

蔡氏电路混沌系统的单状态延时反馈控制*

杨正兵 王怀磊

(南京航空航天大学振动工程研究所,南京 210016)

摘要 基于时滞系统的 Hopf 分叉理论,设计了仅考虑单个状态变量的时滞反馈控制器,实现了将蔡氏电路系统的混沌运动稳定到某周期轨道上.首先论证了蔡氏电路系统的混沌动力学行为及平衡点的稳定性,然后详细分析了系统在 x, y, z 三个不同的单状态时滞反馈下增益参数的可控取值范围,最后数值仿真结果验证了理论分析的正确性.

关键词 混沌控制, 时滞反馈, 蔡氏电路, Hopf 分叉, 周期轨道

引言

混沌是存在于自然界中的一种普遍运动形式,它是在确定性系统中产生的不规则运动,而这种运动对初始条件非常敏感.在某种程度上,混沌是有益的,如在保密通信领域中,混沌信号可以很好的提高信息的安全性.另一方面,混沌又是不受欢迎的,因为混沌行为的不可预知性可能造成不利的影 响.因此,能够控制混沌(拟制或者消除)就显得非常重要.

自美国马里兰大学的 Ott, Grebogi 和 Yoke 三位科学家提出混沌控制的 OGY 方法以来^[1],各种不同的混沌控制方法应运而生,如主动控制法^[2],滑模控制法^[3],延迟反馈控制法^[4-9],自适应控制法^[10],脉冲控制法^[11]等.其中,K. Pyragas 于 1992 年提出了所谓时间延迟反馈控制(TDFC)方法^[12],该方法不需要预先获得待控制系统的太多信息,只需预先知道嵌入在该混沌系统中的不稳定周期轨道(UPO)的周期,即可利用时滞偏差信号将系统稳定到该目标 UPO 上,而并不改变 UPO 本身.与 OGY 方法相比,TDFC 控制利用连续时间激励,有助于抑制噪声,且容易实现,因此该方法在实际控制中有着较为广泛的应用.1994 年 P. Celka 以蔡氏电路为例^[13],首次对该方法进行了实验验证.张晓明^[5]等人对时滞反馈法控制低维混沌系统的可控条件进行了研究,并应用于 Rossler 系统.于洪洁^[14]提出了非线性时滞反馈控制方法,并成功实

现了对受迫 Duffing 系统的混沌控制.

蔡氏电路是一个典型的混沌电路,在电子通信领域有着重要的应用,具有很好的研究价值.本文以蔡氏电路混沌系统为例研究了单变量线性时滞反馈控制参数 k 和 τ 的关系.最后,分别给出了 x, y, z 三种不同状态延迟反馈的控制参数取值范围,并通过数值仿真对其实际控制效果进行了验证.

1 模型分析

考虑无量纲化后的蔡氏电路混沌系统^[15]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - h(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \quad (1)$$

其中: $h(x) = m_1x + 1/2(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$, α 和 β 是大于 0 的两个系统参数.由文献[15]可知,当 $\alpha = 9, \beta = 100/7, m_0 = -1/7, m_1 = 2/7$ 时,系统(1)有三个平衡点

$$O(0,0,0), P_{\pm}(\pm 1.5, 0, \mp 1.5),$$

且具有混沌状态,其在 (x, y) 平面的混吸引子如图 1 所示.为分析各平衡点的稳定性,令其对应的 Jacobi 矩阵行列式为零,

$$O \text{ 点: } \begin{vmatrix} -m_0\alpha - \lambda & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & 1 \\ 0 & -\beta & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

$$P_{\pm} \text{ 点: } \begin{vmatrix} -m_1\alpha - \lambda & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & 1 \\ 0 & -\beta & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

2010-06-22 收到第 1 稿,2010-07-18 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10701024),高等学校博士点基金资助项目(20070287029),南京航空航天大学基本科研业务费专项科研项目(NS2010021)

解得其对应的特征根为:

$$\left. \begin{aligned} O \text{ 点: } \lambda &= 2.22, -0.97 \pm i2.71 \\ P_{\pm} \text{ 点: } \lambda &= -3.94, 0.19 \pm i3.05 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由此可知,三个平衡点均为不稳定的鞍焦点.

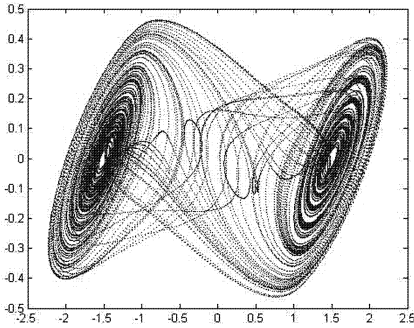


图1 蔡氏电路(1)在(x,y)平面的相图

Fig. 1 projection of the phase diagram of Chua's circuits (1) in (x,y) plane

2 时滞反馈控制

系统(1)加入延迟反馈控制后的方程为:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - h) + k_{11}(x(t) - x(t - \tau)) \\ \dot{y} = x - y + z + k_{22}(y(t) - y(t - \tau)) \\ \dot{z} = -\beta y + k_{33}(z(t) - z(t - \tau)) \end{cases} \quad (5)$$

为简单起见,只讨论对系统(5)加单状态延迟反馈的情况,即下面三种情况之一:

$$\begin{cases} j = 1, k_{11} = k, k_{22} = k_{33} = 0 \\ j = 2, k_{22} = k, k_{11} = k_{33} = 0 \\ j = 3, k_{33} = k, k_{11} = k_{22} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

并以第二种单状态反馈为例对受控系统稳定性分析,即取 $k_{22} = k, k_{11} = k_{33} = 0$. 此时受控系统(5)在平衡点 $P_{\pm} (\pm 1.5, 0, \mp 1.5)$ 处的 Jacobi 矩阵为(对于平衡点 O 的分析类似):

$$A = \begin{bmatrix} -18/7 & 9 & 0 \\ 1 & -1 + k - ke^{-\lambda\tau} & 1 \\ 0 & -100/7 & 0 \end{bmatrix}$$

特征方程为:

$$f(\lambda) = |A| = \lambda^3 + \beta_1 \lambda^2 + \beta_2 \lambda + \beta_3 = 0 \quad (7)$$

其中:

$$\beta_1 = 25/7 - k + ke^{-\lambda\tau}$$

$$\beta_2 = 55/7 - 18/7k + 18/7ke^{-\lambda\tau}$$

$$\beta_3 = 1800/49$$

根据 Hopf 分叉理论^[16],若当 $\tau = \tau_0$ 时特征方程(7)有一对简单的纯虚根且满足横截穿越条件,则系统(5)在 τ_0 处会出现 Hopf 分叉. 为得到特征根

穿越虚轴的临界条件,将 $\lambda = i\omega (\omega > 0)$ 代入方程(7)并分离实部、虚部后得到:

$$\begin{cases} a \sin(\omega\tau) - b \cos(\omega\tau) + c_1 = 0 \\ a \cos(\omega\tau) + b \sin(\omega\tau) + c_2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中,

$$a = 18/7\omega k, b = \omega^2 k$$

$$c_1 = \omega^2 k - 25/7\omega^2 + 1800/49$$

$$c_2 = 55/7\omega - \omega^3 - 18/7\omega k \quad (9)$$

进一步整理可得:

$$f(\omega) = \omega^6 - (2k + 145/49)\omega^4 + (1620/49k - 68825/343)\omega^2 + 3240000/2401 = 0 \quad (10)$$

令 $z = \omega^2$, 则方程(10)简化为:

$$g(z) = z^3 - (2k + 145/49)z^2 + (1620/49k - 68825/343)z + 3240000/2401 = 0 \quad (11)$$

系统出现 Hopf 分叉的临界条件即为方程(11)至少有一个正实根. 为此,对方程(11)求导得:

$$h(z) = \frac{dg(z)}{dz} = 3z^2 - (4k + 290/49)z + 1620/49k - 68825/343 \quad (12)$$

对方程(11)和(12)进行分析后不难得出以下结论:

定理 1 方程(11)至少存在一个正实根的充分必要条件为:

(1) 方程 $h(z) = 0$ 有两个实根 z_1^*, z_2^* (假设 $z_1^* < z_2^*$), 且 $z_2^* > 0$;

(2) $g(z_2^*) \leq 0$. #

进一步分析还可得若方程(11)有一个正实根,则必有两个正实根(按重数计算)和一个负实根. 将定理 1 中的两个条件代入方程(11),(12)得到参数 k 的取值范围为:

$$k < -0.234$$

重复以上计算过程可得平衡点 $O(0, 0, 0)$ 产生 Hopf 分叉的参数 k 的取值范围为:

$$k > 1.137$$

在以上取值范围内给定参数 k , 便可由方程(10)求出两个正的 ω

$$0 < \omega_1 < \omega_2$$

再由方程(8)可以确定其分别对应的临界时滞为:

$$\tau_{sn}(k) = \frac{1}{\omega_s(k)} \left\{ \arccos \left[\frac{-c_1 b - c_2 a}{k(b^2 + a^2)} \right] + 2n\pi \right\} \quad (13)$$

$$s = 1, 2; n = 0, 1, 2, \dots$$

由方程(10)和(11)可求出关于参数 k 的函数

表达式,同时将式(9)代入式(12)便可得到延时反馈增益 k 与延时量 τ 的临界关系曲线,如图(2)所示,其中实线代表 τ_{2n} 与 k 的临界曲线,虚线代表 τ_{1n} 与 k 的临界曲线.

根据图2确定的系统(5)产生 Hopf 分叉的临界曲线,可以选取控制混沌运动所需要的控制参数 k 和 τ . 这里仅选取两组特定的参数来验证控制效果. 当 $k = -2.54, \tau = 1.8$ 时,系统(5)被控制到周期性1运动上,其相图如图3(a),(b)所示.

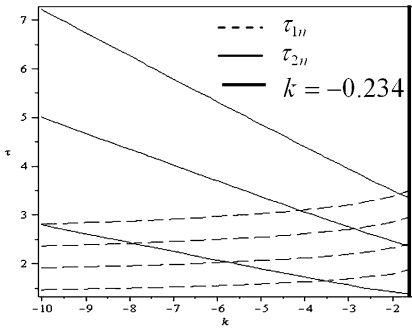


图2 参数 k 与 τ 的临界关系曲线

Fig.2 The critical relationship curves of parameters k and τ

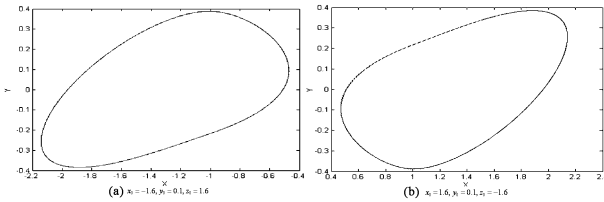


图3 $j=2$ 时,系统被稳定到的周期轨道

Fig.3 The stable periodic orbits for $j=2$

当 $j=1,3$ 时,重复上述计算过程,可得出相应的 k 值的取值范围和控制条件,如下表所示:

表1 $j=1,3$ 情况下,系统(5)在平衡点 P_{\pm} 的控制条件

Table 1 The control condition of System (5) at equilibrium points P_{\pm} for $j=1,3$

j	feedback controller	range of k
1	$k(x(t) - x(t - \tau))$	$k < 1.202$
3	$k(z(t) - z(t - \tau))$	$k > -7.125$

表2 $j=1,3$ 情况下,系统(5)在平衡点 O 的控制条件

Table 2 The control condition of System (5) at equilibrium points O for $j=1,3$

j	feedback controller	range of k
1	$k(x(t) - x(t - \tau))$	$k < 17.441$
3	$k(z(t) - z(t - \tau))$	$k < -0.166$

根据上表给出的控制条件进行数值仿真,发现当

把延迟反馈施加到第一项($j=1$)或第二项($j=2$)时系统只能被控制到环绕平衡点 P_{\pm} 的周期轨道上,而施加到第三项($j=3$)时,系统只能被控制到平衡点环绕平衡点 $O(0,0,0)$ 的周期轨道上. 当 $j=1$ 时,取 $k = -3.54, \tau = 0.07$,控制结果如图4(a),(b)所示.

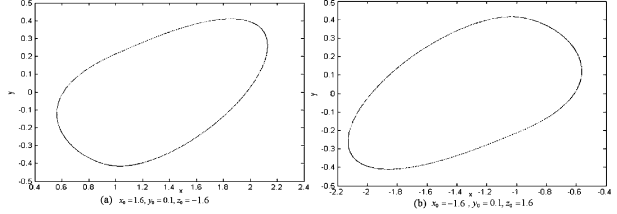


图4 $j=1$ 时,系统被稳定到的周期轨道

Fig.4 The stable periodic orbits for $j=1$

当 $j=3$ 时,取 $k = -2.38, \tau = 0.8$,控制结果如图5所示.

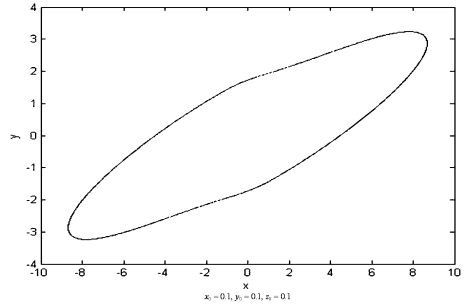


图5 $j=3$ 时,系统被稳定到的周期轨道

Fig.5 The stable periodic orbits for $j=3$

3 结论

通过对蔡氏电路混沌系统单状态时滞反馈控制的理论分析和数值模拟,结果表明:这种控制方案的是可行的,理论分析与实际控制结果相吻合,这为实验研究提供了具有指导意义的重要结果. 但采用这种方法稳定到的周期轨道并不一定是嵌入在原混沌系统中的不稳定的周期轨道,如何将原混沌系统中的不稳定轨道控制到稳定而不改变周期轨道本身,是所谓的跟踪问题,我们将在以后的工作中进一步研究. 另外,这种方法理论上也可以推广到更高维的混沌系统中.

参 考 文 献

- Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, 64: 1196 ~ 1199
- Nbendjo B R N, Tchoukuegno R and Wofo P. Active con-

- trol with delay of vibration and chaos in a double-well Duffing oscillator. *Chaos, Solutions and Fractals*, 2003, 18 (2): 773 ~ 792
- 3 Yang S, Chen C and Yau H. Control of Chaos in Lorenz system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002, 13(4): 77 ~ 792
- 4 陈艳艳, 彭建华. 确定延迟反馈法控制低维混沌系统的控制条件. *物理学报*, 2001, 50: 1871 ~ 1856 (Chen Y Y, Peng J H. Defining the controlling conditions of low dimensional chaotic systems controlled by time-delayed feedback. *Acta Physica Sinica*, 2001, 50: 1871 ~ 1856 (in Chinese))
- 5 张晓明, 彭建华, 陈关荣. 确定延迟反馈法控制混沌的可控性条件. *物理学报*, 2004, 5(9): 2864 ~ 2869 (Zhang X H, Peng J H, Chen G R. Defining the controlling conditions of low dimensional chaotic systems controlled by time-delayed feedback. *Acta Physica Sinica*, 2004, 5(9): 2864 ~ 2869 (in Chinese))
- 6 陈亮, 韩正之. 混沌系统时滞反馈控制综述. *控制与决策*, 2004, 19(1): 1 ~ 6 (Chen L, Han Z Z. A survey on time-delayed feedback control for chaotic systems. *Control and Decision*, 2004, 19(1): 1 ~ 6 (in Chinese))
- 7 Yu X H. Tracking inherent periodic orbits in chaotic systems via adaptive time-delayed self-control. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Decision Control, San Diego, CA, 1997, 1: 401 ~ 405
- 8 Chen G R, Yu X H. On time-delayed feedback control of chaotic systems. *IEEE Trans Circ Syst.*, 1999, 46: 767 ~ 772
- 9 Wang X F, Zhong G Q. Generating chaos in Chua's circuit via time-delay feedback. *IEEE Trans. Circ. Syst.*, 2001, 48, 1151 ~ 1156
- 10 罗小华, 李华春, 陈秋华. 混沌系统自适应追踪控制新方法. *物理学报*, 2009, 58(11): 7532 ~ 7538 (Luo X H, Li H C, Chen Q H. A new method of adaptive tracking control for chaotic system. *Acta. Physia. Sinica.*, 2009, 58(11): 7532 ~ 7538 (in Chinese))
- 11 Liu X. Impulsive control of chaotic system. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(5): 1181 ~ 1190
- 12 Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys. Lett. A*, 1992, 170: 421 ~ 428
- 13 Celka P. Experimental of Pyragas's chaos control method applied in Chua's circuit. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1994, 4(6): 1703 ~ 1707
- 14 于洪洁. 延迟-非线性反馈控制混沌. *物理学报*, 2005, 54(11): 5053 ~ 5057 (Yu H J. Controlling chaos using time-delay nonlinear feedback. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54(11): 5053 ~ 5057 (in Chinese))
- 15 Chua L O, Komuto M, Matsumoto T. The double scroll family-Part: rigorous proof of chaos. *IEEE Trans Circ Syst.*, 1986, 33(11): 1072 ~ 1097
- 16 Hale J and Lunel S V. Introduction to Functional Equations. Springer-Verlag, New York, 1993

SINGLE STATE TIME-DELAYED FEEDBACK CONTROL OF CHAOS IN CHUA'S CIRCUIT SYSTEM*

Yang Zhengbing Wang Huailei

(Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract Based on the theory of Hopf bifurcation of time-delayed system, a single delayed state feedback controller was designed to control the chaotic motion of the Chua's circuit system. First, the stability of the equilibriums and the chaotic motion of Chua's circuit system were investigated. Then, the necessary controllable ranges of the feedback gains were determined via detailed analysis for each of the x , y , z single delayed state feedbacks, respectively. Finally, the results of numerical simulation verified the validity of the theoretical analysis.

Key words chaos control, time-delayed feedback, Chua's circuit system, Hopf bifurcation, periodic orbits

Received 22 June 2010, revised 18 July 2010.

* The project supported by the National Science Foundation of China (10701024), Project supported by the Foundation for the University Doctoral Program (20070287029), Project supported by basic scientific research operation cost of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics (NS2010021)