔的局部动力学行为.图 1 和图 2 分别为参数  $b = 1$  和  $b = 10$  的分岔图,伪振子法和迭代法的结果都能较好的和数值结果吻合,但随着振幅的增加,相比较而言迭代法更精确.当然,我们不管用什么方法分析的都是分岔点附近的局部动力学行为,所以随着振幅的增大,误差都是较大的.以下图形均使用数学软件 XPPAUT,其中分岔图中周期解的数值结果是采用步长为 0.001 的 Runge—Kutta 积分得到的.

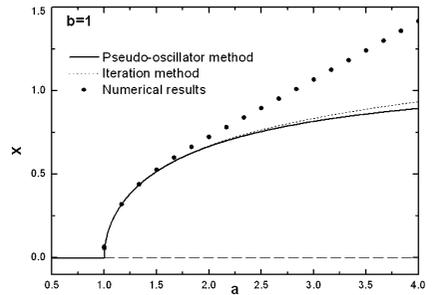


图 1  $b = 1$ , 比较三种结果的系统分岔图  
Fig.1 The bifurcation diagram vs  $a$  of Eq. (1)

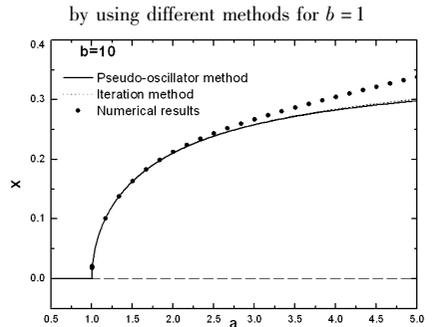
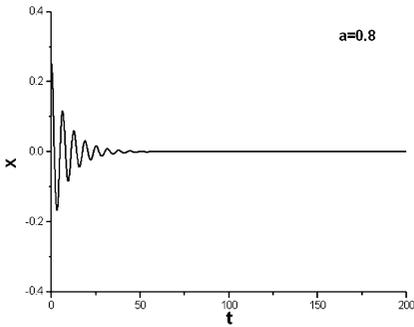
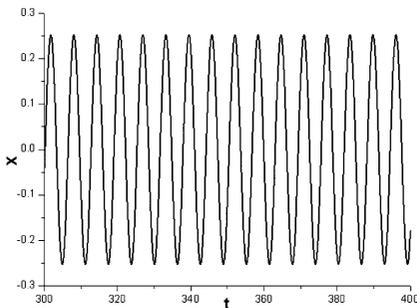


图 2  $b = 10$ , 比较三种结果的系统分岔图  
Fig.2 The bifurcation diagram vs  $a$  of Eq. (1)  
by using different methods for  $b = 10$

当  $a > 1$  时系统失稳,图 3 和图 4 分别是  $a = 0.8$  和  $a = 1.1$  时的时间历程图,很好的说明了当系统从稳定到不稳定状态的变化,从而产生分岔周期解.且在分岔点附近有  $h'(r_0) < 0$ ,从而分岔周期解是稳定的(如图 4).

图3  $a=0.8, b=1$  时的时间历程图Fig. 3 The time history of  $x$  when  $b=1$  and  $a=0.8$ 图4  $a=1.1, b=1$  时的时间历程图Fig. 4 The time history of  $x$  when  $b=1$  and  $a=1.1$ 

经济平稳运行意味着周期解的振幅较小为好, 换个形式考察振幅, 由于它和两个参数有关, 所以把(6)式改写为

$$r_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{b}} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$$

显然, 对固定的  $a$ , 参数  $b$  越大, 分岔周期解的振幅越小. 特别地, 理论上来说, 当  $a$  足够大, 也就是当加速数远远大于边际储蓄倾向时, 即表达式  $\sqrt{(a-1)/(a+1)}$  逐渐趋于 1, 这时  $a$  对振幅的影响就非常微小了, 但事实上这个表示资本—产出比率的加速数不可能无限增大, 所以加速数还是大大地影响着周期解的振幅, 且与振幅成正比. 周期解的振幅越小, 也就表明经济就会越平稳地运行. 相较文 [9], 本文更详细地分析了各因素对经济系统发展的作用和影响, 也给政府和相关部门提供了参考.

## 4 结论

本文研究了一类具有常微分方程的经济模型, 首先采用了一种过程较简单的伪振子分析法, 借助平均法思想通过伪功函数就可判断系统失稳后发生 Hopf 分岔的局部动力学行为, 包括分岔方向、周期解的振幅和稳定性. 但是如果振幅较大, 该方

法对周期解的估计较粗糙. 而迭代法则更加精确了周期解的振幅估计, 并且只要选择恰当的初始值, 只需建立一次迭代序列, 然后利用 Galerkin 条件就可得到足够精确的估计式. 事实上 Galerkin 条件也就等价于伪振子法中的  $h(r) = 0$ . 尽管该模型已被研究过很多次, 但相较而言文中的两种方法更简单明了, 且详细讨论了影响经济稳定性的主要因素, 控制经济系统的失稳, 进一步如果系统发生分岔, 我们也可以事先预测, 并加以适当调整和干预, 使经济尽可能的波动较小.

对照模型中参数对方程的影响, 政府可以通过干预经济的政策来影响经济周期的波动. 二十一世纪以来, 我国居民已经有提前消费、借贷消费(房奴、车奴)等行为, 而掌握社会九成财富的超级富豪们更是大搞投资, 加上银行利率的不断下调以及利息税的出现, 把钱存在银行的人已经越来越少, 我国目前的储蓄倾向  $s$  较八九十年代已经很低. 政府则可以适当调控居民的收入与投资比例, 调节加速数, 适当控制差值的大小, 使得波动不会太大, 从而经济可以相对平稳地稳定和发展. 进一步, 政府可以适当地进行干预以减轻经济周期的破坏性, 甚至能够消除恶劣的经济周期, 实现国民经济持续稳定的增长.

## 参 考 文 献

- 1 Keynes J M. The general theory of employment, interest and money. Cambridge: Cambridge University Press, 1936
- 2 Samuelson P. Interaction between the multiplier analysis and the principle of acceleration. *Review of Economic statistics*, 1939, 21(2):75~78
- 3 Kaldor N. A model of the trade cycle. *Economic record*, 1940, 33(66):378~389
- 4 Hicks J. A contribution to the theory of the trade cycle. Oxford: Oxford university press, 1950
- 5 Goodwin R M. The nonlinear accelerator and the persistence of business cycle. *Econometrica*, 1951, 19(1):1~17
- 6 Gallegati M. Gardini L. Puu T and Sushko I. Hicks' trade cycle revisited; cycles and bifurcations. *Mathematics and computers in simulation*, 2003, 63: 505~527
- 7 Puu T and Sushko I. A business cycle model of cubic nonlinearity. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 19:597~612
- 8 Ma J H, Gao Q. Stability and Hopf bifurcations in a busi-

- ness cycle model with delay. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 215:829 ~ 834
- 9 方文轩. 非线性经济周期模型的随机稳定性与分岔研究 [博士学位论文]. 天津: 天津大学, 2007 (Fang W X. The research of stochastic stability and bifurcation of nonlinear economical periodic model [Dissertation of Doctor Degree]. Tianjin: Tianjin University, 2007 (in Chinese))
- 10 Li W, Xu W, Zhao J F, Jin Y F. Stochastic stability and bifurcation in a macroeconomic model. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 31: 702 ~ 711
- 11 赵俊峰, 李伟. 一个经济周期模型的分岔和混沌. *动力学与控制学报*, 2005, 3(4): 39 ~ 43 (Zhao J F, Li W. Bifurcation and chaos in a business cycle model. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 39 ~ 43 (in Chinese))
- 12 施晓红, 余龙华. 非线性磁悬浮控制系统的周期运动稳定性研究. *动力学与控制学报*, 2005, 3(3): 52 ~ 55 (Shi X H, She L H. The periodic motion stability analysis of the nonlinear maglev control system. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(3): 52 ~ 55 (in Chinese))
- 13 刘素华, 赵成刚, 唐驾时, 杨先林. Qi 系统的 Hopf 分叉分析与幅值控制. *动力学与控制学报*, 2008, 6(2): 141 ~ 145 (Liu S H, Zhao C G, Tang J S, Yang X L. Hopf bifurcation analysis and amplitude control of limit cycle in the Qi system. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(2): 141 ~ 145 (in Chinese))
- 14 Xu J, Chung K W. A perturbation-incremental scheme for studying Hopf bifurcation in delayed differential systems. *Science in China series E: Technological science*, 2009, 52(3): 698 ~ 708
- 15 Gao F, Wang H L, Wang Z H. Hopf bifurcation of a nonlinear delayed system of machine tool vibration via pseudo-oscillator analysis. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2007, 8: 1561 ~ 1568
- 16 Wang Z H, Hu H Y. Pseudo-energy analysis of scalar nonlinear dynamics with time delay near a Hopf bifurcation. *International Journal of Bifurcation and chaos*, 2007, 17(8): 2805 ~ 2814
- 17 Wang Z H. An iteration method for calculating the periodic solution of time-delay systems after a Hopf bifurcation. *Nonlinear Dynamics*, 2008, 53: 1 ~ 11
- 18 Li J, Wang Z H. Hopf bifurcation of a nonlinear Lasota-Ważewska-type population model with maturation delay. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications & Algorithms*, 2007, 14(5): 611 ~ 623
- 19 Li J Y. Hopf bifurcation of the sunflower equation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, 10: 2574 ~ 2580
- 20 He J H. Periodic solutions and bifurcations of delay-differential equations. *Physics Letters A*, 2005, 347: 228 ~ 230
- 21 殷振坤, 陈树辉. 轴向运动薄板非线性振动及其稳定性研究. *动力学与控制学报*, 2007, 5(4): 314 ~ 319 (Yin Z K, Chen S H. Study on nonlinear vibration and stability of axially moving plates. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(4): 314 ~ 319 (in Chinese))

## HOPF BIFURCATION OF AN ECONOMIC MODEL \*

Li Jing

(Department of Applied Mathematics and Physics, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China)

**Abstract** This paper studied the stability and Hopf bifurcation of an economic model. According to its characteristic roots, the critical condition on which the system loses its stability was derived. Then pseudo-oscillator analysis and iteration method were conducted on the system. In this way, the direction of the Hopf bifurcation and the amplitude of bifurcated periodic solution can be obtained in a simple way. Besides, numerical examples were given to show the effectiveness of the methods. Specially, compared with the pseudo-oscillator analysis, the solution from iteration method is more accurate as the amplitude of bifurcated periodic solution increases. Though the system loses stability when the Hopf bifurcation occurs, the bifurcated periodic solution still keeps stable by varying the parameters within a certain range, which means that the system can reach a beneficial economical cycle.

**Key words** stability, Hopf bifurcation, pseudo-oscillator analysis, iteration

Received 30 July 2010, revised 3 September 2010.

\* The project is supported by the Youth Science Foundation of science college of PLA university of science and technology