

# 异结构混沌系统同步及其在保密通信中的应用\*

李建平 刘斌 刘东南

(湖南工业大学电气与信息工程学院, 株洲 412008)

**摘要** 针对统一混沌系统和  $Q_i$  混沌系统的模型, 根据主动控制思想和 Lyapunov 稳定性定理, 构造主动控制器使得这两个异结构的混沌系统实现同步, 并且实现了驱动系统参数已知而响应系统参数未知的异结构混沌系统的自适应同步, 并且能较快的辨析出系统的未知参数. 并利用 MATLAB 进行数字仿真, 将同步的异结构混沌系统应用到混沌掩盖和混沌扩频保密通信中. 仿真结果表明, 异结构混沌系统能够实现稳定的同步, 且在混沌掩盖和混沌扩频保密通信中, 有用信号均能有效地在接收端恢复出来.

**关键词** 统一混沌系统,  $Q_i$  混沌系统, 同步, 保密通信

## 引言

混沌信号具有隐蔽性、不可预测性、易于产生和复制、初值敏感性等特点, 使其在保密通信的研究中具有很好的应用价值. 自 Pecora 等<sup>[1]</sup> 提出混沌同步思想并在电路中实现以来, 使混沌应用于保密通信领域成为研究的热点. 2002 年吕金虎、陈关荣等提出了统一混沌系统模型<sup>[2]</sup>, 具有一系列良好的性质, 是一个具有广泛应用价值的新的混沌模型. 2005 年,  $Q_i$  等提出了另外一种全新的混沌系统— $Q_i$  混沌系统<sup>[3]</sup>, 该系统与以往系统的最大不同之处在于, 它的每个方程均含有非线性项, 动力学行为更为复杂. 近几年各种混沌同步方法不断提出, 主要用 PC 法同步控制<sup>[1]</sup>、观测器同步控制<sup>[4]</sup>、状态反馈同步控制<sup>[5]</sup>、耦合同步控制<sup>[6]</sup>、脉冲控制<sup>[7,8]</sup> 等方法实现. 然而在实际混沌同步中, 由于各种原因很难保证两个混沌系统完全相同, 尤其是在混沌同步的保密通信应用中, 保密通信系统的发送端和接收端系统往往不同, 而且采用不同的混沌系统将会使得通信系统具有更高的安全性. 所以本文将同步的统一系统和  $Q_i$  混沌系统应用到保密通信系统中将更加具有现实意义.

## 1 原理介绍

假设非线性混沌系统的驱动系统为

$$\dot{x} = Ax + f(x) \quad (1)$$

响应系统为:

$$\dot{y} = Ay + f(y) + u(t) \quad (2)$$

其中:  $x, y \in R^n$ ;  $A$  是适当维数的矩阵;  $f$  是满足 Lipschitz 条件的连续可微非线性函数.

定义误差  $e = y - x$ , 由(2)式减(1)式得误差系统为:

$$\dot{e} = Ae + F(x, y) + u(t) \quad (3)$$

其中  $F(x, y) = f(y) - f(x)$

混沌系统同步的最终目标是设计一个控制器  $u(t) \in R^n$ , 使得混沌系统的响应系统与驱动系统能够在很短的时间内实现稳定的同步. 即若存在  $u(t) \in R^n$  使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$  则响应系统与驱动系统同步.

## 2 参数已知的异结构系统的同步

假设驱动系统为统一系统, 其动力方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (25d + 10)(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = (28 - 35d)x_1 - x_1x_3 + (29d - 1)x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - \frac{1}{3}(8 + d)x_3 \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $d \in [0, 1]$  时系统为混沌态, 当  $d \in [0, 0.8)$  时, 统一系统属于广义 Lorenz 系统; 当  $d \in (0.8, 1]$  时, 统一系统属于广义 Chen 系统. 当  $d = 0.8$  时, 统一系统属于广义 Lü 系统.

受控的  $Q_i$  系统的响应系统为:

2010-06-11 收到第 1 稿, 2010-06-24 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(60874025)

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + y_2 y_3 + u_1 \\ \dot{y}_2 = cy_1 - y_2 - y_1 y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 = y_1 y_2 - by_3 + u_3 \end{cases} \quad (5)$$

当  $a=35, b=8/3, 17 < c < 189$  时, 系统(1)有正的 Lyapunov 指数, 此系统符合混沌系统的一切特点, 是一种理想的混沌系统.

定义误差  $e_1 = y_1 - x_1, e_2 = y_2 - x_2, e_3 = y_3 - x_3$ , 由式(5)减式(4)得误差系统为:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(y_2 - y_1) + y_2 y_3 - (25d + 10)(x_2 - x_1) + u_1 \\ \dot{e}_2 = cy_1 - y_2 - y_1 y_3 - (28 - 35d)x_1 + x_1 x_3 - (29d - 1)x_2 + u_2 \\ \dot{e}_3 = y_1 y_2 - by_3 - x_1 x_2 + \frac{8+d}{3}x_3 + u_3 \end{cases} \quad (6)$$

根据主动控制思想<sup>[9]</sup>选择主动控制器  $u_1, u_2, u_3$  如下:

$$\begin{cases} u_1 = -ay_2 - y_2 y_3 + (25d + 10)x_2 - (25d + 10 - a)y_1 \\ u_2 = (28 - 35d)x_1 + y_1 y_3 - cy_1 - x_1 x_3 + 29dx_2 \\ u_3 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (b - \frac{8+d}{3})x_3 \end{cases} \quad (7)$$

将式(7)的控制器代入式(6)得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -(25d + 10)e_1 \\ \dot{e}_2 = -e_2 \\ \dot{e}_3 = -be_3 \end{cases} \quad (8)$$

考虑 Lyapunov 函数  $V = (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)/2$

对上式求导得  $\dot{V} = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 = -(25d + 10)e_1^2 - e_2^2 - be_3^2 \leq 0$

根据混沌同步 Lyapunov 稳定性定理可以看出: 混沌系统的误差方程式(6)在主动控制器式(7)的作用下能够渐进稳定, 即响应统一混沌系统式(5)与驱动 Qi 混沌系统式(4)能够在短时间内达到稳定的同步.

初始值  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (3, 2, 1), (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (15, 10, 5)$ , 取  $a=35, b=8/3, c=80, d=0.4$  利用 MATLAB 的 Simulink 对异结构混沌系统进行数字仿真

由图 1 中误差系统  $e_1, e_2, e_3$  的变化可以看出, 在主动控制器的作用下误差系统  $e_1, e_2, e_3$  趋近于 0, 并稳定下来, 这说明在主控制器的作用下 Qi 混沌系统与统一混沌系统很好的实现的同步.

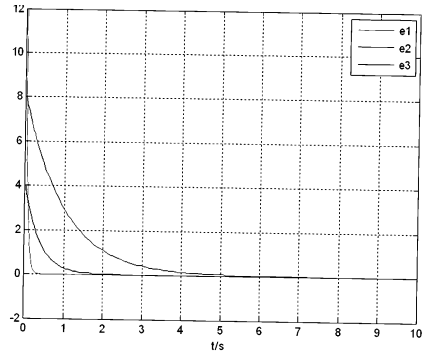


图 1 同步误差

Fig. 1 The synchronization errors

### 3 参数未知的异结构自适应同步

在系统参数未知的情况下实现混沌同步将更有现实意义. 以统一系统为驱动系统, Qi 系统为响应系统. 但是响应系统参数未知, 设计控制器实现同步.

$$\begin{cases} u_1 = -\hat{a}(y_2 - y_1) - y_2 y_3 + (25d + 10)(x_2 - x_1) - k_1 e_1 \\ u_2 = -\hat{c}y_1 + y_2 + y_1 y_3 + (28 - 35d)x_1 - x_1 x_3 + (39d - 1)x_2 - k_2 e_2 \\ u_3 = -y_1 y_2 + \hat{b}y_3 + x_1 x_2 - \frac{8+d}{3}x_3 - k_3 e_3 \end{cases} \quad (9)$$

$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$  是待测量.  $k_1, k_2, k_3$  是大于零的常数.

将(9)式代入(6)式得误差系统为:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(y_2 - y_1) - \hat{a}(y_2 - y_1) - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = (c - \hat{c})y_1 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = \hat{b}y_3 - k_3 e_3 \end{cases} \quad (10)$$

设计自适应率为:

$$\dot{\hat{a}} = (y_2 - y_1)e_1, \dot{\hat{b}} = -y_3 e_3, \dot{\hat{c}} = y_1 e_2 \quad (11)$$

证明: 取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + \frac{1}{2}[(\hat{a} - a)^2 + (\hat{b} - b)^2 + (\hat{c} - c)^2] \quad (12)$$

$$\dot{V} = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + (\hat{a} - a)\dot{\hat{a}} + (\hat{b} - b)\dot{\hat{b}} + (\hat{c} - c)\dot{\hat{c}} - k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2$$

把式(11)代入上式得  $\dot{V} = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 \leq 0$

上式等号仅在  $e_1 = 0, e_2 = 0, e_3 = 0$  时成立.

由  $\dot{V} \leq 0$  得  $V \leq V(0)$  根据(12)知  $e_1, e_2, e_3$  和  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$  有界. 混沌状态轨迹也是有界的. 由(10)知  $\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3$  有界,  $\ddot{V} = -2k_1 e_1 \dot{e}_1 - 2k_2 e_2 \dot{e}_2 - 2k_3 e_3 \dot{e}_3$  有界说明  $\dot{V}$  一直连续. 根据 Barbalat 引理知  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$

$=0 (i=1,2,3)$  即两个系统实现了同步. 初始值  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (3, 2, 1), (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (15, 10, 5)$ , 取  $d=0.4$  未知参数真实值  $a=35, b=8/3, c=80$ , 取  $k_1=k_2=k_3=10$  进行数值仿真

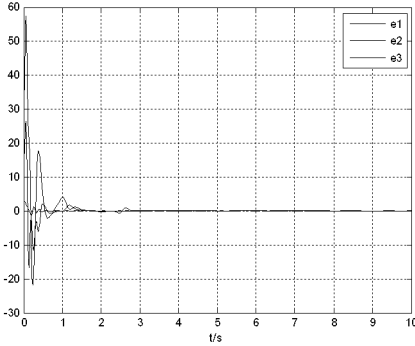


图2 自适应控制下的同步误差

Fig.2 The synchronization errors of adaptive control

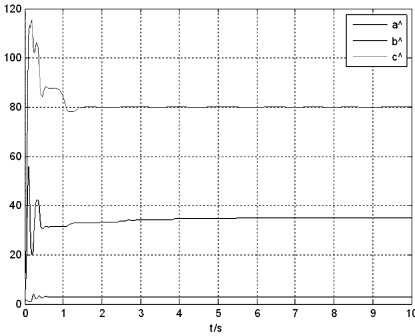


图3 参数估计

Fig.3 Parameter estimation

由仿真图可知异结构同步误差趋于零, 未知参数得到了识别, 说明控制器和自适应率的有效性.

#### 4 在保密通信中应用

混沌由于其内随机性而适于在保密通信中应用, 但是一般说来, 要将混沌系统应用于保密通信, 必须通过混沌控制产生与给定的混沌序列同步的混沌轨道(在无控制的条件下, 两个独立的混沌系统是不可能达到混沌的), 所以, 通过上述的混沌同步设计, 可以用来实现保密通信. 我们在驱动系统和响应系统参数都已知的情况下用  $x_1(t)$  来对传输信号进行混沌掩盖和混沌扩频, 简述一下混沌信号在通信中的应用. 取  $m(t) = 10\sin(t)$  为传输信号, 为了实现保密通信, 可将该信号加入混沌信号中, 同时为了增强保密性, 可以为有用信号加入一个增益, 我们取  $s(t) = 0.1m(t) + x_1(t)$  或  $s(t) = 0.1m(t)x_1(t)$  而此时两种方案下, 有用信号经过混沌信

号加密的信号如图4, 图5所示.

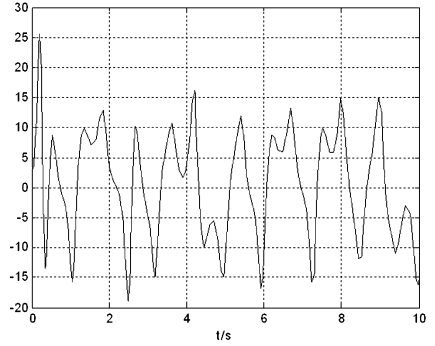


图4 混沌掩盖后的信道信号

Fig.4 The channel signal after chaotic masking

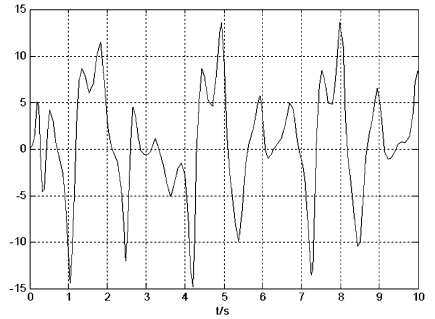


图5 混沌扩频后的信道信号

Fig.5 The channel signal after chaotic spread spectrum

接收端解调信号或分别如图6和图7所示

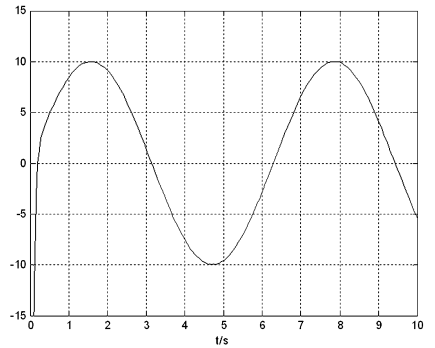


图6 混沌掩盖下解调信号

Fig.6 The demodulation signal under chaotic masking

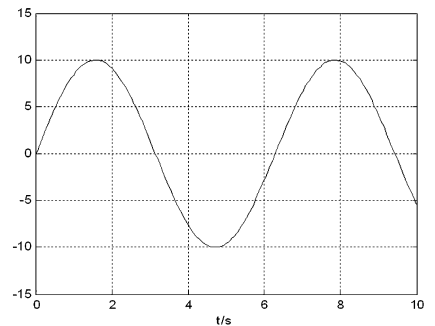


图7 混沌扩频下解调信号

Fig.7 The demodulation signal under chaotic spread spectrum

由仿真图可看出,通过上述的方法可以实现混沌保密通信.在系统达到精确同步之后,接收端解调出的信号与原信号一致.信道中的信号又具有较强的随机性,与原信号完全不同,仿真实现了预期的效果.

## 5 结论

主动控制器实现了两个不同混沌系统的同步,数字仿真结果表明异结构混沌系统能够在较短的时间内实现稳定的同步.实现了驱动系统已知而响应系统未知的异结构混沌系统的自适应同步,并且能较快的辨析出系统的未知参数.结合混沌掩盖和混沌扩频原理,将同步的异结构混沌系统应用到混沌保密通信中.仿真结果表明了同步方案的有效性,有用信号都能够有效地在接收端恢复出来.异结构混沌系统同步的实现,增加了可用的混沌系统范围,使得混沌同步在保密通信中具有更大的应用前景.

## 参 考 文 献

- 1 Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 1990, 64(4): 821 ~ 830
- 2 Lu J H, Chen G R. Bridge the gap between the Lorenz system and Chen system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(12): 2917 ~ 2926
- 3 Wang F Z, Qi G Y, Chen Z Q, Zhang Y H, Yuan Z Z. Analysis Circuit Implementation and Synchronization of a New Three Dimensional Chaotic System. *Phys Soc*, 2006, 55(8): 4005 ~ 4012
- 4 Li G H, Zhou S P, Xu D M. A Parameter - Modulated Method for Chaotic Digital Communication Based on State Observers. *Physical Review Letters*, 2004, 53(3): 706 ~ 709
- 5 Tao C H, Lj A, Lu J H. Feedback Synchronization of United Chaotic System. *Phys Soc*, 2002, 51(7): 1497 ~ 1501
- 6 贾贞, 邓光明. 超混沌 Lü 系统的线性与非线性耦合同步. *动力学与控制学报*, 2007, 5(3): 220 ~ 223 (Jia zhen, Deng guangming. Linearly and Nonlinearly coupled synchronization of hyperchaotic Lü systems. *Journal of Dynamic and Control*, 2007, 5(3): 220 ~ 223 (in Chinese))
- 7 王燕舞, 关治洪等. 统一混沌系统的脉冲控制. *原子能科学与技术*, 2004, 38(3): 256 ~ 259 (Wang yanwu, Guan zhihong. Impulsive Control and Synchronization of the Unified Systems. *Atomic Energy Science and Technology*, 2004, 38(3): 256 ~ 259 (in Chinese))
- 8 Liu B. Stability of solutions for stochastic impulsive systems via comparison approach. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2008, 53(9): 2128 ~ 2133
- 9 Bai E W, Lonngren K E. Synchronization and control chaotic system using active control. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2000, 11(1): 39 ~ 47

# SYNCHRONIZATION OF DIFFERENT STRUCTURE CHAOTIC SYSTEMS AND ITS APPLICATION TO SECURE COMMUNICATION \*

Li Jianping Liu Bin Liu Dongnan

(College of Electrical and Information Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412008, China)

**Abstract** Based on the idea of active control and the Lyapunov stability theory, an active controller was designed to synchronize two different chaotic systems. Moreover, the fast adaptive synchronization was achieved between the drive system and the response system with different structures and unknown parameters. The results were then applied to the secure communication based on chaotic masking and chaotic spread spectrum. The MATLAB was used for the numerical simulations. The simulation results show that the method can realize synchronization of two different chaotic systems and the useful signal can be recovered effectively in the receiver during the secure communication.

**Key words** unified chaotic system, Qi chaotic system, synchronization, secure communication