

非光滑系统的混沌同步*

付士慧

(郑州大学数学系, 郑州 450001)

摘要 通过广义哈密顿系统和观测器法, 本文将非光滑混沌系统的同步问题转化成了研究光滑系统零解的稳定性, 从而给出了混沌同步的条件. 对具体的带干摩擦, 碰撞的 Duffing 振子分别进行研究, 使其达到了完全同步, 表明该方法的正确性.

关键词 广义哈密顿系统, 混沌同步, 干摩擦, 碰撞

引言

同步是非线性动力系统的一种非常普遍的现象, 它表明两个运动的物体, 通过介质进行或强或弱的耦合, 使得两个系统运动状态趋于一致. 混沌同步是近年发现的新的同步, 并且已广泛应用到生物学、化学、医学、电子学、信息科学和保密通信等领域. 到目前为止, 人们已经对多种同步类型^[1](完全同步, 滞后同步, 预测同步, 广义同步等等)和实现同步的多种方法(驱动-响应同步法, 自适应同步法^[2], 脉冲同步法^[3], 观测器同步法^[4]等)进行了研究, 并且取得了丰富的成果.

然而, 上述对混沌同步的研究主要是针对光滑系统^[1-3], 实际上许多工程系统都是非光滑的^[4-5], 并且非光滑系统主要被分为三类: (1) 非光滑连续系统(系统的向量场连续, Jacobi 矩阵不连续), 如文献^[4]中给出的混沌系统; (2) Filippov 系统(系统的向量场, Jacobi 矩阵都不连续), 如干摩擦系统^[5]; (3) 脉冲系统(系统的状态变量, 向量场和 Jacobi 矩阵都不连续), 如碰撞系统^[5]. 实际上, 第一类非光滑系统可包含在第二类中. 目前对非光滑系统混沌同步的研究主要集中在非光滑连续系统, 比如 Chua 电路^[6-7], 主要困难是误差系统零解稳定性的研究. 由于非光滑系统的向量场在非光滑点 Jacobi 矩阵不存在, 无法得到其线性化方程, 因此误差系统很难给出; 即使得到误差系统, 一般也是非光滑的, 其零解的稳定性也不易研究. 但是, 非光滑系统的同步问题是非光滑系统动力学研究的重

要内容^[8], 所以值得考虑. 本文将广义哈密顿系统和观测器的方法^[4]应用到非光滑系统, 将其混沌同步问题转化成了光滑系统的零解稳定性, 并给出了同步的条件. 具体安排如下:

在第一节, 通过广义哈密顿系统和观测器法, 本文重新设计了非光滑系统, 得到光滑的误差系统, 从而研究了其零解稳定性, 给出同步的条件; 在第二节, 本文对带干摩擦和碰撞的 Duffing 振子分别研究了混沌同步; 最后给出了本文的结论.

1 非光滑系统的混沌同步

考虑如下非光滑系统:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n \quad (1)$$

其中 $f \in R^n$ 是非光滑的.

通过广义哈密顿系统, 方程(1)重新被表示为:

$$\dot{x} = J_1(x) \frac{\partial H}{\partial x} + S(x) \frac{\partial H}{\partial x} + F_1(x, t) \quad (2)$$

其中 $H(x)$ 为能量函数, 在 R^n 中全局正定, 如果 $H = \frac{1}{2} x^T M x$ (M 是常的, 对称的, 正定矩阵), $\frac{\partial H}{\partial x} = Mx$; $J_1(x) + J_1^T(x) = 0$, $S(x) = S^T(x)$, $J_1(x)$ 和 $S(x)$ 是光滑的, 而 $F_1(x, t)$ 是非光滑的. 根据 $H(x)$ 和 $J_1(x)$, $S(x)$, $F_1(x, t)$ 的不同表达式, 方程(2)的形式不唯一. 其具体形式之一可为:

$$\dot{x} = (J(x) + I) \frac{\partial H}{\partial x} + S \frac{\partial H}{\partial x} + F(x, t)$$

或
$$\dot{x} = J(x) \frac{\partial H}{\partial x} + (I + S) \frac{\partial H}{\partial x} + F(x, t) \quad (3)$$

在这里 $J(x) + J^T(x) = 0$, I 是常的反对称矩阵, S 是常的对称矩阵, 而 $F(x, t)$ 是非光滑的.

利用观测器方法, 方程(3)又可重新被设计:

$$\begin{cases} \dot{x} = J(y) \frac{\partial H}{\partial x} + (I + S) \frac{\partial H}{\partial x} + F(x, t) \\ y = C \frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (4)$$

其中 y 是系统的输出量, 矩阵 C 是常数矩阵. 此时, 把方程(4)作为驱动系统.

令 ξ 和 η 分别为 x 和 y 的扰动, 则方程(4)相应的响应系统为

$$\begin{cases} \dot{\xi} = J(y) \frac{\partial H}{\partial \xi} + (I + S) \frac{\partial H}{\partial \xi} + F(y, t) + K(y - \eta) \\ \eta = C \frac{\partial H}{\partial \xi} \end{cases} \quad (5)$$

其中 K 是常数矩阵. 接下来, 本文主要研究矩阵 K 满足什么条件时, 系统(4)和(5)能够达到完全同步.

若记 $e(t) = x(t) - \xi(t)$, $e_y = y - \eta$, 那么方程(4)和(5)的误差系统为:

$$\begin{cases} \dot{e} = J(y) \frac{\partial H}{\partial e} + (I + S - KC) \frac{\partial H}{\partial e} \\ e_y = C \frac{\partial H}{\partial e} \quad e_y \in R^m \end{cases}$$

$$\text{或} \begin{cases} \dot{e} = (J(y) + I - \frac{1}{2}(KC - C^T K^T)) \frac{\partial H}{\partial e} + (S - \frac{1}{2}(KC + C^T K^T)) \frac{\partial H}{\partial e} \\ e_y = C \frac{\partial H}{\partial e} \quad e_y \in R^m \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\frac{\partial H}{\partial e} = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial \xi} = M(x - \xi) = Me$.

若系统(1)是第二类非光滑系统, 状态变量连续, 并且在对其重新设计的过程中, 方程(4)中只有是非光滑的而方程(5)中也含有 $F(y, t)$, 因此相减后得到的误差系统(6)是光滑的; 若系统(1)是第三类非光滑系统, 状态变量不连续, 这时方程(4)和(5)相减后得到的误差系统还是非光滑的, 此时仍用光滑系统(6)近似代替. 因此不管系统(1)是哪类非光滑系统, 系统(4)和(5)的同步问题最终都转化成研究光滑系统(6)的零解的稳定性. 记 $W = I + S$. 而在文献[9]中, 作者指出误差系统(6)的零解是指数渐近稳定的当且仅当存在 K 使得

$$[W - KC] + [W - KC]^T = [S - KC] + [S - 2KC]^T = 2[S - \frac{1}{2}(KC + C^T K^T)] \quad (7)$$

是负定的.

2 应用与仿真

2.1 带干摩擦的 Duffing 振子

方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = p \cos(\omega t) + cx_1(1 - x_1^2) - hx_2 - d(\frac{\mu_0 - \mu_1}{1 + \eta_1 |x_2|} + \mu_0 + \eta_2 x_2^2) \text{sign}(x_2) \end{cases} \quad (8)$$

该系统是非光滑的, 属于第二类非光滑系统. 令 $H(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, 可得 $I = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-c}{2} \\ -\frac{1-c}{2} & 0 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1+c}{2} \\ \frac{1+c}{2} & -h \end{bmatrix}$. 令 $y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, 则 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ p \cos(\omega t) - cx_1^3 - d(\frac{\mu_0 - \mu_1}{1 + \eta_1 |x_2|} + \mu_0 + \eta_2 x_2^2) \text{sign}(x_2) \end{bmatrix}$$

且 $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_3 \\ K_2 & K_4 \end{bmatrix}$. 根据方程(6), 系统(8)的误差系统为

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-c-K_3+K_2}{2} \\ -\frac{1-c-K_3+K_2}{2} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial e} + \begin{bmatrix} -K_1 & \frac{1+c-K_3+K_2}{2} \\ \frac{1+c-K_3+K_2}{2} & -h-K_4 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial e} \quad (9)$$

利用条件(7)误差系统(9)的零解是渐近稳定的当且仅当选择合适的 K_1, K_2, K_3 和 K_4 使得

$$2 \begin{bmatrix} -K_1 & \frac{1+c-K_3+K_2}{2} \\ \frac{1+c-K_3+K_2}{2} & -h-K_4 \end{bmatrix} \text{是负定的,}$$

即 $K_1 > 0; 4K_1(h + K_4) > (1 + c - K_2 - K_3)^2$.

在文献[5]中, 作者指出当系统方程(8)选取如下参数: $c = 1, h = 0.25, p = 0.3, \omega = 1, \eta_1 = 1.42, \eta_2 = 0.005, \mu_0 = 0.25, \mu_1 = 0.05, d = 0.08$, 系统是混沌的, 如图1所示. 本文选取 $K_1 = 1, K_2 = 1, K_3 = 1, K_4 = 0.75$, 从图3和图4易见误差系统(9)的状

$$2 \begin{bmatrix} -K_1 & \frac{1+c-K_3+K_2}{2} \\ \frac{1+c-K_3+K_2}{2} & -h-K_4 \end{bmatrix} \text{是负定的,}$$

即 $K_1 > 0; 4K_1(h + K_4) > (1 + c - K_2 - K_3)^2$.

在文献[5]中, 作者指出当系统方程(8)选取如下参数: $c = 1, h = 0.25, p = 0.3, \omega = 1, \eta_1 = 1.42, \eta_2 = 0.005, \mu_0 = 0.25, \mu_1 = 0.05, d = 0.08$, 系统是混沌的, 如图1所示. 本文选取 $K_1 = 1, K_2 = 1, K_3 = 1, K_4 = 0.75$, 从图3和图4易见误差系统(9)的状

态变量很快趋于零,这说明驱动系统(8)及其相应的形如方程(5)的响应系统很快达到了完全同步.

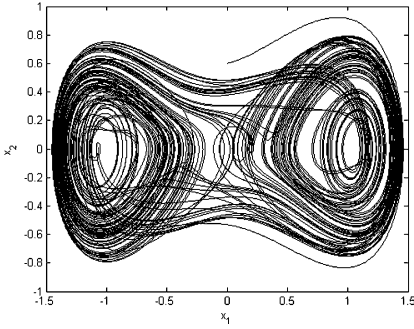


图1 系统(8)的相位图

Fig.1 Phase diagram of equation (8)

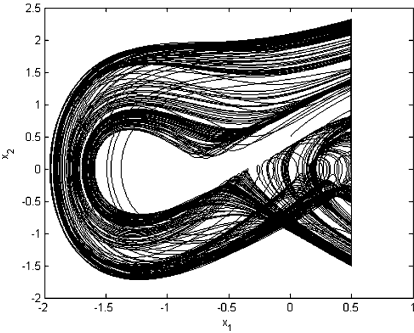


图2 系统(10)的相位图

Fig.2 Phase diagram of Equation (10)

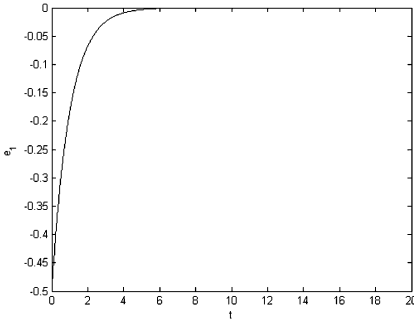


图3 误差系统(9)的 e1 随时间变化的历程图

Fig.3 Time history of e1 in error system (9)

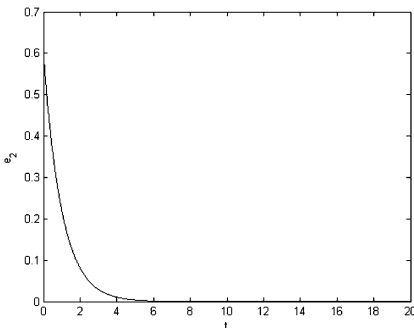


图4 误差系统(9)的 e2 随时间变化的历程图

Fig.4 Time history of e2 in error system (9)

2.2 带碰撞的 Duffing 振子

方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1 < X_0 \\ \dot{x}_2 = p\cos(\omega t) + cx_1(1-x_1^2) - hx_2 & (10) \\ x_{2a} = -Rx_{2b} & x_1 \geq X_0 \end{cases}$$

该系统是非光滑的,属于第三类非光滑系统.

令 $H(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, 可得 $I = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-c}{2} \\ -\frac{1-c}{2} & 0 \end{bmatrix}$, $S =$

$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1+c}{2} \\ \frac{1+c}{2} & -h \end{bmatrix}$. 令 $y = [x_1]$, 则 $C = [1 \ 0]$, $J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, F

$(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ p\cos(\omega t) - cx_1^3 \end{bmatrix}$, 且 $K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$, 根据方程(6), 系统(10)的误差系统为

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-c+K_2}{2} \\ -\frac{1-c+K_2}{2} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial e} + \begin{bmatrix} -K_1 & \frac{1+c-K_2}{2} \\ \frac{1+c-K_2}{2} & -h \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial e} \quad (11)$$

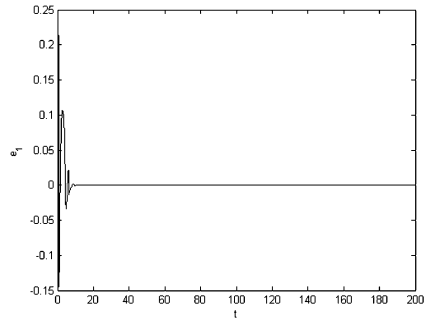


图5 误差系统(11)的 e1 随时间变化的历程图

Fig.5 Time history of e1 in error system (11)

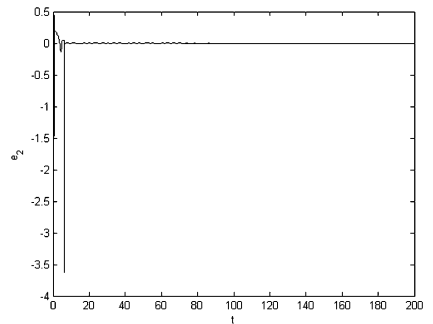


图6 误差系统(11)的 e2 随时间变化的历程图

Fig.6 Time history of e2 in error system (11)

利用条件(7)误差系统(11)的零解是渐近稳

定的当且仅当选择合适的 K_1 和 K_2 使得

$$2 \begin{bmatrix} -K_1 & \frac{1+c-K_2}{2} \\ \frac{1+c-K_2}{2} & -h \end{bmatrix} \text{是负定的, 即 } K_1 > 0;$$

$$K_1 h > (1+c-K_2)^2.$$

在文献[5]中,作者指出当系统方程(10)选取如下参数: $X_0 = 0.5, R = 0.65, c = 1, h = 0.1, p = 1, \omega = 1$, 系统是混沌的, 如图2所示. 本文选取 $K_1 = 1, K_2 = 1.5$, 从图5和图6易见误差系统(11)的状态变量很快趋于零, 这说明驱动系统(10)及其相应的形如方程(5)的响应系统很快达到了完全同步.

3 结论

随着对非光滑系统非线性动力学特性研究的不断深入, 非光滑系统的混沌同步成为人们研究的重要内容之一, 然而目前对非光滑系统混沌同步的研究主要集中在 Chua 电路. 本文应用广义哈密顿系统和观测方法, 研究了一般非光滑系统的混沌同步, 数值结果也表明该方法的重要性.

参 考 文 献

- 1 Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, Valladares D L, Zhou C S. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 2002, 366: 1 ~ 101
- 2 王兴元, 武相军. 耦合发电机系统的自适应控制与同步. *物理学报*, 2006, 55(10): 5077 ~ 5082 (Wang X Y, Wu X

- J. Adaptive control and synchronization of a coupled dynamo system. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(10): 5077 ~ 5082 (in Chinese)
- 3 陈菊芳, 张入元, 彭建华. 脉冲驱动离散混沌系统同步的实验与理论研究. *物理学报*, 2003, 52(7): 1589 ~ 1594 (Chen J F, Zhang R Y, Peng J H. Experimental study for impulsive synchronization of a discrete chaotic system. *Acta Physica Sinica*, 2003, 52(7): 1589 ~ 1594 (in Chinese))
- 4 关新平, 何宴辉, 范正平. 扰动情况下一类混沌系统的观测器同步. *物理学报*, 2003, 52(2): 276 ~ 280 (Guan X P, He Y H, Fan Z P. Synchronization of a class of chaotic systems in the presence of perturbation by an observer. *Acta Physica Sinica*, 2003, 52(2): 276 ~ 280 (in Chinese))
- 5 Andrzej S, Tomasz K. Using chaos synchronization to estimate the largest Lyapunov exponent of nonsmooth systems. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2000, 4: 207 ~ 215
- 6 Li W L, Chen X Q. Projective synchronization of Chua's chaotic system with dead-zone in the control input. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2009, 14: 3100 ~ 3107
- 7 Wang Y W, Wen C Y, Xiao J W, Guan Z H. Impulsive synchronization of Chua's oscillators via a single variable. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 29: 198 ~ 201
- 8 Hassan S, Aria A. Adaptive chaos synchronization in Chua's systems with noisy parameters. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, 79: 233 ~ 241
- 9 Sira - Ram' rez, H, Cruz - Hern' andez C. Synchronization of chaotic systems: A Generalized Hamiltonian systems approach. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 2001, 11(5): 1381 ~ 1395

THE CHAOTIC SYNCHRONIZATION OF NON-SMOOTH SYSTEMS*

Fu shihui

(Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou, Henan 450001, China)

Abstract Through a Generalized Hamiltonian system and observer approach, the chaotic synchronization of non-smooth systems was transformed into the stability of zero solution of smooth systems, thus the condition of the chaotic synchronization was obtained. Moreover, the Duffing Oscillator with dry friction and impact and their chaotic synchronization were studied. The numerical results agreed well with the theoretical analysis.

Key words Generalized Hamiltonian system, chaotic synchronization, dry friction, impact