

# 起搏器影响下的耦合神经元之间的同步\*

李美生<sup>1</sup> 张红慧<sup>1</sup> 王青云<sup>2</sup> 石霞<sup>3</sup>

(1. 北京航空航天大学数学与系统科学学院, 北京 100191) (2. 北京航空航天大学动力学与控制系, 北京 100191)  
(3. 北京邮电大学理学院, 北京 100876)

**摘要** 讨论了起搏器对双向电耦合的 Hindmarsh – Rose 神经元之间同步行为的影响. 结果表明, 在适当的参数组合下, 起搏器能够增强也能抑制两个全同神经元之间的完全同步, 增强三个全同的神经元之间的完全同步; 处于不同放电模式的三个非全同神经元, 起搏器在足够大的控制强度下能够诱发相位同步、近似同步, 当进一步考虑时滞后, 起搏器神经元更容易诱发它们之间的这种同步行为.

**关键词** 起搏器, 神经同步, 时滞

## 引言

近年来, 很多实际网络的同步问题引起国内外学者的极大关注, 尤其是耦合神经网络的同步行为<sup>[1-4]</sup>, 包括完全同步、相位同步、滞后同步等. 研究发现某些外界的刺激影响到神经元之间的同步活动, 比如时滞<sup>[5-6]</sup>、噪声<sup>[7-8]</sup>等. 适当的时滞能够增强神经元的完全同步、诱发近似同步、相位同步等, 某些时滞也可以抑制或是消除神经元间的同步. 同样, 外部噪声也能够诱导、抑制神经元的相位同步、完全同步等. 这些结果对研究神经元网络的同步和信息传递有重要的参考价值.

起搏器神经元在耦合神经系统中同样起着重要的作用. 已有研究发现, 起搏器可以诱导神经元产生更加丰富的放电模式以及同步转迁行为<sup>[9]</sup>. 事实上, 起搏器控制下的耦合神经元之间的同步行为还少有研究, 因此, 本文首先通过带有起搏器的两个全同 Hindmarsh – Rose<sup>[10]</sup> (H – R) 神经元电耦合模型, 研究起搏器对其完全同步的影响, 其次讨论了三个全同的以及非全同神经元在起搏器控制下的同步行为.

## 1 两个神经元之间的完全同步

H – R 模型是描述神经元放电行为的简化数学模型, 用于模拟真实神经元中峰放电、簇放电和混沌现象. H – R 神经元由如下三个变量的运动方

程表示:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - ax^3 + bx^2 - z + 1 \\ \dot{y} &= c - dx^2 - y \\ \dot{z} &= r(s(x - \chi) - z) \end{aligned} \quad (1)$$

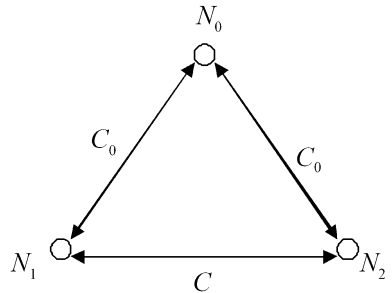


图1 带有起搏器的两个全同神经元结构示意图  
Fig. 1 Configuration of two identical coupled neuronal network with pacemaker

这里  $x$  代表神经细胞的膜电位,  $y$  是与内电流相关的恢复变量 (比如  $Na^+$  或  $K^+$ ),  $z$  表示与  $Ca^{2+}$  离子激活的  $K^+$  离子电流相关的慢调节电流.  $I$  是外部直流激励, 调节神经元不同的放电模式: 静息态、周期放电 (峰放电、簇放电) 以及混沌放电等. 本文分别选取  $I = 1.0, 1.4, 1.8, 3.0, 3.45, 4.0$  分别研究神经元的静息态、周期 1、2 簇放电、混沌放电以及周期 1、2 峰放电. 其它参数都是系统常数<sup>[10]</sup>,  $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, s = 4, r = 0.006, \chi = -1.6$ . 首先考虑两个全同神经元在起搏器控制下的完全同步. 如图 1 所示, 神经元  $N_1, N_2$  通过双向电突触耦合, 都受到起搏器神经元  $N_0$  的耦合控制,

2010-08-17 收到第 1 稿, 2010-09-29 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目 (10972001, 10872014, 10802012)

它们的动力学行为由以下微分方程描述:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= y_0 - ax_0^3 + bx_0^2 - z_0 + I_0 + C_0(x_1 + x_2 - 2x_0), \\ \dot{y}_0 &= c - dx_0^2 - y_0, \\ \dot{z}_0 &= r(s(x_0 - \chi) - z_0), \\ \dot{x}_1 &= y_1 - ax_1^3 + bx_1^2 - z_1 + I_1 + C(x_2 - x_1) + \\ & C_0(x_0 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= c - dx_1^2 - y_1, \\ \dot{z}_1 &= r(s(x_1 - \chi) - z_1), \\ \dot{x}_2 &= y_2 - ax_2^3 + bx_2^2 - z_2 + I_2 + C(x_1 - x_2) + \\ & C_0(x_0 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= c - dx_2^2 - y_2, \dot{z}_2 = r(s(x_2 - \chi) - z_2) \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $C \geq 0$  是两个耦合神经元之间的耦合强度,  $C_0 \geq 0$  是起搏器对其他两个神经元的控制强度.  $I$  是模型系统的调节参数, 控制神经元不同的放电模式.

考虑满足如下单个振子系统:

$$\dot{\vec{w}}' = f(\vec{w}) \quad (3)$$

这里  $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  是  $n$  维状态变量,  $f: R^n \rightarrow R^n$  是一向量函数. 通过双向耦合得到如下系统:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{w}}_0 &= f(\vec{w}_0) + K_0(\vec{w}_1 + \vec{w}_2 - 2\vec{w}_0) \\ \dot{\vec{w}}_1 &= f(\vec{w}_1) + K_0(\vec{w}_0 - \vec{w}_1) + K(\vec{w}_2 - \vec{w}_1) \\ \dot{\vec{w}}_2 &= f(\vec{w}_2) + K_0(\vec{w}_0 - \vec{w}_2) + K(\vec{w}_1 - \vec{w}_2) \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $K, K_0$  分别是耦合矩阵和控制矩阵, 且有

$$K_0 = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

对于由(4)定义的耦合系统, 完全同步定义为两个系统的运动轨道最终相同, 于是完全同步意味着同步流形是渐近稳定的, 或者  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{e}(t) = 0$  ( $\vec{e}(t)$  是同步差, 定义为  $\vec{e}(t) = \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|$ ) 于是, 同步差  $\vec{e}(t)$  满足的方程为:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}' &= f(\vec{w}_1) + K_0(\vec{w}_0 - \vec{w}_1) + K(\vec{w}_2 - \vec{w}_1) - \\ & f(\vec{w}_2) - K_0(\vec{w}_0 - \vec{w}_2) - K(\vec{w}_1 - \vec{w}_2) = \\ & f(\vec{w}_1) - f(\vec{w}_2) + K_0(\vec{w}_2 - \vec{w}_1) + 2K(\vec{w}_2 - \vec{w}_1) = \\ & f(\vec{w}_1) - f(\vec{w}_2) + (K_0 + 2K)(\vec{w}_2 - \vec{w}_1) \end{aligned} \quad (6)$$

将此方程线性化得

$$\dot{\vec{e}}' = (Df(\vec{w}) - (K_0 + 2K))\vec{e} = (Df\vec{w} - H)\vec{e} \quad (7)$$

其中  $Df(\vec{w})$  是向量场  $f$  的 Jacobi 矩阵在变量  $\vec{w}$  处的取值.  $H - K_0 + 2K$  是一  $n \times n$  常数矩阵. 这样由(7)可知, 系统的完全同步问题就转化为由方程

(7) 定义的同步差  $\vec{e}$  零解的渐近稳定性问题. 令  $J = Df(\vec{w}) - H$ , 在此  $H - R$  模型中有

$$J = \begin{bmatrix} -3ax_1^2 + 2bx_1 - C_0 - 2C & 1 & 1 \\ -2dx_1 & -1 & 0 \\ rs & 0 & -r \end{bmatrix} \quad (8)$$

首先考虑静息  $I = 1.0$ , 单个的  $H - R$  神经元系统(1)有一个稳定的平衡点  $P = (-1.3942, -8.7216, 0.8225)$  将此平衡点带入矩阵  $J$  中, 得到此时的特征多项式为:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^3 + (2C + C_0 + 15.2052)\lambda^2 + \\ & (2.012C + 1.006C_0)\lambda + 0.012C + \\ & 0.006C_0 + 0.0255322 \end{aligned} \quad (9)$$

相应地, Hurwitz 行列式对于耦合强度  $C, C_0 \geq 0$  有

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 15.2052 + 2C + C_0 > 0 \\ \Delta_2 &= 5.60894 + 31.322C + 4.024C^2 + \\ & 15.661C_0 + 4.024CC_0 + 1.006C_0^2 > 0 \\ \Delta_3 &= 0.143209 + 0.867026C + 0.478605C^2 + \\ & 0.048288C^3 + 0.433513C_0 + 0.478605CC_0 + \\ & 0.072432C_2C_0 + 0.119651C_0^2 + \\ & 0.036216CC_0^2 + 0.006036C_0^3 > 0 \end{aligned} \quad (10)$$

由此可见, 当神经元都处于静息态时, 耦合后它们总是同步的.

表 1 对于不同的放电模式, 起搏器控制下的两个全同神经元达到完全同步时, 耦合强度的临界值 (起搏器神经元的控制强度分别为  $C_0 = 0, C_0 = 0.1, C_0 = 0.6$ )

Table 1 Critical values of the coupled strength for complete synchronization of two identical neurons with a pacemaker.

(the controlling strength of the pacemaker is  $C_0 = 0, C_0 = 0.1, C_0 = 0.6$ , respectively)

parameter value I	firing pattern	C( $C_0 = 0$ )	C( $C_0 = 0.1$ )	C( $C_0 = 0.6$ )
1.0	quiescent state	0	0	0
1.4	period - 1 bursting	0.16	0.21	0
1.8	period - 2 bursting	0.35	0.35	0.05
3.0	chaos	0.42	0.43	0.16
3.45	period - 1 spiking	0.53	0.42	0.22
4.0	period - 2 spiking	0.52	0.45	0.21

根据文献[11]中两个全同神经元完全同步时的临界值, 不失一般性, 我们分别选取起搏器的控制强度  $C_0 = 0.1, 0.6$ . 简便起见, 起搏器和其它两个神经元是全同的. 对于上述取到的其他值, 分别计算特征值、特征乘数和李亚普诺夫指数随着耦合

强度的变化<sup>[12]</sup>,然后确定出两个全同神经元达到完全同步所需要的耦合强度的临界值,数值结果如表1所示, $C_0 = 0$  没有起搏器控制时的情形<sup>[11]</sup>.

为了验证上述临界值的正确性,我们利用数值的方法给出耦合神经元系统在不同的放电模式下耦合强度等于临界值前后的两个膜电位的相互关系.图2给出  $C_0 = 0.1, I = 3.0$ , 即耦合的单个神经元分别表现为混沌放电时,在0.1的起搏器控制强度下,耦合强度临界值前后的两个神经元膜电位的相图.从图上可以明显看出当两个神经元达到完全同步时,膜电位的相图是一条角平分线.

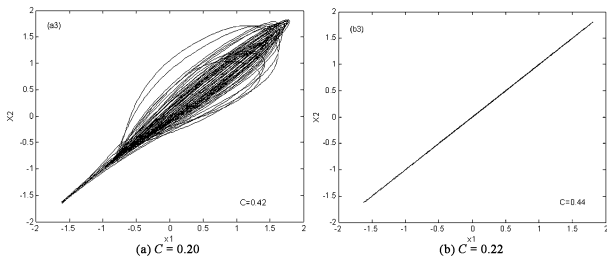


图2 起搏器控制强度为0.1时两个混沌放电神经元膜电位耦合强度临界值前后的比较图

Fig.2 Comparison of membrane potential for the controlling strength  $C_0 = 0.1$  before and after the critical values of the coupled strength

以上数据结果表明,控制强度适当小(0.1)的情形下,起搏器抑制两个处于簇放电的全同神经元之间的完全同步,当外部直流激励增加,两个神经元处于峰放电状态时,起搏器又增强它们之间的完全同步;当控制强度适当大(0.6),无论单个神经元处于何种放电模式,起搏器总是增强它们之间的完全同步.值得一提的是,通过分析在以上两个不同的控制强度下的耦合临界值,我们发现两个全同神经元之间的完全同步更强依赖于起搏器的控制强度,外部电流刺激的影响相对较弱.

## 2 三个神经元之间的同步问题

我们考虑由三个神经元组成的最小的网络结构,它们都受到起搏器神经元的控制,其结构示意图如图3所示.它们的动力学行为可由以下方程描述:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= y_0 - ax_0^3 + bx_0^2 - z_0 + I_0 + C_0 \left( \sum_{i=1}^3 x_i - 3x_0 \right), \\ \dot{y}_0 &= c - dx_0^2 - y_0, \\ \dot{z}_0 &= r(s(x_0 - \chi) - z_0), \\ \dot{x}_i &= y_i - ax_i^3 + bx_i^2 - z_i + I_i + C_i \sum_{j=1, j \neq i}^3 (x_j - x_i) + \end{aligned}$$

$$C_0(x_0 - x_i),$$

$$\dot{y}_i = c - dx_i^2 - y_i$$

$$\dot{z}_i = r(s(x_i - \chi) - z_i) \quad i = 1, 2, 3 \quad (11)$$

其中  $C, C_0 \geq 0$  的实际意义如前所述,  $I$  是系统的调节参数,控制神经元产生不同的放电模式.

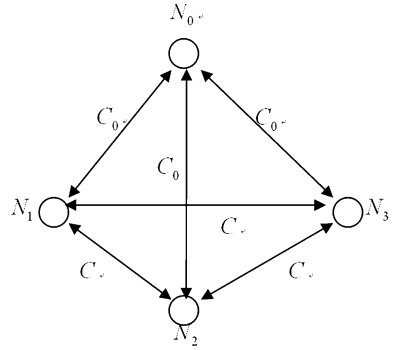


图3 带有起搏器的三个神经元耦合系统示意图

Fig.3 Configuration of three coupled neuronal network with pacemaker

考虑下面的个相同的对称耦合的非线性振子:

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= f(X_i, t) + C \sum_{j=1}^3 (X_j - X_i) + C_0(X_0 - X_i) \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $X_i \in R^n$  是  $n$  维列向量,代表第  $i$  个振子的状态变量,满足单个振子的动力学方程  $\dot{X}_i = f(X_i)$ ,  $f: R^n \rightarrow R^n$  为  $n$  维向量空间上的非线性向量函数,完全同步的发生意味着

$$\|X_i(t) - X_j(t)\| \rightarrow 0, \quad i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

当  $t \rightarrow \infty$ , 初始条件附近的同步流形可以表示为:

$$X_1(t) = X_2(t) = \dots = X_n(t) = s(t) \quad (14)$$

事实上,对所有的  $C, C_0 \geq 0$ , 耦合系统(12)的同步解就是同步流形(14)的零解.但在某些条件下,系统(12)的同步流形解是不稳定的,于是令

$$\xi_1 = X_2 - X_1, \xi_2 = X_3 - X_2, \dots, \xi_n = X_1 - X_n$$

引入坐标变换,得到以下同步差线性系统:

$$\dot{\delta\xi}_j = [Df(s(t)) - nC - C_0] \delta\xi_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

这样,同步流形(14)的稳定性问题就转化为线性常微分方程(15)的零解稳定性问题.例如,应用李雅普诺夫函数<sup>[13]</sup>  $V = \|\xi_j\|^2$ , 得到不等式:

$$\delta\dot{\xi}_j^T = (Df^T + Df - 2nC - C_0) \delta\xi_j = H\delta\xi_j < 0 \quad (16)$$

完全同步发生的一个充分条件就是不等式(16)总是成立的,这就要求实对称矩阵  $H$  有且只有负的

特征值. 在我们考虑的结构中,  $n = 3$ , 矩阵  $H$  正是线性系统 (15) 的 Jacobi 矩阵  $J$ , 具有以下形式:

$$J = \begin{pmatrix} -3ax^2 + 2bx - 3C - C_0 & 1 & -1 \\ -2dx & -1 & 0 \\ rs & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

表2 在起搏器不同控制强度下, 三个全同神经元完全同步时的耦合强度临界值

Table 2 Critical values of the coupled strength for complete synchronization of three identical neurons for different controlling strength of the pacemaker

parameter value I	firing pattern	$C(C_0 = 0)$	$C(C_0 = 0.1)$	$C(C_0 = 0.4)$
1.0	quiescent state	0	0	0
1.4	period - 1 bursting	0.11	0.09	0.01
1.8	period - 2 bursting	0.23	0.23	0.11
3.0	chaos	0.30	0.26	0.17
3.45	period - 1 spiking	0.35	0.29	0.23
4.0	period - 2 spiking	0.35	0.32	0.23

首先考虑三个神经元和起搏器神经元是全部的, 即有  $I_1 = I_2 = I_3 = I_0$ , 这里同样分别考虑一个较大(0.4)和较小(0.1)的控制强度, 根据以上理论分析, 我们分别计算其特征多项式、最大特征乘数以及最大的李雅普诺夫指数就能得到系统完全同步时耦合强度的临界值. 表2 给出在不同的控制强度下, 三个全同神经元完全同步时的耦合临界值, 其中  $C_0 = 0$  是耦合系统在没有起搏器控制下的情形.

同时, 为验证以上数值结果的准确性, 定义系统的平均同步差以及最大同步差:

$$\langle E \rangle = \frac{\langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle + \langle e_3 \rangle}{3}, E_{max} = \max(e_1, e_2, e_3)$$

$$\langle e_i \rangle = \langle \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2 + (z_i - z_{i+1})^2} \rangle$$

$$x_4 = x_1, y_4 = y_1, z_4 = z_1 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17)$$

这里,  $\langle \rangle$  表示对时间求平均值. 图4 给出起搏器控制强度为0.1时, 三个全同神经元处于混沌放电时的耦合强度临界值的两种数值模拟结果, 很容易发现, 两种数值结果吻合的很好, 都在  $C = 0.26$  附近达到完全同步. 以上数据表明,

在适当的控制强度下, 无论三个全同神经元处于何种放电状态, 起搏器总能增强三个全同神经元之间的完全同步行为.

其次, 我们考虑三个分别处于不同放电状态的

非全同神经元在起搏器控制下的同步问题. 分别选取  $I_1 = 1.4, I_2 = 1.8, I_3 = 3.45, I_0 = 3.0$ . 如图5(a)所示, 未耦合的三个神经元在没有起搏器的控制时, 处于非同步放电状态, 图5(b)给出了三个神经元不同的放电节律. 但是, 从图5(c)、5(d)可以看出, 当三个神经元都受到一个控制强度足够大( $C_0 \geq 25$ )的起搏器控制时, 它们最终出现相位同步状态. 鉴于三个神经元的外部直流激励  $I$  的不匹配性质, 它们不可能达到完全同步状态. 但如图6(a)所示, 如果起搏器神经元的控制强度足够大( $C_0 \geq 300$ ), 三个神经元的平均同步差和最大同步差无限趋近于零值, 即它们可以达到近似同步状态.

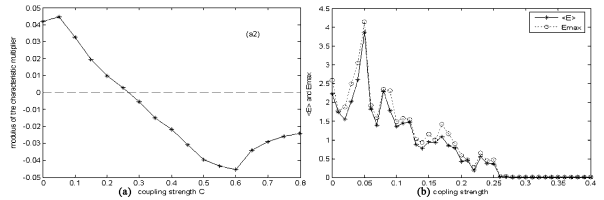


图4 在  $C = 0.1, I = 3.0$  时的三个全同神经元达到完全同步的理论判断准则和直观数值量的数值结果比较图:

- (a) 最大的李雅普诺夫指数随着耦和强度的变化,
- (b) 最大同步差和平均同步差随着耦和强度的变化

Fig. 4 Comparison of numerical simulation of the criterion with the intuitive numeric quantities for complete synchronization.

(a) The largest Lyapunov exponents versus the coupling strength for  $C = 0.1, I = 3.0$

(b) The largest synchronization error and the mean synchronization error versus the coupling strength for  $C = 0.1, I = 3.0$

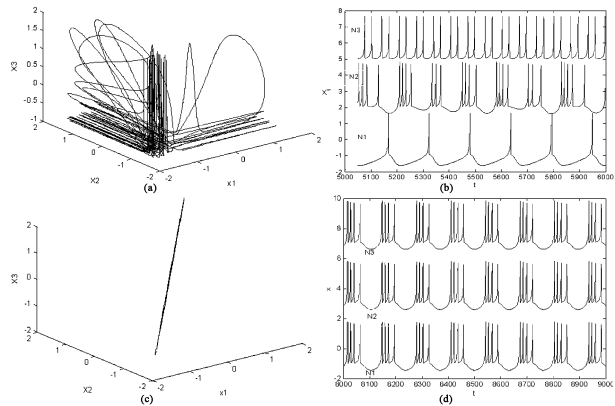


图5 三个非全同神经元的膜电位关系图以及放电节律图:

- (a), (b) 是没有起搏器控制时的情形;
- (c), (d) 是在起搏器控制强度  $C_0 \geq 25$  时的情形

Fig. 5 Relationship figure of the membrane potential and firing rhythm of three un-identical neurons. (a) (b) without pacemaker, (c) with pacemaker for the controlling strength  $C_0 \geq 25$

最后,考虑到神经元之间的信息传递存在时滞效应,在上述非全同神经元模型中加入时滞的因素,进一步考察起搏器对三个非全同神经元之间的同步影响. 它们的膜电位由以下的时滞微分方程来描述:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= y_0 - ax_0^3 + bx_0^2 - z_0 + I_0 + C_0 \left[ \sum_{i=1}^3 x_i(t-\tau) - 3x_0 \right], \\ \dot{x}_i &= y_i - ax_i^3 + bx_i^2 - z_i + I_i + C_0 [x_0(t-\tau) - x_i], \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (18)$$

其中时滞  $\tau \geq 0$ . 在这个时滞耦合中,我们引入一个统计量,相似函数如<sup>[14]</sup>:

$$S_x(\tau) = \left\{ \frac{\langle [x_1(t) - x_2(t-\tau)]^2 \rangle}{[\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle]^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad (19)$$

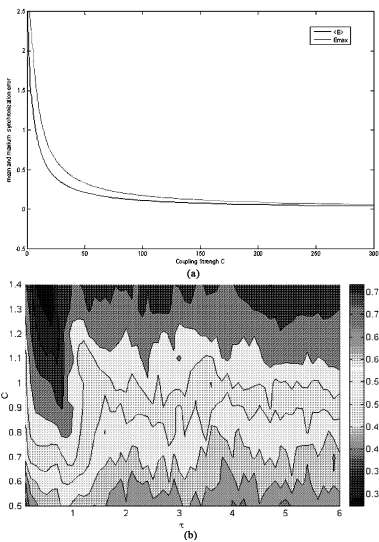


图6 (a)在不同的起搏器控制强度下,三个非全同神经元的最大同步差和平均同步差;  
(b)考虑时滞时,三个非全同神经元在不同的时滞和起搏器控制下的相似函数值

Fig.6 (a) The largest synchronization error and the mean synchronization error for different controlling strength of the pacemaker;  
(b) Considering time delay, the similarity function of three un-identical neurons of different time delay and controlling strength of the pacemaker

这个函数度量了两个信号的时间相关. 如果耦合系统是完全同步的,那么在  $\tau=0$  时,有  $S_x(\tau) = 0$ . 事实上,  $S_x(\tau)$  越小,两个信号  $V_1(t)$ ,  $V_2(t)$  有越大的相关性,即两个耦合系统的同步程度增加. 图6(b)给出在起搏器控制强度和时滞下,三个非全同神经元平均相似函数的密度图,例如,在适当的时滞下,起搏器的控制强度为 0.14 时就可以达到近似同步状态,而在没有时滞的情况下,如图6(a)

所示,三个非全同神经元此时远远没有达到同步. 由此可以看出,适当的时滞可以极大地增强起搏器对系统的同步影响.

### 3 结论

起搏器影响耦合神经元之间的同步行为,本文分别研究了起搏器对两个和三个耦合神经元之间同步行为的影响. 结果表明,在适当的控制强度下,起搏器既能够抑制又能够增强两个全同神经元之间的完全同步. 然而,三个全同神经元无论处于何种放电状态,起搏器总是会增强它们之间的完全同步. 进一步,对于电流激励不匹配的三个非全同神经元,在足够大的控制强度下,起搏器会诱发它们之间的相位同步甚至近似同步. 如果考虑时滞对耦合系统的影响,起搏器更容易诱导它们之间的这种同步行为. 这些结果对我们理解神经元的集群运动有重要的参考价值.

### 参 考 文 献

- Masuda N and Aihara K. Global and local synchrony of coupled neurons in small - world networks. *Biol. Cyber.*, 2004, 90:302 ~ 309
- Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, 64:821 ~ 824
- 郑艳红,陆启韶. 时滞影响下的环式耦合混沌神经元同步. *动力学与控制学报*, 2008, 6(3):208 ~ 212 (Zheng Y H, Lu Q S. Synchronization in ring coupled chaotic with timedelay. *Jorunal of Dynamics and Control*, 2008, 6(3): 208 ~ 212 (in Chinese))
- 王青云,陆启韶. 兴奋性化学突触耦合的神经元的同步. *动力学与控制学报*, 2008, 6(1):35 ~ 39 (Wang Q Y, Lu Q S. Synchronization of coupled neurons with excitory chemical synapse. *Jorunal of Dynamics and Control*, 2008, 6(1):35 ~ 39 (in Chinese))
- Dhamala M, Jirsa V K, Ding M Z. Enhancement of Neural Synchrony by Time Delay. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 92: 074104
- Wang Q Y, and Lu Q S. Time delay enhanced synchronization and regularization in two coupled chaotic ML neurons. *Chin. Phys. Lett.*, 2005, 22:1320 ~ 1332
- Zhou C S, Kurths J. Noise - induced phase synchronization and synchronization transitions in chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, 88: 230602

- 8 He D H, Shi P L and Stone L W. "Noise - induced phase synchronization in realistic models. *Phys. Rev. E*, 2003, 67 :027201
- 9 Li M S, Lu Q S, Duan L X, and Wang Q Y. Firing Patterns and Transitions in Coupled Neurons Controlled by a Pacemaker. *Chin. Phys. Lett.*, 2008, 25 :2806 ~ 2809
- 10 Hindmarsh J L, Rose R M. A model of the neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proc. R. Soc. London Ser. B*, 1984, 221 :87 ~ 102
- 11 Shi X, Lu Q S. Complete synchronization of coupled Hindmarsh - Rose neurons with ring structure. *Chin. Phys. Lett.*, 2004, 21 ( 9 ) :1695 ~ 1698
- 12 Verhulst F. *Nonlinear Differential Equation and Dynamical Systems*. Springer, Heidelberg, 1990
- 13 Yanchuk S, Maistrenko Y, Lading B, and Mosekilde E. Partial synchronization in a system of coupled logistic maps. *Int J. Bifurc Chaos*, 2000, 10 :1051 ~ 1066
- 14 Rosenblum M G, and Pikovsky A S. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, 78 :4193 ~ 4196

## SYNCHRONIZATION OF COUPLED NEURONS UNDER THE CONTROL OF PACEMAKER\*

Li Meisheng<sup>1</sup> Zhang Honghui<sup>1</sup> Wang Qingyun<sup>2</sup> Shi Xia<sup>3</sup>

(1. School of Mathematics and Systems Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

(2. Department of Dynamics and Control, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

(3. College of science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

**Abstract** The effects of pacemaker on synchronization in bidirectional coupling Hindmarsh - Rose neurons with gap junction were studied. Results show that, with proper parameters, pacemaker can enhance or inhibit the complete synchronization of two identical neurons, while it can always enhance the complete synchronization of three identical neurons. For three un - identical neurons with different firing patterns, pacemaker can induce phase synchronization and nearly complete synchronization if the controlling strength is big enough. When time delay was considered, the pacemaker was more likely to trigger such synchronization.

**Key words** pacemaker, neuronal synchronization, time delay