

基于微分反馈法的随机受迫 Brusselator 模型的混沌控制*

赵婷婷 马少娟

(北方民族大学信息与计算科学学院, 银川 750021)

摘要 研究了一个随机参数受迫 Brusselator 模型的非线性微分反馈控制, 首先将其用 Chebyshev 多项式逼近得到扩阶的等价确定性系统, 然后设计了非线性微分反馈控制器, 使得混沌的受迫 Brusselator 模型被稳定在了某一条不稳定的周期轨道上. 数值结果验证了方法的有效性.

关键词 正交多项式逼近, 随机参数, 受迫 Brusselator 模型, 非线性微分反馈控制

引言

混沌理论的研究是一个极富挑战性的具有交叉学科性质的重大课题, 具有巨大的应用潜力. 特别是 20 世纪 90 年代以来混沌控制的突破性进展, 得到了许多有关混沌控制的研究成果. 这些成果不仅丰富了混沌理论, 而且在保密通信^[1-3]、非线性电路、人体生命科学、神经网络^[4-8]、激光、化学反应过程、流体力学、非线性机械故障诊断系统、天体力学、等离子体和强流离子束等众多的科学领域已经取得初步成果并展现出了十分诱人的应用前景.

目前国内外学术界发表了许多有关控制混沌系统和混沌现象方面的论文, 提出了各种不同的混沌控制方法, 譬如直接观测法、分频采样法、庞加莱截面法、参数扰动 OGY 的各种改进法^[9]、纳入轨道和强迫迁徙法^[10-12]、弱周期扰动、偶然正比技术(OPF 技术)法^[13]、跟踪法、连续变量反馈法^[14]、正比变量脉冲反馈法、随机控制方法^[15]、直接反馈法、变量反馈法、自适应控制法^[16-18]、振荡吸收法^[19]、参数共振法^[20]、工程反馈控制法、分布参数系统的人工智能控制(包括神经网络和随机控制方法的尝试)等等. 从非线性系统的类型上说, 有些方法适用于离散非线性系统, 有些则适用于连续非线性系统, 从控制原理上可分为微扰反馈控制及无反馈控制法, 也就是说这些方法是适用于各种情形的混沌控制.

上面所涉及的方法大都应用在确定性系统中, 然而现实生活中很多系统都是含有随机参数或外

界随机激励或二者皆有, 通常称为随机系统. 文献[21, 22]应用正交多项式展开理论对非线性随机参数系统的混沌进行了研究. 在随机参数或外界随机激励非线性系统中, 随机混沌系统的每一个样本都是确定性混沌运动, 因此, 随机系统的混沌控制也就意味着对它的每个确定性样本进行控制. 这样, 所有确定性混沌的控制方法, 都可以用于随机系统的混沌控制. 由于非线性随机参数动力系统的混沌有着与确定性不同的特性, 因此对其的控制研究还需要更多的探索.

本文将讨论随机参数受迫 Brusselator 模型的非线性微分反馈控制问题. 首先将具有服从拱形分布随机参数的受迫 Brusselator 模型转化为与其等价的确定性扩阶系统, 其次采用了非线性微分反馈控制法, 通过调节控制强度 k , 找到该混沌系统的非稳定周期轨道并且稳定它, 使得系统迅速得到控制. 数值结果验证了方法的有效性.

1 受迫 Brusselator 模型的 Chebyshev 多项式逼近

受迫 Brusselator 模型为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A - (B + 1)x + x^2y + p\cos\omega t, \\ \frac{dy}{dt} = Bx - x^2y \end{cases} \quad (1)$$

正交多项式逼近理论中多项式基的选取依赖于随机变量的概率密度函数, 结合实际情况, 本文中选取服从拱形分布的随机变量. 其概率密度函数曲线如图 1 所示, 表达式为

2010-04-17 收到第 1 稿, 2010-07-14 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(11002001), 国家民族事务委员会科研基金(08XBE08)及宁夏回族自治区高校科研项目(2008TY007)资助

$$p(\xi) = \begin{cases} (2/\pi)\sqrt{1-\xi^2} & |\xi| \leq 1 \\ 0 & |\xi| > 1 \end{cases} \quad (2)$$

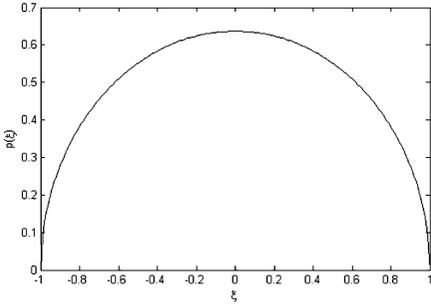


图1 随机变量 ξ 的拱形概率密度函数曲线图

Fig. 1 The arch-like PDF curve for random variable ξ

基于此类概率密度函数,可选择第二类 Chebyshev 多项式为正交多项式基,此类多项式的一般表达式为

$$U_l(\xi) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k \frac{(l-k)!}{k! (l-2k)!} (2\xi)^{l-2k}$$

$$U_0(\xi) = 1, U_1(\xi) = 2\xi, U_2(\xi) = 4\xi^2 - 1, \dots \quad (3)$$

第二类 Chebyshev 多项式的循环递推公式为

$$\xi U_l(\xi) = \frac{1}{2} (U_{l-1}(\xi) + U_{l+1}(\xi)) \quad (4)$$

其加权正交性可表示为

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{\pi} \sqrt{1-\xi^2} U_i(\xi) U_j(\xi) d\xi = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (5)$$

虽然 ξ 在 -1 到 $+1$ 之间随机取值,但是其每一个样本都是服从拱形分布的随机变量. 因为加权函数正好为拱形概率密度函数,即(2)式中的 $p(\xi)$,所以(5)式左边可以认为是 $U_i(\xi) U_j(\xi)$ 乘积的期望. 在均方收敛的意义下,根据泛函分析知识可知随机变量 ξ 的函数 $f(\xi)$ 可以展开成级数形式

$$f(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i U_i(\xi)$$

其中, $x_i = \int_{-1}^1 p(\xi) f(\xi) U_i(\xi) d\xi$. 当函数为多个相互独立的随机变量的可测函数时,同样也有相似的展开式,这种展开称为随机变量函数 $f(\xi)$ 的正交分解.

在受迫 Brusselator 模型中 A, ω, p 均为常数,假设 B 是一随机变量,有表达式 $B = \bar{B} + \sigma\xi$, ξ 为服从 $[-1, 1]$ 上拱形分布的随机变量. 显然,随机受迫 Brusselator 模型(1)的响应是时间 t 和随机变量 ξ 的函数,即

$$x = x(t, \xi)$$

由随机函数的正交分解理论,系统(1)的响应可以写成

$$x(t, \xi) = \sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(\xi)$$

其中 $U_i(\xi)$ 为第 i 个 Chebyshev 多项式. N 表示逼近的展开项数,在实际计算中取有限项近似,本文为 $N=4$,即

$$x(t, \xi) = \sum_{i=0}^4 x_i(t) U_i(\xi) \quad (6)$$

将(6)式且 $B = \bar{B} + \sigma\xi$ 代入(1)式中,有

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^4 \dot{x}_i(t) U_i(\xi) = A + p \cos \omega t - (\bar{B} + \sigma\xi + 1) \sum_{i=0}^4 x_i(t) U_i(\xi) + \\ \left(\sum_{i=0}^4 x_i(t) U_i(\xi) \right)^2 \sum_{i=0}^4 y_i(t) U_i(\xi) \\ \sum_{i=0}^4 \dot{y}_i(t) U_i(\xi) = (\bar{B} + \sigma\xi) \sum_{i=0}^4 x_i(t) U_i(\xi) - \\ \left(\sum_{i=0}^4 x_i(t) U_i(\xi) \right)^2 \sum_{i=0}^4 y_i(t) U_i(\xi) \end{cases} \quad (7)$$

由 Chebyshev 多项式的循环递推公式,有

$$\sigma\xi \left(\sum_{i=0}^4 x_i(t) U_i(\xi) \right) = \sigma \left(\sum_{i=0}^4 x_i(t) [U_{i-1}(\xi) + U_{i+1}(\xi)] / 2 \right) \quad (8)$$

由(3)式和(5)式得如下关系式

$$U_0^3 = U_0, U_0^2 U_1 = U_1, U_1^2 U_2 = U_4 + 2U_2 + U_0, \dots \quad (9)$$

根据(9)式,并定义非线性项 $\left(\sum_{i=0}^4 x_i(t) U_i(\xi) \right)^3$ 关于 $U_i(\xi)$ 的线性组合中 $U_i(\xi)$ 的系数为 $X_i(t)$,可由计算软件求出,如 Maple^[23],则

$$\left(\sum_{i=0}^4 x_i(t) U_i(\xi) \right)^3 = \sum_{i=0}^{12} X_i(t) U_i(\xi) \quad (10)$$

将(8), (10)式代入(7)式可得

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^4 \dot{x}_i(t) U_i(\xi) = A + p \cos \omega t - (\bar{B} + \\ 1) \sum_{i=0}^4 x_i(t) U_i(\xi) + \sum_{i=0}^{12} x_i(t) U_i(\xi) - \\ \sigma \sum_{i=0}^4 x_i(t) (U_{i-1}(\xi) + U_{i+1}(\xi)) / 2 \\ \sum_{i=0}^4 \dot{y}_i(t) U_i(\xi) = \bar{B} \sum_{i=0}^4 x_i(t) U_i(\xi) - \\ \sum_{i=0}^{12} X_i(t) U_i(\xi) + \sigma \sum_{i=0}^4 x_i(t) (U_{i-1}(\xi) + \\ U_{i+1}(\xi)) / 2 \end{cases} \quad (11)$$

将上式两边同乘以 $U_i(\xi), i=0, \dots, 4$ 后关于随机变量 ξ 取期望,由正交性可得与系统(1)在均方收敛意义下等价的确定性非线性微分方程组标准化后为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_0(t) = -(\bar{B}+1)x_0 + X_0 - \frac{1}{2}\sigma x_1 + A + p\cos\omega t \\ \frac{d}{dt}y_0(t) = \bar{B}x_0 + \frac{1}{2}\sigma x_1 - X_0 \\ \dots\dots \\ \frac{d}{dt}x_4(t) = -(\bar{B}+1)x_4 + X_4 - \frac{1}{2}\sigma x_3 \\ \frac{d}{dt}y_4(t) = \bar{B}x_4 + \frac{1}{2}\sigma x_3 - X_4 \end{cases} \quad (12)$$

其中 $y_5(t)$ 近似取值为零。

式(6)表示随机系统的响应是随机变量 U 的函数,根据随机变量样本点不同而不同,对应于 U 取不同值时系统的各个样本随机响应 $x(t, \xi)$ 是依赖于 U 的随机过程,这时既可以通过式(6),也可以引入集合平均响应,即随机响应的均值。因此随机参数受迫 Brusselator 模型的集合平均响应可以表示为

$$\begin{cases} E[x(t, \xi)] = \sum_{i=0}^4 x_i(t) E[U_i(\xi)] = x_0(t) \\ E[y(t, \xi)] = \sum_{j=0}^4 y_j(t) E[U_j(\xi)] = y_0(t) \end{cases} \quad (13)$$

令 $\sigma=0$ 时,退化为确定性系统

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t, \xi) = A - (\bar{B}+1)x(t, \xi) + \\ x^2(t, \xi)y(t, \xi) + p\cos\omega t \\ \frac{d}{dt}y(t, \xi) = \bar{B}x(t, \xi) + x^2(t, \xi)y(t, \xi) \end{cases} \quad (14)$$

令 $\xi=0$ 时,得到均值参数系统的样本响应

$$\begin{cases} x(t, 0) = \sum_{i=0}^4 x_i(t) U_i(0) = x_0(t) - x_2(t) + x_4(t) \\ y(t, 0) = \sum_{j=0}^4 y_j(t) U_j(0) = y_0(t) - y_2(t) + y_4(t) \end{cases} \quad (15)$$

文中的激励振幅值以及随机强度的取值较小,因此令确定性等价系统(12)的初始条件的取值与确定性系统(14)的初始条件的取值相同,即

$$\begin{aligned} x(0) &= [0.4, 0, 0, 0, 0]^T, \\ y(0) &= [0.4, 0, 0, 0, 0]^T, \\ x_0 &= 0.4, y_0 = 0.4 \end{aligned} \quad (16)$$

选择受迫 Brusselator 模型的参数: $B=1.2, A=0.4, \omega=0.85$, 在参数 $p=0.06$ 下受迫 Brusselator 模型处于混

沌状态,如图2所示。

现在有三个不同的系统分别对应三个不同的响应:确定性系统响应(DR)、均值参数系统的样本响应(SRM)与随机参数系统的集合平均响应(EMR),由于等价确定性系统可以逼近随机系统,因此只需要实现等价确定性系统的控制。接下来,将用微分反馈控制法实现对等价确定性受迫 Brusselator 模型的控制。

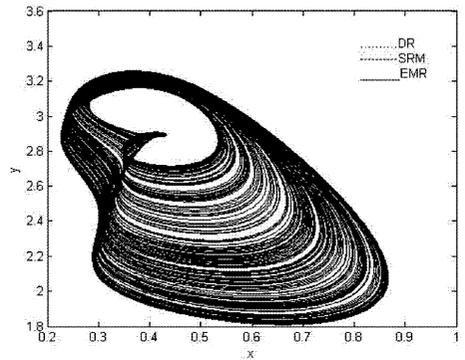


图2 三种系统下的混沌相轨图

Fig.2 Chaos phase track chart of three kinds of systems

2 等价确定性受迫 Brusselator 模型的非线性微分反馈控制

在受迫 Brusselator 模型中,进行非线性微分反馈控制有

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A - (B+1)x + x^2y + p\cos\omega t - U \\ \frac{dy}{dt} = Bx - x^2y \end{cases}$$

式子中 $U = k \frac{dx}{dt}$ 为微分控制项,它犹如阻尼器,当 $\frac{dx}{dt} > 0$ 时, U 为负阻尼;当 $\frac{dx}{dt} < 0$ 时, U 为正阻尼;当 $\frac{dx}{dt} = 0$ 时, 阻尼消失。微分控制项可以使受迫 Brusselator 模型趋于稳定。

随机参数受迫 Brusselator 模型控制系统可以改写为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A - (\bar{B} + \sigma\xi + 1)x + \\ x^2y + p\cos\omega t - \\ k[(\bar{B} + \sigma\xi)x - x^2y] \\ \frac{dy}{dt} = (\bar{B} + \sigma\xi)x - x^2y \end{cases} \quad (17)$$

经正交展开逼近后,受控的随机参数受迫 Brusselator 模型(17)约化为如下等价的确定性系统

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_0(t) = -(\bar{B}k + \bar{B} + 1)x_0 + (k+1)X_0 - \\ \frac{1}{2}(k+1)\sigma x_1 + A + p\cos\omega t \\ \frac{d}{dt}y_0(t) = \bar{B}x_0 + \frac{1}{2}\sigma x_1 - X_0 \\ \dots\dots \\ \frac{d}{dt}x_4(t) = -(\bar{B}k + \bar{B} + 1)x_4 + (k+ \\ 1)X_4 - \frac{1}{2}(k+1)\sigma x_3 \\ \frac{d}{dt}y_4(t) = \bar{B}x_4 + \frac{1}{2}\sigma x_3 - X_4 \end{cases} \quad (18)$$

随着 k 的取值不同,在足够长的时间里观察,如果它形成了一条稳定的闭合轨线,就说明受控系统被稳定在了某一条不稳定的周期轨道上。

根据控制方法进行数值模拟,图 3(a) - (b) 给出了控制结果.当控制强度 $k = -0.01$ 时,受控的随机参数受迫 Brusselator 模型的相轨线形成了一条稳定的闭合轨线,说明受控的等价确定性受迫 Brusselator 模型被稳定在了某一条不稳定的周期轨道上,如图 3(a) 所示;当控制强度 $k = -1$ 时受控的等价确定性受迫 Brusselator 模型被控制到稳定的周期一轨道上,如图 3(b) 所示。

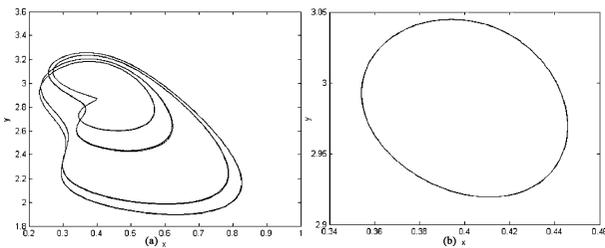


图3 被控制后的相轨图 (a) $k = -0.01$, (b) $k = -1$

Fig.3 Phase track charts of controlled equivalent deterministic system when (a) $k = -0.01$, (b) $k = -1$

结果表明,设计的微分反馈控制器能够将等价确定性受迫 Brusselator 模型控制在某一条不稳定的周期轨道上,选择适当的 k 可以使得受控系统最终演化为周期解,从而将其稳定在混沌态无穷多个周期轨道之一。

3 结论

本文考察了随机参数服从拱形分布的受迫 Brusselator 模型的微分反馈控制.由于等效系统是与原系统的均方残差为极小的一种加权平均近似,

所以本文借助 Chebyshev 多项式近似,使原随机参数系统被转化为等效确定性非线性系统,运用等效确定性系统的控制来研究随机参数系统的控制问题.采用非线性反馈控制法设计了微分反馈控制器,使得混沌状态的等价的确定性受迫 Brusselator 被稳定在了某一条不稳定的周期轨道上.数值结果表明所用方法在等价的确定性受迫 Brusselator 模型上是有效可行的。

参 考 文 献

- 1 Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 1990, 64: 421 ~ 465
- 2 Cuomo K M, Oppenheim A V. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Physical Review Letters*, 1993, 71: 65 ~ 68
- 3 林美丽,袁正中. 带有不确定的不同超混沌系统的同步及其在保密通信中的应用. *动力学与控制学报*, 2009, 7(3): 239 ~ 244 (Lin M L, Yuan Z G. Synchronization between two different hyperchaotic systems with uncertainties and its application to secure communications. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(3): 239 ~ 244 (in chinese))
- 4 Grabee I. Modeling of chaos by a self-organizing neural network. *Internet Conf. on Artificial Neural Network*, 1991
- 5 Zak, M. Terminal Chaos for Information Processing in Neurodynamics. *Biological Cybernetics*, 1991, 64: 343 ~ 351
- 6 Tsuda I. Chaotic itinerancy as a dynamical basis of hermeneutics in brain and mind. *World Futures*, 1991, 32: 167 ~ 184
- 7 Parisi G. Asymmetric neural network and the process of learning. *Journal of Physical A: Mathematical and General*, 1986, 19: 675 ~ 680
- 8 陈玲莉,谭宁,黎红岗,梁欧. 改进遗传神经网络控制混沌运动的研究. *动力学与控制学报*, 2009, 7(1): 24 ~ 28 (Chen L L, Tan L, Li H G, Liang O. Study of chaos control with one improved genetic neural network. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(1): 24 ~ 28 (in chinese))
- 9 Chen G R, Dong X N. Control of chaos-a. Survey, Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control, 1993
- 10 Jackson E A. On the control of complex dynamic systems. *Physica D*, 1999, 50: 341 ~ 366

- 11 Jackson E A, Hubler A W. Periodic entrainment of chaotic logistic map dynamics. *Physica D*, 1990, 44(3): 407 ~ 420
- 12 Jackson E A, Kodozeorgiou A. Entrainment and migration controls of two-dimensional maps. *Physica D*, 1991, 54(3): 253 ~ 265
- 13 Hunt E R. Stabilizing high-period orbits in a chaotic system; the diode resonator. *Phy. Rev. Lett.*, 1991, 67: 1953 ~ 1955
- 14 Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys. Lett. A*, 1992, 170: 421 ~ 428
- 15 Fowler T B. Application of stochastic control techniques to chaotic nonlinear systems. *IEEE Trans. on Auto. Contr.*, 1989, 34: 201 ~ 205
- 16 Hubrman B A, Lumer E. Dynamics of adaptive systems. *IEEE Trans: Circuits and Systems*, 1990, 37: 547 ~ 549
- 17 余龙华, 柳贵东, 施晓红. 磁悬浮系统的 HOPF 分岔自适应控制的研究. *动力学与控制学报*, 2006, 4(1): 54 ~ 58 (Yu L H, Liu G D, Shi X H. Adaptive control of maglev system according to Hopf bifurcation. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(1): 54 ~ 58 (in Chinese))
- 18 单梁, 李军, 王执铨. 参数不确定 Liu 混沌系统的自适应同步. *动力学与控制学报*, 2006, 4(4): 338 ~ 343 (Shan L, Li J, Wang Z Q. Adaptive synchronization of Liu chaotic system with uncertain parameters. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(4): 338 ~ 343 (in Chinese))
- 19 Maciej, Ogorzalek J. Taming chaos: part-control. *Fundamental Theory and Application*, 1993, 40: 700 ~ 706
- 20 Leone F, Michele G. Experimental evidence of suppression of chaos by resonant parametric perturbations. *Phys. Rev. A*, 1992, 43(12): 6483 ~ 6487
- 21 马少娟, 徐伟, 李伟, 靳艳飞. 基于 Chebyshev 多项式逼近的随机 van der Pol 系统的倍周期分岔分析. *物理学报*, 2005, 54: 3508 ~ 3513 (Ma S J, Xu W, Li W, Jin Y F. Period-doubling bifurcation analysis of stochastic van der Pol system via Chebyshev polynomial approximation. *Acta Phys. Sin.*, 2005, 54: 3508 ~ 3513 (in Chinese))
- 22 吴存利, 马少娟, 孙中奎, 方同. 随机参数 Duffing 系统中的随机混沌及其延迟反馈控制. *物理学报*, 2006, 55: 6253 ~ 6260 (Wu C L, Ma S J, Sun Z K, Fang T. Stochastic chaos in stochastic Duffing systems and its control by delayed feedback. *Acta Phys. Sin.*, 2006, 55: 6253 ~ 6260 (in Chinese))
- 23 Kamech E. A Guide to Maple. New York: Springer, 1999

DIFFERENTIAL FEEDBACK CONTROL IN RANDOM PARAMETER MODEL OF FORCED BRUSSELATOR*

Zhao Tingting Ma Shaojuan

(School of Information and Computation Sciences, Northern University for Nationalities, Yinchuan 750021, China)

Abstract Differential feedback control in random parameter model of forced Brusselator was considered. First, this model was transformed into its equivalent deterministic non-linear systems by the Chebyshev polynomial approximation. Then, a non-linear differential feedback controller was designed in order to make the chaotic model of forced Brusselator stable in a certain unstable periodic orbit. Numerical results show the effectiveness of the method.

Key words orthogonal polynomial approximation, random parameter, model of forced Brusselator, non-linear differential feedback control