第 8 卷第 4 期 2010 年 12 月
1672-6553/2010/08(4)/338-4

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 8 No. 4
Dec. 2010

分数阶混沌系统的延迟同步*

王德金 郑永爱

(扬州大学信息工程学院,扬州 225009)

摘要 基于分数阶线性系统的稳定性理论,结合反馈控制和主动控制方法,提出了实现分数阶混沌系统的延迟同步的一种新方法.该方案通过设计合适的控制器将分数阶混沌系统的延迟同步问题转化为分数阶线性误差系统在原点的渐近稳定性问题.分数阶 Chen 系统的数值模拟结果验证了该方案的有效性.

关键词 分数阶, 反馈控制, 延迟同步, Chen 系统

引言

分数阶微积分已有 300 多年的历史,其发展几乎与整数阶微积分同步.但将其应用到物理学和工程学的研究热潮还是最近几十年兴起的.近年来,越来越多的科技工作者对分数阶混沌系统产生了兴趣,并利用分数阶方程描述动力系统,从而出现了一些分数阶混沌系统.例如:分数阶 Chen 混沌系统[1],分数阶 Jerk 混沌系统[2],分数阶 Liu 混沌系统[3],分数阶 Lü 混沌系统[4],分数阶统一混沌系统[5]等.

另一方面,自 1990 年 Pecora 等人[6]提出混沌的同步原理并在电路中实现以来,混沌同步的研究得到了蓬勃的发展.人们提出了多种混沌的控制方法,如驱动-响应混沌同步方法[7],线性和非线性反馈同步方法[8],耦合同步法[9],自适应同步法[10],驱动参量同步法[11]等.这些同步方法大多也适应于分数阶混沌系统之间的同步.文献[12]利用广义 Hamilton 系统理论的 Melnikov 方法,严格分析了延迟反馈方法控制混沌 Lorenz 系统到周期解的机理,揭示了延迟时间与控制混沌的关系.文献[13]针对分数阶混沌系统的投影同步问题,提出了一种基于主动滑模原理的控制器实现了对分数阶混沌系统的投影同步.基于拉普拉斯变换和分数阶线性稳定性理论,文献[14]运用单向耦合同步法,驱动-响应同步法,反馈线性化控制方法研究了一个分数阶新超混沌系统的同步问题.文献[15]基于 Lyapunov 稳定性理论,运用主动控制方法选择合适的控制函数,将混沌系统的延迟同步转化为线性误差系统在原点的渐近稳定性问题,实现了整数阶 Liu 混沌系统的延迟同步.本文在文献[15]的基础上提出了实现分数阶混沌系统的延迟同步的控制器设计方案,理论上证明了该控制方案的正确性.利用分数阶微分方程的预估-校正算法,以分数阶 Chen 系统为例的数值模拟验证了该方法的可行性和有效性.

1 分数阶混沌系统的延迟同步控制器设计

考虑由下面的数学模型描述的分数阶混沌系统

$$d^{\alpha}x/dt^{\alpha}=Ax+F(x) \tag{1}$$

其中 $0<\alpha<1$, A 是关于系统参数的 $n\times n$ 阶矩阵, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n$ 为系统(1)的状态向量, $F(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))^T\in R^n$ 为系统的非线性项.假设系统(1)为驱动系统,响应系统设计为:

$$d^{\alpha}y/dt^{\alpha}=Ay+F(y)+U \tag{2}$$

其中 $F(y)=(f_1(y),f_2(y),\cdots,f_n(y))^T\in R^n$, U 为控制器.对于系统(1)和(2),若存在常数 τ 使得 $\lim\limits_{t\to\infty}\|y(t)-x(t-\tau)\|=0$,则称系统(1)和(2)达到延迟同步.其中 $x(t)$, $y(t)$ 分别是系统(1)和(2)对应的解.设 $e(t)=y(t)-x(t-\tau)$,由(1)和(2)可得误差系统

$$d^{\alpha}e(t)/dt^{\alpha}=Ae(t)+F(y(t))-F(x(t-\tau))+U \tag{3}$$

为了研究系统(1)和(2)的延迟同步,我们首

2010-08-26 收到第 1 稿,2010-09-14 收到修改稿.
* 江苏省教育厅资助项目(08KJD120002)

先给出下面的引理.

引理 1[16]　对于分数阶线性系统:

$$d^{\alpha}x/dt^{\alpha}=Cx \tag{4}$$

其中 $0<\alpha<1, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n, C\in R^{n\times n}$ 为常数矩阵,若矩阵 C 的特征值满足 $|\arg(\lambda_1)|>\alpha\pi/2, \alpha=\max(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n), i=1,2,\cdots,n$,则分数阶线性系统(4)在原点是渐近稳定.

定理 1:　假设控制器 U 设计为 $U=F(x(t-\tau))-F(y(t))-ke(t)$,且 k 可使 $(A-kI)$ 的特征值 λ_i 满足 $|\arg(\lambda_i)|>\alpha\pi/2$,则分数阶误差系统(3)在原点是渐近稳定的,即系统(1)和(2)达到延迟同步.

证明:将 $U=F(x(t-\tau))-F(y(t))-Ke(t)$ 代入(3)得

$$d^{\alpha}e(t)/dt^{\alpha}=(A-kI)e(t)$$

因为存在合适的 k 可使 $(A-kI)$ 的特征值 λ_i 满足 $|\arg(\lambda_i)|>\alpha\pi/2$,而由引理 1 知,分数阶误差系统(3)在原点是渐近稳定的,即分数阶混沌系统(1)和(2)达到了延迟同步.

2　分数阶混沌系统延迟同步的数值模拟

下面我们以分数阶 Chen 系统作为例子来阐明上一节理论结果的正确性,作为驱动系统的分数阶 Chen 混沌系统由下面的数学模型描述:

$$\begin{cases} d^{\alpha}x_1(t)/d^{\alpha}t=-a(x_1(t)-x_2(t)) \\ d^{\alpha}x_2(t)/d^{\alpha}t=(c-a)x_1(t)- \\ \quad x_1(t)x_3(t)+cx_2(t) \\ d^{\alpha}x_3(t)/d^{\alpha}t=x_1(t)x_2(t)-bx_3(t) \end{cases} \tag{5}$$

当参数 $a=35, b=3, c=28, \alpha=0.9$ 时系统处于混沌状态,图 1 给出了上述参数条件下混沌吸引子在各个平面上的投影.

响应系统为如下的受控的分数阶 Chen 系统:

$$\begin{cases} d^{\alpha}y_1(t)/d^{\alpha}t=-a(y_1(t)-y_2(t))+u_1 \\ d^{\alpha}y_2(t)/d^{\alpha}t=(c-a)y_1(t)- \\ \quad y_1(t)y_3(t)+cy_2(t)+u_2 \\ d^{\alpha}y_3(t)/d^{\alpha}t=y_1(t)y_2(t)-by_3(t)+u_3 \end{cases} \tag{6}$$

把驱动系统(5)写成(1)的形式,有

$$d^{\alpha}x/dt^{\alpha}=Ax+F(x) \tag{7}$$

其中 $A=\begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}, x=(x_1,x_2,x_3)^T, F(x)$

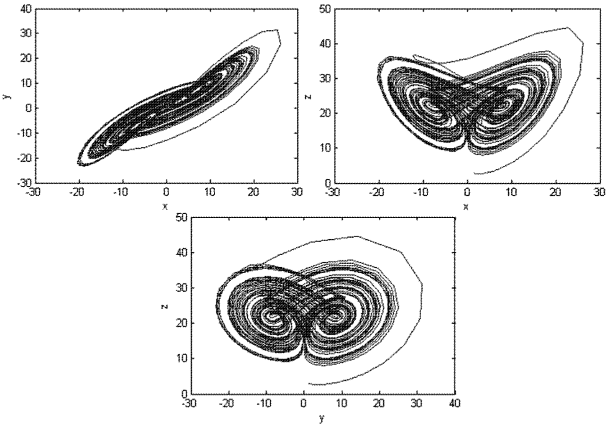

图 1　分数阶 *Chen* 系统的相图

Fig. 1　Phase diagrams for the fractional order Chen system

$=(0,-x_1x_3,x_1x_2)^T$.

把响应系统(6)写成(2)的形式,有

$$d^{\alpha}y/dt^{\alpha}=Ay+F(y)+U \tag{8}$$

将定理 1 中设计的控制器 U 代入式(8)得

$$d^{\alpha}y(t)/dt^{\alpha}=Ay(t)+F(x(t-\tau))-ke(t) \tag{9}$$

其中 $y=(y_1,y_2,y_3)^T, F(x(t-\tau))=(0,-x_1(t-\tau)x_3(t-\tau),x_1(t-\tau)x_2(t-\tau))^T, e(t)=(e_1(t),e_2(t),e_3(t))^T, U=(u_1,u_2,u_3)^T$,$k$ 为常数.

由(7)式和(8)式得分数阶线性误差系统为:

$$d^{\alpha}e(t)/dt^{\alpha}=(A-kI)e(t)$$

$$A-kI=\begin{bmatrix} -a-k & a & 0 \\ c-a & c-k & 0 \\ 0 & 0 & -b-k \end{bmatrix} \tag{10}$$

通过计算可得 $A-kI$ 的三个特征值分别为:

$$\lambda_1=-b-k$$

$$\lambda_2=\frac{-2k-a+c+\sqrt{c^2-3a^2+6ac}}{2}$$

$$\lambda_3=\frac{-2k-a+c-\sqrt{c^2-3a^2+6ac}}{2}$$

当 $a=35, b=3, c=28$ 时,存在适当的 k 值可使定理 1 的条件得到满足. 不妨取 $k=30$,三个特征值分别为:$\lambda_1=-63, \lambda_2=-60.84, \lambda_3=-6.16$,满足定理 1 的条件,系统(7)和(8)之间可达到延迟同步.

数值仿真中采用分数阶微分方程的预估-校正算法,当 $k=30$ 时,取时间 $t=40s$,延迟时间 $\tau=1.0s$,系统(7)和(8)的初值分别为 $x(0)=(2,1,3)^T, y(0)=(1,6,2.0,2.5)^T$,误差系统(10)的初值为 $e(0)=(0.08,0.07,0.09)^T$. 图 2 给出了驱动系统(7)和响应系统(8)的延迟同步状态曲线,图 3 给出了分数阶线性误差系统(10)中延迟同步误差

$e(t)$的收敛曲线. 由图 2 和图 3 可以看出,通过选择合适的控制器函数 U,分数阶 Chen 混沌系统实现了延迟同步,延迟同步误差 $e(t)$在很短的时间内收敛到零. 数值模拟结果验证了定理 1 的正确性和有效性.

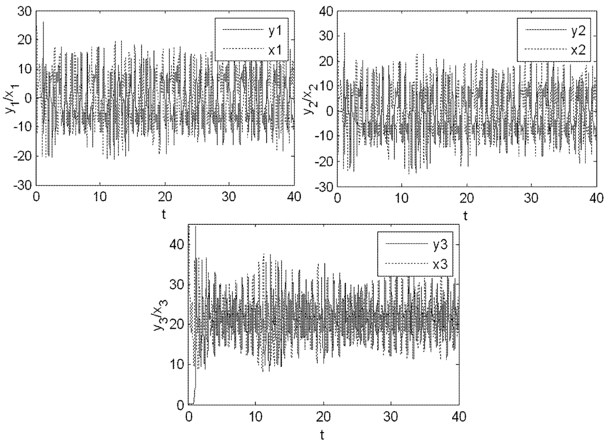

图 2　驱动系统(7)和响应系统(8)的时间序列曲线图(实线 - y,虚线 - x)

Fig. 2　The time series of drive system (7) and response system (8) (solid line - y, dotted line - x)

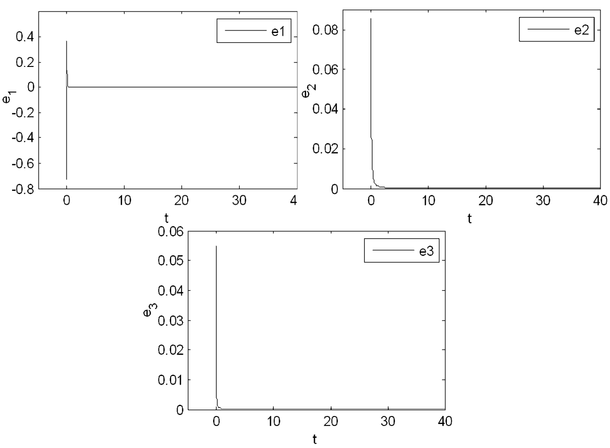

图 3　分数阶线性误差系统(10)的时间序列曲线

Fig. 3　The time series of fractional order linear error system (10)

3　结论

本文基于分数阶线性系统的稳定性理论,结合反馈控制和主动控制方法,提出了一种实现分数阶混沌系统延迟同步控制的新方法,并给出了控制器的解析表达式. 该方法通过非线性反馈使得分数阶混沌系统的延迟同步误差系统转化为分数阶线性系统,简化了分数阶混沌系统延迟同步问题的研究. 通过对分数阶 Chen 混沌系统的延迟同步进行数值模拟,数值模拟结果验证了该方法的有效性和可行性.

参 考 文 献

1　Li C P, Peng G J. Chaos in chen's system with a fractional order. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 22(2): 443 ~ 450

2　Ahmad W, Sprott J C. Chaos in fractional order autonomous nonlinear systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2003, 16(2): 339 ~ 351

3　王发强,刘崇新. 分数阶临界混沌系统及电路实验的研究. 物理学报, 2006, 55(8): 3922 ~ 3927 (Wang F Q, Liu C X. Study on the critical chaotic system with fractional order and circuit experiment. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(8): 3922 ~ 3927 (in Chinese))

4　Lü J G. Chaotic dynamics of the fractional order lü system and its synchronization. *Physics Letters A*, 2006, 354(4): 305 ~ 311

5　王兴元,贺毅杰. 分数阶统一混沌系统的投影同步. 物理学报. 2008, 57(3): 1485 ~ 1492 (Wang X Y, He Y J. Projective synchronization of the fractional order unified system. *Acta Physics Sinica*, 2008, 57 (3): 1485 ~ 1492 (in Chinese))

6　Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. *Phys Rev Lett*, 1990, 64: 821 ~ 824

7　陈保颖. 线性反馈实现 Liu 系统的混沌同步. 动力学与控制学报, 2006, 4(1): 1 ~ 4 (Chen B Y. Linear feedback control for synchronization of liu chaotic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(1): 1 ~ 4(in Chinese))

8　单梁,刘光杰,李军,王执铨. Liu 混沌系统的线性反馈和状态观测器同步. 系统仿真学报, 2007, 19(6): 1335 ~ 1338 (Shan L, Liu G J, Li J, Wa ng Z Q. Synchronization of liu chaotic system based on linear feedback and state observers methods. *Journal of System Simulation*, 2007, 19 (6): 1335 ~ 1338 (in Chinese))

9　闵富红,王执铨. 统一混沌系统的耦合同步. 物理学报, 2005, 54(9): 4026 ~ 4030 (Min F H, Wang Z Q. Coupled synchronization of the unified chaotic system. *Acta Physica Sinca*, 2005, 54 (9): 4026 ~ 4030 (in Chinese))

10　单梁,李军,王执铨. 参数不确定 Liu 混沌系统的自适应同步. 动力学与控制学报, 2006, 4 (4): 338 ~ 343 (Shan L, Li J, Wang Z Q. Adaptive synchronization of liu chaotic system with uncertain parameters. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4 (4): 338 ~ 343 (in Chinese))

11　杨世平,牛海燕,田钢等. 用驱动参量法实现混沌系统

的同步. 物理学报,2001,50(4): 619 ~623(Yang S P, Niu H Y,Tian G.. Synchronizing chaos by driving parameters. *Acta Physica Sinica*, 2001,50(4): 619 ~ 623 (in Chinese))

12 闵富红,王执栓. 混沌 Lorenz 系统延迟反馈控制的机理分析. 控制理论与应用. 2004,21(2): 205 ~210 (Min F H ,Wang Z Q. Analyze the time delayed feedback control of chaotic lorenz system. *Control Theory & Applications*, 2004,21(2): 205 ~210 (in Chinese))

13 刘丁,闫晓妹. 基于滑模控制实现分数阶混沌系统的投影同步. 物理学报,2009,58(6):3747 ~ 3752 (Liu D, Yan X M . Projective synchronization of fractional order chaotic systems based on sliding mode control. *Acta Physica Sinica*, 2009,58 (6):3747 ~3752(in Chinese))

14 张若洵,杨世平. 一个分数阶新超混沌系统的同步. 物理学报,2008: 57(11): 6837 ~6843 (Zhang R X, Yang S P. Designing synchronization schemes for a fractional order hyperchaotic system. *Acta Physica Sinica*, 2008, 57 (11): 683 7 ~6843(in Chinese))

15 李明星. Liu 混沌系统的延迟同步. 新乡学院学报(自然科学版),2008 25(2):23 ~25 (Li M X. Lag synchronization of chaotic Liu system. *Journal of Xinxiang University (Natural Science Edition)*, 2008 25(2): 23 ~25(in Chinese))

16 Matignon D. Stability results for fractional differential equations with application control processing. *IMACS,IEEE-SMC*, 1996,2(1): 963 ~968

LAG SYNCHRONIZATION OF FRACTIONAL ORDER CHAOTIC SYSTEMS*

Wang Dejin Zheng Yongai

(*College of information engineering*, *Yangzhou University*, *Yangzhou* 225009, *China*)

Abstract Based on the stability theory of fractional order linear systems, a novel method combining feedback control with active control was proposed for the lag synchronization of fractional order chaotic systems. By designing a proper controller the lag synchronization of fractional order chaotic systems was converted to the asymptotic stability of the fractional order linear error systems at origin. The numerical simulation results on fractional order Chen system verify the effectiveness of the proposed method.

Key words fractional order, feedback control, lag synchronization, Chen system

Received 26 August 2010, revised 14 September 2010.

* The work is supported by the Natural Science Foundation of Jiangsu Education Committee (08KJD120002)