

切换单摆无界轨道的存在性*

程燕燕^{1,2} 杨晓松¹

(1. 华中科技大学数学与统计学院, 武汉 430074) (2. 华中科技大学电信系, 武汉 430074)

摘要 研究一类最简单的切换哈密顿系统, 即只在重力作用下的切换单摆的动力学性质. 利用每个切换子系统的哈密顿函数, 我们发现切换单摆的动力学行为比单摆复杂的多. 切换单摆不仅仅有不稳定的平衡点、周期轨道, 它还存在着无界轨道.

关键词 切换单摆, 切换哈密顿系统, 非光滑系统, 无界轨道

引言

非光滑系统动力学问题近年来一直受到学者们的关注. 非光滑系统的研究能引起如此广泛兴趣的最主要原因是它能恰当地描述众多自然物理过程, 同时在实际工程设备中往往存在着切换、冲击等非光滑因素^[1]. 电路中开关、二极管、晶体管等设备^[2-4], 力学系统中的碰撞、冲击、干摩擦等因素^[5-6], 悬索桥模型^[7]、震动模型^[8]、走路模型^[9]以及社会模型、经济模型等^[10]都是非光滑的.

哈密顿系统是非线性科学研究中的重要领域. 由于天体力学、等离子物理、航天科学以及生物工程中的很多模型都是以哈密顿系统或其扰动的形式出现, 因此该领域的研究多年来长盛不衰.

本文研究了一类典型的非光滑动力系统, 即最简单的切换哈密顿系统——切换单摆的动力学行为. 我们希望能从中得到启示, 以便于了解和研究更复杂的切换哈密顿系统.

1 模型与方法

本文研究如图 1 所示的切换单摆的动力学行为. 切换单摆由质量为 1 的小球和质量忽略不计的非弹性杆组成且在垂直平面上自由运动. 杆的一端固定在垂直平面上的某一点, 设 θ 为杆与过该点的垂线的夹角. 在杆的一端安装一个小马达以便于瞬间改变杆长. 假设切换摆的摆长在左半平面为 1, 右半平面为 $l(l \neq 1)$.

程可以表示为

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 & \theta \bmod(2\pi) > \pi \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 & \theta \bmod(2\pi) < \pi \end{cases} \quad (1)$$

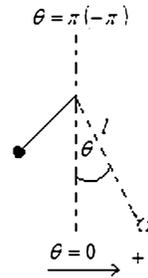


图 1 切换单摆的模型

Fig. 1 The model of the switched simple pendulum

利用坐标变换 $x = \theta, y = \dot{\theta}$ 将方程(1)改写为

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} y \\ -g \sin x \end{pmatrix} & x \bmod(2\pi) > \pi \\ \begin{pmatrix} y \\ -\delta \sin x \end{pmatrix} & x \bmod(2\pi) < \pi \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\delta = \frac{g}{l}$. 显然左/右子系统都是哈密顿系统, 其

哈密顿函数 $H(x, y)/\bar{H}(x, y)$ 分别为

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - g \cos x, \quad (3a)$$

$$\bar{H}(x, y) = \frac{y^2}{2} - \delta \cos x \quad (3b)$$

对于哈密顿系统, 我们知道下面这个事实:

命题 1 ^[11] 哈密顿向量场(4)的轨线是哈密顿函数 $H(x, y)$ 的水平集

不考虑摩擦力的作用, 因此该切换摆的系统方

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{4}$$

我们利用这个结果来研究切换摆的动力学行为,可以得到下面的结论.

2 无界轨道的存在性

不失一般性,假设切换摆的初始状态为 (x_0, y_0) , 其中 $x_0 \in (-\pi, 0), y_0 > 0$. 设

$$f_1(x_0, y_0) = \frac{y_0^2}{2} + g(1 - \cos x_0),$$

$$f_2(x_0, y_0) = \frac{y_0^2}{2} - g(1 + \cos x_0)$$

命题 2 当 $l < 1$, 即 $\delta > g$ 时, 切换单摆会有以下几种运动情况:

(1) 当 $f_1 = 2\delta + 2n(\delta - g), n = 0, 1, 2, \dots, n \in Z$ 时, 切换摆逆时针旋转 n 圈后停在最高点, 即切换摆到达平衡点 $x(2n + 1)\pi$ 时的速度为 0;

(2) 当 $f_1 < 2\delta$ 且 $f_2 = 0$ 时, 切换摆运动到 $x = \pi - \arccos[\frac{y_0^2}{2\delta} + \frac{g}{\delta}(1 - \cos x_0) - 1]$ 后顺时针运动直至停在最高点, 即切换摆到达平衡点 $x = -\pi$ 时速度为 0;

(3) 当 $f_1 < 2\delta$ 且 $f_2 < 0$ 时, 切换摆做周期运动;

(4) 当 $2\delta + 2(n - 1)(\delta - g) < f_1 < 2\delta + 2n(\delta - g), n = 1, 2, 3, \dots, n \in Z^+$ 或 $f_1 < 2\delta$ 且 $f_2 > 0$ 时, 切换摆先逆时针旋转而后顺时针旋转, 且顺时针经过 $x \bmod(2\pi) = 0$ 时的速度越来越大.

证明 设小球第 i 次经过最低点和最高点的角速度分别为 u_i 和 v_i . 根据命题 1, 由 $H(x, y)$ 得

$$u_1 = \sqrt{2\left(\frac{y_0^2}{2} + g(1 - \cos x_0)\right)} \tag{5}$$

此时杆长立即从 1 变成 l , 系统瞬时切换成右半子系统. 根据命题 1, 由 $\bar{H}(x, y)$ 得

$$\frac{u_1^2}{2} - \delta = \frac{\tilde{y}^2}{2} - \delta \cos \tilde{x} \tag{6}$$

其中 (\tilde{x}, \tilde{y}) 是位于右半平面的某个状态. 解方程 (6), 我们发现

(1) 当 $f_1 = 2\delta$ 时, $(\pi, 0)$ 是方程 (6) 的一个解, 即切换摆运动到最高点 ($x = \pi$) 时的速度为 0;

(2) 当 $f_1 < 2\delta$ 时, $(\pi - \arccos[\frac{y_0^2}{2\delta} + \frac{g}{\delta}(1 - \cos x_0) - 1], 0)$ 是方程 (6) 的一个解, 这表示切换摆运动到 $x = \pi - \arccos[\frac{y_0^2}{2\delta} + \frac{g}{\delta}(1 - \cos x_0) - 1]$ 时的速度为 0, 在重力的作用下切换摆将顺时针运动. 当它再次经过 $x = 0$ 时的角速度 $u_2 = -u_1$, 此刻摆长迅速切换成 1. 根据命题 1, 由 $H(x, y)$ 得

$$\frac{u_2^2}{2} - g = \frac{\hat{y}^2}{2} - g \cos \hat{x} \tag{7}$$

其中 (\hat{x}, \hat{y}) 是位于左半平面的某个状态. 解方程 (7) 得到

(a) 当 $f_2 = 0$ 时, $(-\pi, 0)$ 是方程 (7) 的一个解, 即切换摆顺时针运动到 $x = -\pi$ 时的速度为 0;

(b) 当 $f_2 < 0$ 时, $(\arccos[\frac{y_0^2}{2g} - \cos x_0] - \pi, 0)$ 是方程 (7) 的一个解. 这表明切换摆做周期运动, 且左/右振幅分别为

$$A_L = \pi - \arccos[\frac{y_0^2}{2g} - \cos x_0] \tag{8a}$$

$$A_R = \pi - \arccos[\frac{y_0^2}{2\delta} + \frac{g}{\delta}(1 - \cos x_0) - 1] \tag{8b}$$

(c) 当 $f_2 > 0$ 时, 切换摆运动到 $x = -\pi$ 时的角速度为

$$v_1 = -\sqrt{2\left(\frac{y_0^2}{2} - g(1 + \cos x_0) + 2\delta\right)} \tag{9}$$

此时摆长瞬时切换成 l , 利用得到 $\bar{H}(x, y)$

$$u_3 = -\sqrt{2\left(\frac{y_0^2}{2} - g(1 + \cos x_0) + 2\delta\right)} \tag{10}$$

用相同的步骤和方法可以得到一个无穷的角速度序列, 其中满足

$$u_i = -\sqrt{2\left(\frac{y_0^2}{2} + g(1 - \cos x_0) + 2(i - 2)(\delta - g)\right)} \tag{11}$$

$\|u_i\| > \|u_{i-1}\|$ 显然成立.

(3) 当 $f_1 > 2\delta$ 时, 切换摆运动到 $x = \pi$ 时的速度为 $v_1 = \sqrt{2\left(\frac{y_0^2}{2} - g(1 + \cos x_0) + 2\delta\right)}$. 此时摆长迅速切换到 1, 由 $H(x, y)$ 得

$$u_2 = \sqrt{2\left(\frac{y_0^2}{2} + g(1 - \cos x_0) - 2\delta + 2g\right)} \tag{12}$$

① 当 $f_1 < 4\delta - 2g$ 时, 切换摆运动到 $\tilde{x} = 3\pi - \arccos[\frac{y_0^2}{2\delta} + \frac{g}{\delta}(1 - \cos x_0) + \frac{2g}{\delta} - 3]$ 时的速度为 0,

随后在重力的作用下顺时针运动. 此时有 $f_2 > 0$ 成立, 这样其运动雷同于上述的情形(c).

② 当 $f_1 = 4\delta - 2g$ 时, 切换摆运动到 $x = 3\pi$ 时的速度为0.

③ 当 $f_1 > 4\delta - 2g$ 时, 可以得到

$$v_2 = \sqrt{2\left(\frac{y_0^2}{2} + g(1 - \cos x_0) + 2g - 4\delta\right)},$$

$$u_3 = \sqrt{2\left(\frac{y_0^2}{2} + g(1 - \cos x_0) - 4\delta + 4g\right)}$$

与上文类似的分析可得当 $f_1 = 2\delta + 2n(\delta - g)$ 时, 切换摆运动到 $x = (2n + 1)\pi$ 时的速度为0. 当 $2\delta + 2(n - 1)(\delta - g) < f_1 < 2\delta + 2n(\delta - g)$ 时, 切换摆的运动雷同于上述的情形(c).

注1 当切换摆的初始状态满足某些条件时, 其对应的轨道是无界的. 根据式(11), 一旦切换摆的轨道是无界的, 切换摆每旋转一圈其角速度平方的最大值(即 u_i^2)将会增加 $2(\delta - g)$.

命题3 当 $l > \pi$, 即 $\delta < g$ 时, 切换单摆会有以下几种运动情况:

(1) 当 $f_1 = 2\delta$ 时, 切换单摆运动到时的速度为0;

(2) 当 $f_1 < 2\delta$ 时, 切换摆做周期运动;

(3) 当 $f_1 > 2\delta$ 时, 切换单摆逆时针旋转, 且经过 $x \bmod(2\pi) = 0$ 时的速度越来越大.

证明 当 $f_1 = 2\delta$ 时, 证明过程与上文一致.

当 $f_1 < 2\delta$ 时, 因为 $\delta < g$ 所以 $f_2 < 0$ 成立. 因此, 切换摆的运动只有上文的情形(b).

当 $f_1 > 2\delta$ 时, 利用 $H(x, y)$ 和 $\bar{H}(x, y)$ 可以得到一个无穷的角速度序列 $\{u_i\} i = 1, 2, 3, \dots$, 其中 u_i 的定义与上文一致且满足

$$u_i = \sqrt{2\left(\frac{y_0^2}{2} + g(1 - \cos x_0) + 2(i - 1)(g - \delta)\right)} \quad (13)$$

$\|u_i\| > \|u_{i-1}\|$ 显然成立.

注2 当切换摆的初始状态满足某些条件时, 其对应的轨道是无界的. 根据式(13), 一旦切换摆的轨道是无界的, 切换摆每旋转一圈其角速度平方的最大值(即 u_i^2)将会增加 $2(g - \delta)$.

3 数值仿真

我们用两个数值例子来说明上述结论的正确性.

例1 取 $l = \frac{2}{3}$, 则切换单摆的系统方程可表

示为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} y \\ -10\sin x \end{pmatrix} & x \bmod(2\pi) > \pi \\ \begin{pmatrix} y \\ -15\sin x \end{pmatrix} & x \bmod(2\pi) < \pi \end{cases} \end{cases} \quad (14)$$

图2是系统(14)的相图. 图中的虚线表示切换边界, 由于 θ (即图中的 x) 是以 2π 为周期的, 我们只给出了两个周期内的状态图. 图中存在周期轨, 最终趋于平衡点的轨道以及先逆时针运动后顺时针过 $x \bmod(2\pi) = 0$ 时角速度(即图中的 y)越来越大的轨道. 这与命题2的结论一致.

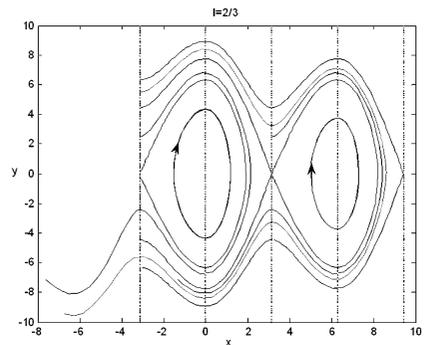


图2 系统(14)的相图

Fig. 2 The phase portrait of system (14)

例2 取 $l = \frac{4}{3}$, 则切换单摆的系统方程可表

示为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} y \\ -10\sin x \end{pmatrix} & x \bmod(2\pi) > \pi \\ \begin{pmatrix} y \\ -7.5\sin x \end{pmatrix} & x \bmod(2\pi) < \pi \end{cases} \end{cases} \quad (15)$$

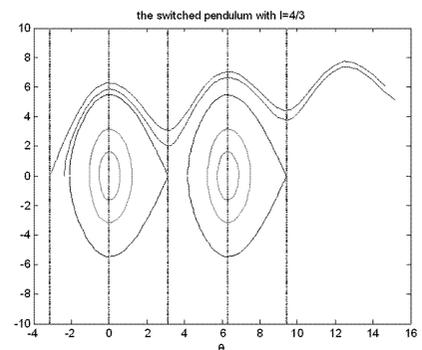


图3 系统(15)的相图

Fig. 3 The phase portrait of system (15)

图3是系统(15)的相图. 图中的虚线表示切换边

界,我们同样只给出了两个周期内的状态图. 图中除了有周期轨,最终趋于平衡点的轨道外,还有逆时针过 $x \bmod(2\pi) = 0$ 时角速度越来越大的轨道. 这与命题 3 的结论一致.

4 结束语

以每个子系统的哈密顿函数为基础,分别对 $l < 1$ 和 $l > 1$ 条件下的切换单摆的运动情况进行分析,并对具体的实例进行数值计算,其仿真结果与得到的结论一致. 从切换单摆的动力学分析中得知切换单摆除了有周期解之外还存在着不稳定的平衡状态和无界解,后者尤其值得注意. 我们希望这些结果对研究多自由度的切换哈密顿系统具有一定的启示.

参 考 文 献

- 1 Brogliato B. Non-smooth mechanics. Springer-Verlag, 1999
- 2 Deane J, Hamill D. Analysis, simulation and experimental study of chaos in the buck converter, in Proceedings of the Power Electronics Specialists Conf. (PESC 1990), New York: IEEE Press, 1990:491 ~ 499
- 3 Norsworthy S R, Schreier R, Temes G C. Delta-sigma data converters theory, design and simulation. New York: IEEE Press, 1997
- 4 Fossas E, Olivar G. Study of chaos in buck converter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems: Fundamental Theory and Applications*, 1998, 43:13 ~ 25
- 5 Budd C, Dux F. Chattering and related behaviour in impact oscillators. *Phil. Trans. Royal Society London A*, 1994, 347, 369 ~ 389
- 6 Popp K, Hinrichs N, Oestreich M. Dynamical behaviour friction oscillators with simultaneous self and external excitation. *Sadhana (Indian Academy of Sciences)*, 1995, 20, 627 ~ 654
- 7 Doole S H, Hogan S J. A piecewise linear suspension bridge model: nonlinear dynamics and orbit continuation. *Dynamics and stability of systems*, 1996, 11, 19 ~ 29
- 8 Hogan S J. On the dynamics of rigid block motion under harmonics forcing. *Proc. Roy. Soc. London A.*, 1989, 425: 411 ~ 476
- 9 McGeer T. Passive dynamic walking. *Int. Journal of Robotics Research*, 1990, 9: 62 ~ 82
- 10 乐源, 谢建华, 丁旺才. 一类两自由度碰撞振动系统的 Hopf 分岔和混沌. *动力学与控制学报*, 2004, 2 (3): 36 ~ 41 (Le Y, Xie J H, Ding W C. Hopf bifurcation and chaos of a two-degree-of-freedom vibro-impact system. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(3): 36 ~ 41 (in Chinese))
- 11 Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos (second edition). *Springer*, 2003

THE EXISTENCE OF UNBOUNDED ORBITS OF SWITCHED SIMPLE PENDULUM *

Cheng Yanyan^{1,2} Yang Xiaosong¹

(1. School of Mathematics and Statistics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

(2. Department of Electronics and Information Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract We investigated the dynamics of the simplest kind of switched Hamiltonian system-switched simple pendulum, on which the only force acting is gravity. Taking advantage of the Hamiltonian function of each sub-system, we find that the dynamics of the switched pendulum is much more complex than that of the simple pendulum. The switched pendulum is able to rotate more and more rapidly or settle down except oscillating periodically.

Key words switched pendulum, switched Hamiltonian system, non-smooth system, unbounded orbits