

# 含不同时滞项的双稳系统中平均首次穿越时间的研究

张斌

(山西煤炭职业技术学院机电工程系,太原 030031)

**摘要** 研究了乘性噪声和加性噪声共同作用下含有两种不同时滞项的双稳系统中的平均首次穿越时间. 首先通过近似方法得到了平均首次穿越时间的解析式, 然后研究了乘性噪声强度、时滞量及噪声关联强度对平均首次穿越时间的影响. 当噪声关联强度取正值时, 平均首次穿越时间  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  是乘性噪声强度及两种时滞量的非但调函数, 是噪声关联强度的单调递增函数. 包含在确定力与振荡力中的时滞量分别影响  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  的最大值及对应的噪声强度. 平均首次穿越时间  $T_2(x_+ \rightarrow x_-)$  是包含在确定力中的时滞量的非单调函数, 是乘性噪声强度、另一种时滞量及噪声关联强度的单调递减函数.

**关键词** 平均首次穿越时间, 时滞, 乘性噪声, 加性噪声

## 引言

在真实的物理系统中, 噪声是普遍存在的. 由于信息, 能量等的传递都需要时间, 这就不可避免的需要研究含有时滞项的随机动力系统的性质. 由于时滞项的存在, 随机动力系统的输出显然不具有马尔科夫性, 因此不能直接写出与 Langevin 方程对应的 FPK 方程. 带时滞项的随机微分方程首先由 Guillozic 等<sup>[1,2]</sup> 提出, 并且给出了如何根据含有时滞项的 Langevin 方程得到标准的 FPK 方程. 随后 Frank<sup>[3,4]</sup> 又用扩展相空间的方法推导出与含有时滞项的 Langevin 方程对应的标准 FPK 方程, 并用摄动理论求出了含时滞项的随机动力系统输出的平稳概率密度分布及其统计特征. 正是因为随机性和时滞性的普遍存在, 对含时滞项的随机动力系统的研究引起越来越多的注意.

大多数的物理系统除存在加性噪声外还存在乘性噪声, 即系统的内噪声和外噪声. 而且两种噪声之间往往还会有不同程度的相关性, 研究发现噪声之间的关联强度会影响随机动力系统的性质<sup>[5,6]</sup>. 噪声诱导的逃逸问题同样是各个领域的研究热点, 比如光学双稳器件的设计就不可避免的需要处理量子噪声作用下的平均首次穿越时间. 在生物系统中, 利用平均首次穿越时间可以分析基因转录调节系统中蛋白质浓度的变化<sup>[7]</sup>, 还可以分析噪

声对癌细胞数量变化的影响<sup>[8]</sup>. 目前, 已经有一些关于不含时滞项或含有一种时滞项的系统中平均首次穿越时间的研究文献 [9, 10]. Gu 等<sup>[11]</sup> 研究发现, 不同类型的时滞项对随机动力系统输出的平稳概率分布及其统计特征所起的作用是不同的. 本文研究含有两种不同类型时滞项的随机动力系统在相关联的乘性噪声和加性噪声共同作用下的平均首次穿越时间, 是文献 [11] 研究内容的继续. 通过解析分析和数值模拟, 揭示噪声参数及不同类型的时滞项对平均首次穿越时间的影响.

## 1 含不同时滞项的随机动力系统

噪声作用下含有不同类型时滞项的双稳系统的 Langevin 方程描述如下

$$\dot{x}(t) = -x^3(t) + x(t - \alpha) + x(t - \beta)\eta(t) + \xi(t) \quad (1)$$

其中,  $\alpha > 0$  和  $\beta > 0$  分别表示确定势函数和振荡力中的时滞量,  $\eta(t)$  和  $\xi(t)$  是相关联的高斯白噪声, 其统计特性为

$$\begin{aligned} \langle \eta(t) \rangle &= \langle \xi(t) \rangle = 0, \langle \eta(t) \eta(t') \rangle = 2Q\delta(t - t'), \\ \langle \xi(t) \xi(t') \rangle &= 2M\delta(t - t'), \\ \langle \eta(t) \xi(t') \rangle &= 2\lambda \sqrt{QM}\delta(t - t') \end{aligned} \quad (2)$$

$Q, M$  分别为乘性噪声和加性噪声的噪声强度,  $\lambda$  表示两种噪声之间的关联强度, 且  $|\lambda| \leq 1$ . 方程 (1) 中含有时滞项, 表明这一扩散过程不具有马

尔科夫性,不能直接写出与(1)对应的 FPK 方程. 根据处理含有时滞项 Langevin 方程的方法<sup>[1-4]</sup>及文献[12]中已有的结果,(1)式可等价转化为

$$\frac{dx}{dt} = h(x) + G_{\text{eff}}(x)\Gamma(t) \quad (3)$$

其中

$$G_{\text{eff}}(x) = \sqrt{Qg^2(x) + 2\lambda g(x)\sqrt{QM} + M}, \langle \Gamma(t) \rangle = 0,$$

$$\langle \Gamma\eta(t)\Gamma(t') \rangle = 2\delta(t-t') = 0, h(x) = \varepsilon(-x^3 + x),$$

$$g(x) = vx, \varepsilon = 1 + \alpha, v = 1 + \beta \quad (4)$$

与(3)式对应的标准 FPK 方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[V(x)p] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[G_{\text{eff}}^2(x)p] \quad (5)$$

其中

$$V(x) = h(x) + G_{\text{eff}}\frac{dG_{\text{eff}}}{dt} \quad (6)$$

由(5)式得到系统(1)输出的概率密度函数为

$$p(x) = N[G(x)]^{-1} \exp\left(-\frac{\bar{U}(x)}{M}\right) \quad (7)$$

其中  $N$  为归一化常数,  $\bar{U}(x)$  为广义势函数  $\bar{U}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{-Mh(y)}{G_{\text{eff}}^2(y)} dy$ , 计算可以得到

$$\begin{aligned} \bar{U}(x) = & \phi_1 x + \phi_2 x^2 + \phi_3 \ln(v^2 x^2 Q + 2\lambda vx \sqrt{QM} \\ & + M) + \phi_4 \arctan\left(\frac{xv\sqrt{Q} + \lambda\sqrt{M}}{\sqrt{M(1-\lambda^2)}}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_1 = & -\frac{2\varepsilon\lambda M\sqrt{QM}}{v^3 Q^2}, \phi_2 = \frac{\varepsilon M}{2Qv^2} \\ \phi_3 = & -\frac{\varepsilon M}{2Qv^2}\left(1 + \frac{M}{Qv^2} + \frac{4M\lambda^2}{Qv^2}\right) \\ \phi_4 = & \frac{\varepsilon M}{v\sqrt{1-\lambda^2}}\left(\frac{3\lambda M}{v^3 Q^2} + \frac{\lambda}{vQ} - \frac{4\lambda^3 M}{v^3 Q^2}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

## 2 平均首次穿越时间

根据(5)式,得到两势阱之间的转移速率为<sup>[12]</sup>

$$W_{\pm} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{h'(x_{\pm})|h'(x_0)|} \exp\left(\frac{\bar{U}(x_{\pm}) - \bar{U}(x_0)}{M}\right) \quad (10)$$

$x_{\pm}$  和  $x_0$  分别表示确定性势阱的稳定平衡点和不稳定平衡点,  $W_{+}$  和  $W_{-}$  分别表示由  $x_{+}$  到  $x_{-}$  和  $x_{-}$  到  $x_{+}$  的转移速率. 根据(4)式解  $h(x) = 0$  得到确定性势阱稳定平衡点为  $x_{\pm} = \pm 1$ , 不稳定平衡点为  $x_0 = 0$ . 两势阱之间的转移速率与同一方向的平均首次

穿越时间互为倒数,因此得到两个不同方向平均首次穿越时间为

$$T_1(x_{-} \rightarrow x_{+}) = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{(-1+3x_{-}^2)(-1+3x_0^2)}} \exp\left(\frac{\bar{U}(x_0) - \bar{U}(x_{-})}{M}\right) \quad (11)$$

$$T_2(x_{+} \rightarrow x_{-}) = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{(-1+3x_{+}^2)(-1+3x_0^2)}} \exp\left(\frac{\bar{U}(x_0) - \bar{U}(x_{+})}{M}\right) \quad (12)$$

$T_1(x_{-} \rightarrow x_{+})$  和  $T_2(x_{+} \rightarrow x_{-})$  分别表示由  $x_{-}$  到  $x_{+}$  和由  $x_{+}$  到  $x_{-}$  的平均首次穿越时间.

根据(4)式和(8)式发现,

$$G_{\text{eff}}(x_{\pm}, \lambda) = G_{\text{eff}}(x_{\mp} - \lambda), \bar{U}(x_{\mp}, \lambda) = \bar{U}(x_{\mp} - \lambda) \quad (13)$$

将(13)式分别代入(11)、(12)式,得到

$$T_1(\lambda) = T_2(-\lambda), T_2(\lambda) = T_1(-\lambda) \quad (14)$$

因此当噪声相关系数  $\lambda < 0$  时不同方向的平均穿越时间等于绝对值与其相等的正噪声相关系数,对应相反方向的平均首次穿越时间. 因此,本文只考虑  $\lambda > 0$  的情况. 以下根据(11)、(12)两式,讨论乘性噪声强度,时滞量及噪声关联强度对平均首次穿越时间的影响.

图1和图2分别给出了不同方向的平均首次穿越时间作为乘性噪声强度的函数随不同时滞量  $\alpha$  变化的曲线. 图1表明平均首次穿越时间  $T_1(x_{-} \rightarrow x_{+})$  随乘性噪声强度  $Q$  的增加呈现非单调关系. 当  $Q$  小于 0.05 时,  $T_1(x_{-} \rightarrow x_{+})$  随着  $Q$  的增大而单调增加,当  $Q$  大于 0.05 时,  $T_1(x_{-} \rightarrow x_{+})$  随着  $Q$  的增大而单调减小,  $\ln T_1 - Q$  曲线有类似于“共振”的现象. 当  $Q$  小于 1.8 时,平均首次穿越时间  $T_1(x_{-} \rightarrow x_{+})$  随时滞量  $\alpha$  越大而增大,当  $Q$  大于 1.8 时,平均首次穿越时间  $T_1(x_{-} \rightarrow x_{+})$  随  $\alpha$  的增大而减小. 这说明噪声强度较小时,平均首次穿越时间  $T_1(x_{-} \rightarrow x_{+})$  与时滞量  $\alpha$  成正比,当噪声强度较大时,平均首次穿越时间  $T_1(x_{-} \rightarrow x_{+})$  与时滞量  $\alpha$  成反比.

图1还表明,对应与不同时滞量  $\alpha$  的平均首次穿越时间  $T_1(x_{-} \rightarrow x_{+})$  都是在  $Q = 0.05$  时取得峰值,且时滞量  $\alpha$  越大,  $T_1(x_{-} \rightarrow x_{+})$  的峰值也越大. 因此可以断定时滞量  $\alpha$  影响的是平均首次穿越时间  $T_1$

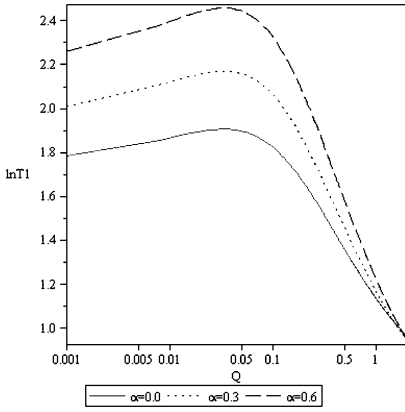


图1 平均首次穿越时间  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  作为乘性噪声强度  $Q$  的函数随不同时滞量  $\alpha$  变化的曲线 ( $M=0.1, \beta=0.1, \lambda=0.4$ )

Fig. 1 The mean first - passage time  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  as a function of the multiplicative noise intensity  $Q$  with different time

delay  $\alpha$  ( $M=0.1, \beta=0.1, \lambda=0.4$ )

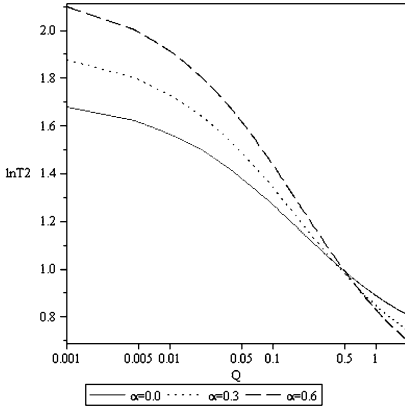


图2 平均首次穿越时间  $T_2(x_+ \rightarrow x_-)$  作为乘性噪声强度  $Q$  的函数随不同时滞量  $\alpha$  变化的曲线 ( $M=0.1, \beta=0.1, \lambda=0.4$ )

Fig. 2 The mean first - passage time  $T_2(x_+ \rightarrow x_-)$  as a function of the multiplicative noise intensity  $Q$  with different time

delay  $\alpha$  ( $M=0.1, \beta=0.1, \lambda=0.4$ )

$(x_- \rightarrow x_+)$  的峰值大小, 而不影响与峰值所对应的乘性噪声强度  $Q$  的大小. 图2表明平均首次穿越时间  $T_2(x_+ \rightarrow x_-)$  随着乘性噪声强度的增加而单调减小, 当  $Q$  小于 0.5 时, 平均首次穿越时间  $T_2(x_+ \rightarrow x_-)$  随时滞量  $\alpha$  的增大而增大. 当  $Q$  大于 0.5 时, 平均首次穿越时间  $T_2(x_+ \rightarrow x_-)$  随时滞量  $\alpha$  的增大而越小. 图1和图2说明, 不同穿越方向的平均首次穿越时间  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  和  $T_2(x_+ \rightarrow x_-)$  与时滞量  $\alpha$  都呈现非线性关系.

图3和图4分别给出了不同方向的平均首次穿越时间作为乘性噪声强度的函数随不同时滞量  $\beta$  变化的曲线. 图3表明时滞量  $\beta$  不同时, 与  $T_1(x_-$

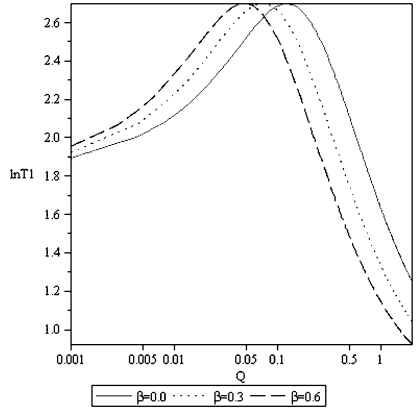


图3 平均首次穿越时间  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  作为乘性噪声强度  $Q$  的函数随不同时滞量  $\beta$  变化的曲线 ( $M=0.1, \alpha=0.1, \lambda=0.7$ )

Fig. 3 The mean first - passage time  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  as a function of the multiplicative noise intensity  $Q$  with different time

delay  $\beta$  ( $M=0.1, \alpha=0.1, \lambda=0.7$ )

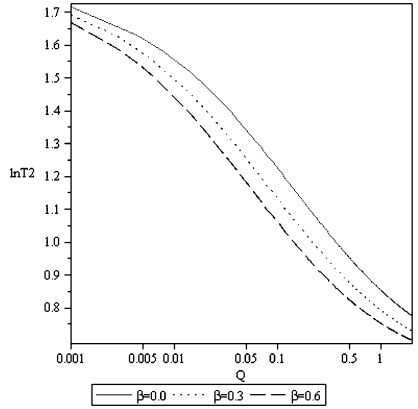


图4 平均首次穿越时间  $T_2(x_- \rightarrow x_+)$  作为乘性噪声强度  $Q$  的函数随不同时滞量  $\beta$  变化的曲线 ( $M=0.1, \alpha=0.1, \lambda=0.7$ )

Fig. 4 The mean first - passage time  $T_2(x_- \rightarrow x_+)$  as a function of the multiplicative noise intensity  $Q$  with different time

delay  $\beta$  ( $M=0.1, \alpha=0.1, \lambda=0.7$ )

$\rightarrow x_+)$  的峰值所对应的乘性噪声强度  $Q$  的大小不同. 时滞量  $\beta$  越大, 与  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  的峰值所对应的乘性噪声强度  $Q$  值越小. 时滞量  $\beta$  不同时,  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  峰值的大小相同. 因此可以断定, 在  $\ln T_1 - Q$  曲线图上, 时滞量  $\beta$  影响  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  取峰值时对应乘性噪声强度  $Q$  的大小, 即峰值的位置, 而不影响  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  峰值的大小. 图3还表明, 平均首次穿越时间  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  与时滞量  $\beta$  之间是非单调性关系. 当  $Q$  值较小时, 平均首次穿越时间  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  与时滞量  $\beta$  成正比, 当  $Q$  值较大时, 平均首次穿越时间  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  与时滞量  $\beta$  成反比. 图4表明平均首次穿越时间  $T_2(x_+ \rightarrow x_-)$  与时滞量  $\beta$  之间具有单调性关系, 即  $T_2(x_+ \rightarrow x_-)$  随  $\beta$  的增大而单调减

小.

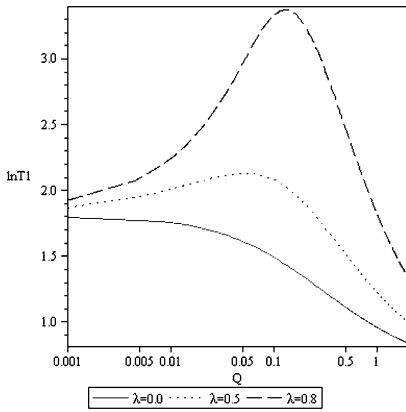


图5 平均首次穿越时间  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  作为乘性噪声强度  $Q$  的函数随不同噪声关联强度  $\lambda$  变化的曲线 ( $M=0.1, \alpha=0.1, \beta=0.1$ )

Fig. 5 The mean first - passage time  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  as a function of the multiplicative noise intensity  $Q$  with different noises coupling strength  $\lambda$  ( $M=0.1, \alpha=0.1, \beta=0.1$ )

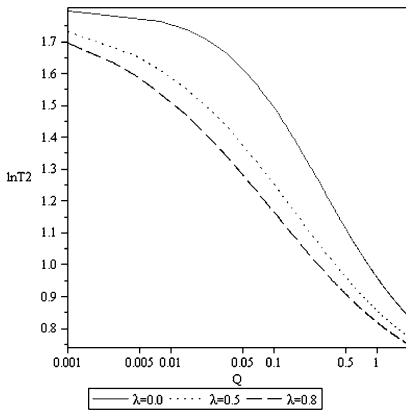


图6 平均首次穿越时间  $T_2(x_+ \rightarrow x_-)$  作为乘性噪声强度  $Q$  的函数随不同噪声关联强度  $\lambda$  变化的曲线 ( $M=0.1, \alpha=0.1, \beta=0.1$ )

Fig. 6 The mean first - passage time  $T_2(x_+ \rightarrow x_-)$  as a function of the multiplicative noise intensity  $Q$  with different noises coupling strength  $\lambda$  ( $M=0.1, \alpha=0.1, \beta=0.1$ )

图5和图6分别给出了不同方向的平均首次穿越时间作为乘性噪声强度的函数随不同噪声关联强度  $\lambda$  变化的曲线. 图5表明  $\lambda$  取值越大, 平均首次穿越时间  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  也越大, 即平均首次穿越时间  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  与噪声相关系数  $\lambda$  成正比.  $\lambda$  取值不同时, 可以看到  $\ln T_1 - Q$  的曲线上“共振”的强弱程度不同,  $\lambda$  取值越大“共振”状态越明显, 当  $\lambda=0$  时  $\ln T_1 - Q$  曲线不存在“共振”现象, 因此可以断定噪声相关系数  $\lambda$  影响  $\ln T_1 - Q$  曲线“共振”程度的强弱. 图6表明平均首次穿越时间  $T_2(x_+ \rightarrow x_-)$  随着  $\lambda$  的增大而减小, 即  $T_2(x_+ \rightarrow x_-)$

与  $\lambda$  成反比.

### 3 结论

本文研究了乘性噪声和加性噪声共同激励下含不同时滞项的双稳系统中的平均首次穿越时间. 研究表明, 平均首次穿越时间与穿越的方向有关. 当噪声关联强度  $\lambda$  为负值时, 平均首次穿越时间  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  等于对应的  $\lambda$  为正值时的平均首次穿越时间  $T_2(x_+ \rightarrow x_-)$ . 当噪声关联强度  $\lambda$  取正值时: 平均首次穿越时间  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  与乘性噪声强度  $Q$ 、Langevin 方程中确定性势函数中的时滞量  $\alpha$  及振荡力中的时滞量  $\beta$  之间均呈现非单调性关系, 与噪声关联强度  $\lambda$  之间呈现单调递增关系. 时滞量  $\alpha$  影响  $\ln T_1 - Q$  曲线上峰值的大小, 时滞量  $\beta$  影响峰值的位置, 噪声关联强度  $\lambda$  影响“共振”的程度. 平均首次穿越时间  $T_2(x_+ \rightarrow x_-)$  与时滞量  $\alpha$  是非单调性关系, 与乘性噪声强度  $Q$ 、时滞量  $\beta$  及噪声关联强度  $\lambda$  之间均呈现单调递减关系.

### 参 考 文 献

- Guillouicz S, Heureux I L, Longtin A. Small delay approximation of stochastic delay differential equations. *Phys. Rev. E*, 1999, 59:3970 ~ 3982
- Guillouicz S, Heureux I L, Longtin A. Rate processes in a delayed, stochastically driven, and overdamped system. *Phys. Rev. E*, 2000, 61:4906 ~ 4914
- Frank T D. Analytical results for fundamental time-delayed feedback systems subjected to multiplicative noise. *Phys. Rev. E*, 2004, 69:061104
- Frank T D. Delay Fokker-Planck equations, perturbation theory, and data analysis for nonlinear stochastic systems with time delays. *Phys. Rev. E*, 2005, 71:031106
- Madureira A J R, Hänggi P, Wio H S. Giant suppression of the activation rate in the presence of correlated white noise sources. *Phys. Lett. A*, 1996, 217, 248 ~ 252
- Tessone C J, Wio H S, Hänggi P. Stochastic resonance driven by time-modulated correlated white noise sources. *Phys. Rev. E*, 2000, 62:4623 ~ 4632
- 王参军, 梅冬成. 色交叉关联噪声对基因转录调节系统的影响. *物理学报*, 2008, 57:3983 ~ 3988 (Wang C J, Mei D C. Effect of colored cross-correlated noise on the gene transcriptional regulatory system. *Acta Phys. Sin.*, 2008, 57:3983 ~ 3988 (in chinese))

- 8 杨建华,刘先斌. 色交叉关联噪声作用下癌细胞增长系统的平均首通时间. 物理学报, 2010, 59: 3727 ~ 3732 (Yang J H, Liu X B. The mean first-passage time for a cancer development system driven by colored cross-correlated noises. *Acta Phys. Sin.*, 2010, 59: 3727 ~ 3732 (in chinese))
- 9 靳艳飞,徐伟,马少娟,李伟. 非对称双稳系统中平均首次穿越时间的研究. 物理学报, 2005, 54: 3480 ~ 3486 (Jin Y F, Xu W, Ma Sh J, Li W. The mean first-passage time for an asymmetric bistable system driven by multiplicative and additive noise. *Acta Phys. Sin.*, 2005, 54: 3480 ~ 3486 (in Chinese))
- 10 董小娟,徐伟. 含时滞项的双稳系统中平均首次穿越时间的研究. 动力学与控制学报, 2007, 05: 298 ~ 301 (Dong X J, Xu W. The mean first-passage time for a bistable system with time-delayed feedback. *Journal Dynamics and Control*, 2007, 05: 298 ~ 301 (in chinese))
- 11 Gu X, Zhu S, Wu D. Two different kinds of time delays in a stochastic system. *Eur. Phys. J. D*, 2007, 42 461 ~ 466
- 12 胡岗. 随机力与非线性系统. 上海: 上海科技教育出版社, 1994 (Hu G. Stochastic Forces and Nonlinear Systems. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1994 (in Chinese))

## THE MEAN FIRST-PASSAGE TIME FOR A BISTABLE SYSTEM WITH DIFFERENT KINDS OF TIME DELAYS

Zhang Bin

(Electromechanical Engineering Department, Shanxi Vocational and Technical College of Coal, Taiyuan 030031, China)

**Abstract** This paper, under the excitations of correlated multiplicative and additive noises, the mean first-passage times (MFPTs) in a bistable system with two different kinds of time delays are investigated. First, based on an approximated method, the analytical expressions of the MFPTs are obtained. Then, the effects of the multiplicative noise intensity, the delays and the noise coupling strength on the MFPTs are studied. For the positive coupling strength, the MFPT  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$  is a nonlinear function of the multiplicative noise intensity and the two delays, but an increasing function of the noise coupling strength. Moreover, the delays contained in the determined and random forces respectively influence the maximum and the corresponding noise level on  $T_1(x_- \rightarrow x_+)$ . The MFPT  $T_2(x_+ \rightarrow x_-)$  is a nonlinear function of the delay that contained in the determined force, but a decreasing function of the multiplicative noise intensity, the other kind of delay and the noise coupling strength.

**Key words** mean first-passage time, time delay, multiplicative noise, additive noise