第 8 卷第 4 期 2010 年 12 月
1672-6553/2010/08(4)/346-4

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 8 No. 4
Dec. 2010

离散分段线性时滞正系统的稳定性分析*

翟世东[1,2]　杨晓松[1]

（1. 华中科技大学数学与统计学院，武汉　430074）（2. 华中科技大学电子与信息工程系，武汉　430074）

摘要　研究了离散的切换线性时滞正系统的稳定性问题. 通过运用切换线性余正（copositive）Lyapunov 泛函和共同线性余正（copositive）Lyapunov 泛函分别得到了关于平衡点全局渐近稳定性的线性规划（LP）和线性矩阵不等式（LMI）判别法则.

关键词　切换正系统，　切换线性余正 Lyapunov 泛函，　时滞，　共同线性余正 Lyapunov 泛函，　全局渐近稳定性

引 言

分段线性系统在工程科学中有广泛的应用[1]. 首先，由于实际系统中的物理限制，在各个单元之间切换的现象是经常发生的，如饱和系统、继电器系统、电子电路中的二极管和晶体管的模型等都是分段线性的. 其次，在工程应用中，分段线性系统比线性系统可以更好的近似非线性系统.

在现实世界中有很多物理系统具还有这样的特点，它们的状态是非负的，例如：动物的数量、绝对温度和物质的密度等等. 这样的系统一般称为正系统[2]，它们在很多领域中有重要应用，例如：生物、通讯、概率、经济等等[2]. 此外，很多实际系统，例如：工程、通讯、网络、生物系统等等[3][4][5]中经常会发生时滞的情况，而且会出现不同系统相互切换的现象[4]，那么就会出现这样的系统，即切换时滞正系统. 其中最简单的就是切换线性时滞正系统，在本文中，我们考虑一类特殊的分段线性系统，即具有时滞的切换线性系统，研究其在任意切换信号下的渐近稳定性.

当考虑正系统的稳定性时，很自然的利用线性余正（copositive）Lyapunov 函数. 线性余正（copositive）Lyapunov 函数有以下事实：对于一个正系统，如果存在一个 Lyapunov 函数，当在正象限时，是正定的和它的沿系统轨线的微分是负定的（对连续时间系统）或沿系统轨线的差分是负定的（对离散时间系统）. 文献[8]利用切换线性余正（copositive）Lyapunov 函数研究了切换线性正系统，并得到了很好的结果，那么对于切换时滞正系统是否也有类似的结果，这是需要解决的问题. 对于一般的切换时滞系统，文献[9]利用切换 Lyapunov 泛函很好的解决了稳定性问题. 于是很自然的就会产生以下问题（1）对于切换时滞正系统，是否存在相应的切换余正（copositive）Lyapunov 泛函.（2）如果存在，怎样构造这样的切换余正（copositive）Lyapunov 泛函呢？对于离散的切换线性时滞正系统，本文给出了相应的答案.

1　符号说明

$A \geq 0$（≤ 0）表示矩阵 A 的所有元素都是非负的（非正的）；$A > 0$（< 0）表示矩阵 A 的所有元素都是正的（负的）；$v \geq 0$（$v \leq 0$）表示向量 v 的所有元素都是非负的（非正的）；$v > 0$（$v < 0$）表示向量 v 的所有元素都是正的（负的）；$\mathbb{R}^n$（$\mathbb{R}^n_+$）表示 n 维实（正的）向量空间；$\mathbb{R}^{n\times m}$ 表示维的所有实矩阵的集合；$\mathbb{N}$ 表示；$\mathbb{N}_0$ 表示 $\{0, 1, \cdots\}$.

2　离散切换线性时滞正系统的稳定性

考虑如下时滞系统

$$x(t+1) = Ax(t) + Bx(t-h) \tag{1}$$

相关的初始状态函数

$$x(\theta) = \psi(\theta), \theta \in \{-h, -h+1, \cdots, 0\} \doteq \Delta \tag{2}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$，$A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 为常数矩阵，$h \in \mathbb{N}$ 为未知

2010-07-15 收到第 1 稿，2010-08-21 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目（10972082）

的时间延迟.

让 $x_t \doteq \{x(t-h), x(t-h+1), \cdots, x(t)\}, t \in \mathbb{N}$ 为状态向量,$D(\Delta, \mathbb{R}^n)$ 为这样的函数空间,它将离散区间 Δ 映射到 $\mathbb{R}^n$,且 $\|\phi\|_h = \sup_{\theta \in \Delta} \|\phi(\theta)\|$ $(\phi(\theta) \in D, \phi(\theta): \Delta \to \mathbb{R}^n)$ 为 D 中元素 ϕ 的范数.此处,$D^\gamma = \{\phi \in D: \|\phi\|_h < \gamma, \gamma \in \mathbb{R}\} \subset D$. 对初始条件,假设有以下条件成立:

$\|\psi\|_h \in D^\infty$,

显然有 $x_t: \Delta \to D, x_t(\theta) = x(t+\theta), x(t) = x(t, \psi)$.

定义 1　系统(1)-(2)是正的当且仅当对任意的初始条件 $x_0 = \psi(\cdot) \geq 0$,相应的轨线 $x(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{N}$.

引理 1[7]　系统(1)-(2)是正的当且仅当 $A \geq 0, B \geq 0$.

定义 2　系统(1)-(2)的平衡状态 $x=0$,如果对任意初始条件 $\psi(\theta) \in D^\infty$ 满足

$$\lim_{t \to \infty}(t, \psi) = 0, \tag{3}$$

则 $x=0$ 是全局渐进稳定的.

定理 1[10]　如果存在正数 α, β 和连续泛函 $V: D \to R$ 满足

$$0 < V(x_1) \leqslant \alpha \|x_t\|_h, \forall x_t \neq 0, V(0) = 0 \tag{4}$$

$$\Delta V(x_t) \doteq V(x_{t+1}) - V(x_t) \leqslant -\beta \|x(t)\| \tag{5}$$

$\forall x_t \in D$ 满足(1),那么系统(1)-(2)的平衡状态 $x=0$ 是全局渐进稳定的.

注 1　$\|x_t\|_h$ 表示函数空间 $D(\Delta, \mathbb{R}^n)$ 中的范数,$\|x(t)\|$ 表示欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的范数,由于各种范数是等价的,所以我们用如下定义的范数:$\|x\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$,这里 x_k 为 $x \in \mathbb{R}^n$ 的第 k 个元素.

考虑如下切换线性时滞正系统

$$x(t+1) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}x(t-h), t \in \mathbb{N}_0,$$
$$x(\theta) = \psi(\theta) \geq 0, \theta \in \{-h, -h+1, \cdots, 0\} \doteq \Delta \tag{6}$$

其中 $x_t \doteq \{x(t-h), x(t-h+1), \cdots, x(t)\}, t \in \mathbb{N}$ 为状态变量,映射 $\sigma: \mathbb{N}_0 \to I$ 为切换信号,$I = \{1, 2, \cdots, m\}$ 为索引集. 子系统 i 被激活当且仅当 $\sigma(t) = i$. 在本文中,我们感兴趣的是切换信号为任意的情况,即在任意时刻 t,$\sigma(t)$ 能取集合中的任意值.

注 2　由引理 1,(6)的在任何切换下的轨线都在正象限中.

定义

$$\eta_i(t) = \begin{cases} 1, 如果\ \sigma(t) = i \\ 0, 其它. \end{cases} \tag{7}$$

于是(6)可以改写为

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)A_i x(t) + \sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)B_i x(t-h) = A(t)x(t) + B(t)x(t-h), t \in \mathbb{N}_0$$
$$x(\theta) = \psi(\theta) \geq 0, \theta \in \{-h, -h+1, \cdots, 0\} \doteq \Delta \tag{8}$$

这里 $A(t) = \sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)A_i, B(t) = \sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)B_i$.

本文要建立对(6)存在如下形式的切换线性余正(copositive)Lyapunov 泛函的一些充分必要条件

$$V(x_t) = x^T(t)\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)\lambda_i + \sum_{j=1}^{h}x^T(t-j)\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t-j)\mu_i \tag{9}$$

其中 $\lambda_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \cdots, \lambda_{in})^T \in \mathbb{R}^n_+, \mu_i = (\mu_{i1}, \mu_{i2}, \cdots, \mu_{in})^T \mathbb{R}^n_+$.

定义 $\alpha_1 = \max_{\forall (i,k) \in I \times \bar{n}}\{\lambda_{ik}\}, \alpha_2 = \max_{\forall (i,k) \in I \times \bar{n}}\{\mu_{ik}\}, \alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}, \bar{n} = \{1, 2, \cdots, n\}$,于是由(9)可得 $0 < V(x_t) \leqslant \alpha(h+1)\|x_t\|_h$.

定理 2　下面几个结论等价:

1)存在一个有形式(9)的 Lyapunov 泛函,它的差分是负定的,那么(6)是全局渐近稳定的.

2)(*LP* 问题)存在 $2m$ 个向量 $\lambda \in \mathbb{R}^n_+, \mu_i \in \mathbb{R}^n_+, i \in I$

满足

$$\varphi_{ij} < 0, \forall (i,j) \in I \times I;$$
$$\phi_{ijl} < 0, \forall (i,j,l) \in I \times I \times I \tag{10}$$

其中 $\varphi_{ij} = A_i^T\lambda_j + \mu_i - \lambda_i, \phi_{ijl} = B_i^T\lambda_j - \mu_l$.

3)(LMI 问题)存在 $2m$ 个对角矩阵

$P_i = \mathrm{diag}(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \cdots, \lambda_{in}) > 0, \forall i \in I; Q_i = \mathrm{diag}(\mu_{i1}, \mu_{i2}, \cdots, \mu_{in}) > 0, \forall i \in I$

满足 $\Theta_{ij} < 0, \forall (i,j) \in I \times I; T_{ijl} < 0, \forall (i,j,l) \in I \times I \times I$,

其中

$$\Theta_{ij} = \mathrm{diag}(\theta_{ij1}, \theta_{ij2}, \cdots, \theta_{ijn}), \theta_{ijk} = a_{ik}^T\lambda_j - \lambda_{ik} + \mu_{ik},$$
$$T_{ijl} = \mathrm{diag}(\beta_{ijl1}, \beta_{ijl2}, \cdots, \beta_{ijln}), \beta_{ijlk} = b_{ik}^T\lambda_j - \mu_{ik},$$

a_{ik} 为 A_i 的第 k 列,b_{ik} 为 B_i 的第 k 列.

证明 1)⇒2)假设存在一个有形式(9)的 Lyapunov 泛函,它的差分是负定的. 因此,

$\triangle V(x_t) = V(x_{t+1}) - V(x_t) = x^T(t+$

$$1)\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t+1)\lambda_i+\sum_{j=1}^{h}x^T(t+1-j)\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t+1-j)\mu_i-x^T(t)\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)\lambda_i-\sum_{j=1}^{h}x^T(t-j)\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t-j)\mu_i=x^T(t+1)\lambda(t+1)-x^T(t)\lambda(t)+x^T(t)\mu(t)-x^T(t-h)\mu(t-h)$$

其中

$$\lambda(t+1)=\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t+1)\lambda_i,\lambda(t)=\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)\lambda_i,$$

$$\mu(t)=\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)\mu_i,\mu(t-h)=\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t-h)\mu_i$$

现在考虑系统(8);于是有

$$\Delta V(x_t)=x^T(t+1)\lambda(t+1)-x^T(t)\lambda(t)+x^T(t)\mu(t)-x^T(t-h)\mu(t-h)=x^T(t)(A^T(t)\lambda(t+1)-\lambda(t)+\mu(t))+x^T(t-h)(B^T(t)\lambda(t+1)-\mu(t-h))<0 \quad (11)$$

由于对于任何切换信号上面不等式都成立,于是(11)对于如下特殊的切换也成立:(对任意 $t\in\mathbb{N}_0$ 和所有非零 $x\in\mathbb{R}_+^n$)

$$\eta_i(t)=1,\eta_{r\neq i}(t)=0;\eta_j(t+1)=1,$$

$$\eta_{r\neq j}(t+1)=0;\eta_l(t-h)=1,\eta_{r\neq l}(t-h)=0$$

因此,由(11)可得 $\Delta V(x_t)=x^T(t)(A_i^T\lambda_j+\mu_i-\lambda_i)+x^T(t-h)(B_i^T\lambda_j-\mu_l)<0$,对任意 $x(t),x(t-h)\in\mathbb{R}_+^n$ 都成立,所以有

$$\varphi_{ij}<0,\forall(i,j)\in I\times I;$$

$$T_{ijl}<0,\varphi(i,j,l)\in I\times I\times I$$

这里 $\varphi_{ij}=A_i^T\lambda_j+\mu_i-\lambda_i,\phi_{ijl}=B_i^T\lambda_j-\mu_l$.

2)⇒1)假设(10)成立,由(7)有 $\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)=\sum_{j=1}^{m}\eta_j(t+1)=\sum_{l=1}^{m}\eta_l(t-h)=1$,因此,$\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)\sum_{j=1}^{m}\eta_j(t+1)=1$,$\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)\sum_{l=1}^{m}\eta_l(t-h)\sum_{j=1}^{m}\eta_j(t+1)=1,\forall t\in\mathbb{N}_0$.

于是由(10)可得

$$\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)\sum_{j=1}^{m}\eta_j(t+1)(A_i^T\lambda_j+\mu_i-\lambda_i)<0,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)\sum_{l=1}^{m}\eta_l(t-h)\sum_{j=1}^{m}\eta_j(t+1)(B_i^T\lambda_j-\mu_i)<0,\forall t\in\mathbb{N}_0.$$

又,一方面

$$\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)\sum_{j=1}^{m}\eta_j(t+1)(A_i^T\lambda_j+\mu_i-\lambda_i)=\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)(A_i^T\lambda(t+1)-\lambda_i+\mu_i)=A^T(t)\lambda(t+1)-\lambda(t)+\mu(t),$$

$$\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)\sum_{l=1}^{m}\eta_l(t-h)\sum_{j=1}^{m}\eta_j(t+1)(B_i^T\lambda_j-\mu_l)=\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)\sum_{l=1}^{m}\eta_l(t-h)(B_i^T\lambda(t+1)-\mu_l)=\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)(B_i^T\lambda(t+1)-\mu(t-h))=B^T(t)\lambda(t+1)-\mu(t-h)$$

由上面两式可得

$$A^T(t)\lambda(t+1)-\lambda(t)+\mu(t)<0,$$

$$B^T(t)\lambda(t+1)-\mu(t-h)<0,$$

上面不等式组等价于对任意非零 $x(t),x(t-h)\in\mathbb{R}_+^n$ 有

$$x^T(t)(A^T(t)\lambda(t+1)-\lambda(t)+\mu(t))+x^T(t-h)(B^T(t)\lambda(t+1)-\mu(t-h))<0 \quad (12)$$

另一方面(12)的左边可以写为

$$x^T(t)(A^T(t)\lambda(t+1)-\lambda(t)+\mu(t))+x^T(t-h)(B^T(t)\lambda(t+1)-\mu(t-h))=x^T(t+1)\lambda(t+1)-x^T(t)\lambda(t)+x^T(t)\mu(t)-x^T(t-h)\mu(t-h) \quad (13)$$

选择 $V(x_t)=x^T(t)\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t)\lambda_i+\sum_{j=1}^{h}x^T(t-j)\sum_{i=1}^{m}\eta_i(t-j)\mu_i$,由(13)有

$$x^T(t)(A^T(t)\lambda(t+1)-\lambda(t)+\mu(t))+x^T(t-h)(B^T(t)\lambda(t+1)-\mu(t-h))=x^T(t+1)\lambda(t+1)-x^T(t)\lambda(t)+x^T(t)\mu(t)-x^T(t-h)\mu(t-h)=V(x_{t+1})-V(x_t)=\Delta V(x_t) \quad (14)$$

定义 $\beta=-\max_{\forall(i,j,k)\in I\times I\times\bar{n}}\varphi_{ijk}$,这里 φ_{ijk} 为 φ_{ij} 的第 k 个元素,由(10)和(14)可得,$\Delta V(x_t)\leqslant-\beta\|x(t)\|$,由定理 1 可得 1)成立.

假设 2)成立,取

$$P_1=\mathrm{diag}(\lambda_{i1},\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{in}),\forall i\in I,$$

$$Q_i=\mathrm{diag}(\mu_{i1},\mu_{i2},\cdots,\mu_{in}),\forall i\in I.$$

于是很容易看出 $\Theta_{ij}<0,\forall(i,j)\in I\times I;T_{ijl}<0,\forall(i,j,l)\in I\times I\times I$ 成立,所以 LMI 问题成立. 反过来,如果 3)成立,那么 2)显然成立.

注 3 定理 2 中的结论 2)是关于 $\lambda_i,i\in I$ 的一个 LP 问题,可以用 Matlab 的 LP 优化工具箱求解. 结论 3)是关于矩阵 $P_i,Q_i,i\in I$ 的一个 LMI 问题,可以用 Matlab 的 LMI 工具箱求解.

在上面的定理中,如果所有的向量 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 都相等,并且向量 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m$ 都相等,那么切换线性余正(copositive)Lyapunov 泛函(9)就变为了共同线性余正(copositive)Lyapunov 泛函,在这种情况下,我们有如下的推论.

推论 1　如果存在向量 $\lambda \in R_{+}^{n}$,$\mu \in R_{+}^{n}$ 满足

$$A_i^T + \mu - \lambda < 0, \forall i \in I; B_i^T \lambda - \mu < 0, \forall i \in I,$$

那么系统(6)是全局渐近稳定的.

注 4 很容易看到定理 2 中的结论 2 要比推论 1 弱一些,但是对于计算来说,推论 1 的计算量要小一些.

3　结论

通过切换线性余正(copositive)Lyapunov 泛函和共同线性余正(copositive)Lyapunov 泛函得到了切换线性时滞正系统的全局渐近稳定性的一些充分条件,而且得到了相对较弱的充分条件. 由于是充分条件,所以还可以进一步研究更弱的充分条件.

参　考　文　献

1　Goncalves J M, Megretski A, Dahleh M A. Global analysis of piecewise linear systems using impact maps and surface Lyapunov functions. *IEEE Transcations on Automatic Control*, 2003, 48(12):2089 ~ 2106

2　Berman A, Neumann M, Stern R J. Nonnegative Matrices in Dynamic Systems. New York:Wiley, 1989

3　秦元勋,刘永清,王联等. 带有时滞的动力系统的运动稳定性(第二版). 北京:科学出版社,1989(Qin Y X, Liu Y Q, Wqng L, Zheng Z X. Stability of motion of dynamical systems with delay(2 nd edition). Beijing:Science Press, 1989(in Chinese))

4　Shorten R N, Wirth F, Leith D. A positive systems model of TCP-like congestion control: Asymptotic results. *IEEE Trans. Netw*, 2006, 14(3):616 ~ 629

5　严艳,杨玉华等. 带有时滞的区间动力系统的鲁棒稳定性研究. 动力学与控制学报, 2008, 6(1):1 ~ 4(Yan Yan, Yang Yuhua, etal. Study on robust stability of interval systems with time-delay. Journal of Dynamics and Control,2008,6(1):1 ~ 4(in Chinese))

6　Mason O, Shorten R. On linear copositive Lyapunov functions and the stability of switched positive linear systems. *IEEE Transcations on Automatic Control*, 2007, 52(7): 1346 ~ 1349

7　Liu X W, Yu W S, Wang L. Stability analysis of positive systems with bounded time varying delays. *IEEE Transcations Circuits and Systems*,2009, 56(7): 600 ~ 604

8　Liu X W. Stability analysis of switched positive systems: A switched linear copositive Lyapunov functional method. *IEEE Transcations Circuits and Systems*, 2009, 56(5):414 ~ 418

9　Xie G, Wang L. Quadratic stability and stabilization of discrete-time switched systems with state delay. 43rd IEEE Conference on Decision and Control, 2004, 3235 ~ 3240

10　Stojanovic S B, Debeljkovic D Lj. Stability of linear discrete time delay systems: Lyapunov-Krasovskii approach. 4th IEEE Conference Indus. Elect., 2009, 2497 ~ 2501

STABILITY ANALYSIS OF DISCRETE-TIME PIECEWISE LINEAR POSITIVE SYSTEMS WITH TIME DELAY *

Zhai Shidong[1,2]　Yang Xiaosong[1]

(1. *School of Mathematics and Statistics*, *Huazhong University of Science and Technology*, *Wuhan* 430074, *China*)

(2. *Department of Electronicsand Information Engineering*, *Huazhong University of Science and Technology*, *Wuhan* 430074, *China*)

Abstract　This paper addressed the stability problem of discrete-time switched positive systems with time delay. By using the switched linear copositive Lyapunov functional and common linear copositive Lyapunov functional, a number of stability criteria (LP and LMI) for the discrete-time switched positive systems with time delay were presented.

Key words　switched positive systems,　switched linear copositive Lyapunov functional,　time delay,　common linear copositive Lyapunov functional,　asymptotic stability

Received 15 July 2010, revised 21 August 2010.

* The project supported by National Natural Science Foundation of China(10972082)