

# 无结构内阻尼磁性刚体航天器姿态 动力学稳定性分析\*

解加芳 吕昕东 王皓宇 邹杰涛

(北方工业大学理学院,北京 100144)

**摘要** 在地球万有引力场和磁场中,考虑大气阻力的条件下,讨论无结构内阻尼的磁性刚体航天器在圆轨道上出现的混沌问题.根据动量矩定理建立动力学模型,利用 Melnikov 方法证明发生混沌的可能性,并利用数值仿真分析了系统的动力学行为.理论结果与数值仿真结果相一致.

**关键词** 航天器姿态动力学, 混沌, Melnikov 方法, 数值仿真

## 引言

由于航天器在近地轨道运行时会受到外界扰动而发生混沌行为<sup>[1]</sup>,从而影响到航天器的正确姿态,而航天器保持正确的姿态对航天器的正常工作至关重要.航天器在近地轨道运行时会受到地球万有引力,磁场力等因素的影响.本文在考虑大气阻力,忽略结构内阻尼的情况下,研究磁场力对航天器混沌行为的影响.因此本文研究的航天器的混沌现象具有实际意义.

关于航天器姿态运动中所出现的混沌现象的研究已经取得了一定的进展<sup>[2,3,4]</sup>.Melnikov<sup>[5]</sup>方法被证实是解决此类问题最有效的方法.近来一些学者应用该方法研究了受不同类型扰动的刚体航天器姿态动力学中的混沌现象,并取得了一定的成就.例如:在文献[6]中,Tong 和 Rimrott 研究了存在结构内阻尼的椭圆轨道上天平动航天器的混沌姿态运动,在文献[7],[8]中,Gray G. L 等人先后研究了受周期扰动的航天器姿态运动的混沌现象.在文献[9]中,陈立群和刘延柱研究了同时受地球万有引力和磁场力作用的磁性刚体航天器的混沌姿态运动,但是没有考虑大气阻力.文献[10]中,在考虑了结构内阻尼的条件下,陈立群和刘延柱研究了磁性刚体航天器在万有引力场和磁场中的混沌行为,也没有考虑大气阻力.考虑到航天器受到多种因素扰动,且一般假设空气阻力与角速度平方成正比<sup>[1]</sup>,本文进一步研究了在地球万有引力,磁场力作用下,且空气阻力与角速度平方成正比的磁

性刚体航天器姿态运动中的混沌行为.

## 1 磁性刚体航天器动力学模型

以地心  $O_e$  为原点建立惯性坐标系  $O_e - X_0Y_0Z_0$ ,其中  $X_0$  指向升交点, $Z_0$  轴沿地球极轴,设该坐标系的基矢量为  $i_0, j_0, k_0$ . 设轨道面倾角为  $\theta$ ,且  $\theta \ll 1$ . 轨道角速度为  $w_c$ ,以磁性刚体航天器的质心  $O$  为原点建立主轴坐标系  $O - xyz$ ,其基矢量为  $i', j', k'$ . 磁性刚体航天器的磁矩  $I$  沿  $x$  轴方向. 建立轨道坐标  $O - XYZ$ ,其中  $X$  轴沿  $O_e$  到  $O$  的失径, $Z$  轴沿轨道平面法线,其基矢量为  $i, j, k$ . 设轨道平面内的天平动角为  $\phi$ ,航天器的姿态由  $\phi$  确定,磁性刚体航天器的主惯性矩分别为  $A, B, C$ ,不失一般性,设  $C > B > A$ ,设地球磁场磁极轴与地球极轴重合.

地球磁场的磁感应强度  $H_m$  在坐标系  $O_e - X_0Y_0Z_0$  的投影为:

$$H_m = \left( -\frac{3\mu_m}{2r^3}\theta\sin 2w_c t \right) i_0 + \left[ -\frac{3\mu_m}{2r^3}\theta(1 - \cos 2w_c t) \right] j_0 + \frac{\mu_m}{2r^3} k_0 \quad (1)$$

其中  $\mu_m$  为地球磁场的磁矩常数, $r$  为轨道半径.

磁性刚体航天器的磁矩矢量为

$$I = Ii' = I(\cos\phi i + \sin\phi j) \quad (2)$$

磁场对磁性刚体航天器的作用力矩为

$$M_m = H_m \times I \quad (3)$$

磁性刚体航天器所受的万有引力场力矩为

$$M_g = -3w_c^2(B - A)\sin\phi\cos\phi k \quad (4)$$

大气阻力矩与角速度平方成正比

$$M_c = c \dot{\phi}^2 \tag{5}$$

其中  $c$  为比例系数

磁性刚体航天器相对其质心的动量矩为

$$L = C(w + \frac{d\phi}{dt_p})k \tag{6}$$

将  $(i_0, j_0, k_0)$  沿  $(i, j, k)$  投影有

$$\begin{cases} i_0 = \cos w_c t i - \sin w_c t j \\ j_0 = \sin w_c t i + \cos w_c t j - \theta k \\ k_0 = \theta \sin w_c t i + \theta \cos w_c t j + k \end{cases}$$

根据刚体动量矩定理有

$$\frac{dL}{dt} = M_g + M_m + M_c \tag{7}$$

将刚体绕质心动量矩定理向轨道平面法向投影,得到

$$\begin{aligned} C \ddot{\phi} &= -3w_c^2(B-A) \sin\phi \cos\phi - \\ &\theta I_{\mu_m} r^{-3} (2\sin\phi \sin w_c t + \cos\phi \cos w_c t) - c \dot{\phi} \end{aligned} \tag{8}$$

引入无量纲时间  $\tau = w_c t$ , 及无量纲参数  $K = (B-A)/2C, \alpha = I_{\mu_m}/r^3 C w_c^2, \beta = c/Cw_c$

无量纲方程为

$$\ddot{\phi} + K \sin 2\phi + \alpha (2 \sin\phi \sin\tau + \cos\phi \cos\tau) + \beta \dot{\phi}^2 = 0 \tag{9}$$

其中导数是关于时间  $\tau$  求导.

## 2 Melnikov 分析

令  $x = \phi, \dot{x} = y$ , 无量纲方程(9)的等价系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -K \sin 2x - \alpha (2 \sin x \sin \tau + \cos x \cos \tau) - \beta y^2 \end{cases} \tag{10}$$

其中  $K, \alpha, \beta$  分别表示万有引力, 磁场力, 大气阻力强弱的物理量.

当  $\alpha, \beta$  均为小量时, 设  $\alpha = \varepsilon \alpha_1, \beta = \varepsilon \beta_1$ , 其中  $\varepsilon$  为小参数.

等价系统(10)变为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -K \sin 2x - \varepsilon [\alpha_1 (2 \sin x \sin \tau + \cos x \cos \tau) + \beta_1 y^2] \end{cases} \tag{11}$$

当  $\varepsilon = 0$  时, 磁性刚体航天器没有受到扰动, 系统(11)存在三个奇点.

$$\begin{cases} p_1: x = -\pi/2, y = 0 \\ p_2: x = \pi/2, y = 0 \\ p_3: x = 0, y = 0 \end{cases} \tag{12}$$

鞍点  $P_1, P_2$  由两条异宿轨道连接, 其参数方程

为

$$\begin{cases} x_{\pm}(\tau) = \pm \arcsin(\tanh \sqrt{2K}\tau) \\ y_{\pm}(\tau) = \pm \sqrt{2K} \operatorname{sech} \sqrt{2K}\tau \end{cases} \tag{13}$$

所以当  $\varepsilon = 0$  时, 磁性刚体航天器没有发生混沌行为.

当  $\varepsilon \neq 0$  时, 磁性刚体航天器受地球磁场引力和大气阻力的影响, Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M_{\pm}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -y_{\pm}(\tau) \{ \beta_1 y_{\pm}^2(\tau) + \\ &\alpha_1 [2 \sin x_{\pm}(\tau) \sin(\tau+t) + \\ &\cos x_{\pm}(\tau) \cos(\tau+t)] \} d\tau \\ M_{\pm}(t) &= -\alpha_1 \pi \left( \frac{1}{2K} + \frac{1}{\sqrt{2K}} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{\pi}{2\sqrt{2K}} \right) \times \\ &\quad \sin t \pm \beta_1 K \pi \end{aligned} \tag{14}$$

当  $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{K}{\left( \frac{1}{2K} + \frac{1}{\sqrt{2K}} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{\pi}{2\sqrt{2K}} \right)}$  时,  $M_{\pm}(t)$  有

简单零点. 因此系统受到的扰动是 Smale 映射意义下的混沌.

所以当  $\varepsilon \neq 0$  时, 磁性刚体航天器发生混沌行为.

## 3 数值仿真

取定  $K=0.75, \beta=0.001$ , 当  $\alpha=0.0001$  时, 数值仿真图如图1, 图3, 图5. 当  $\alpha=0.125$  时, 数值仿真图如图2, 图4, 图6. 随着  $\alpha$  的增大, 混沌行为越来越严重.

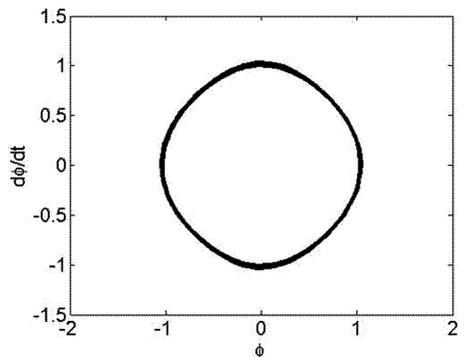


图1 相轨线

Fig. 1 phase trajectory

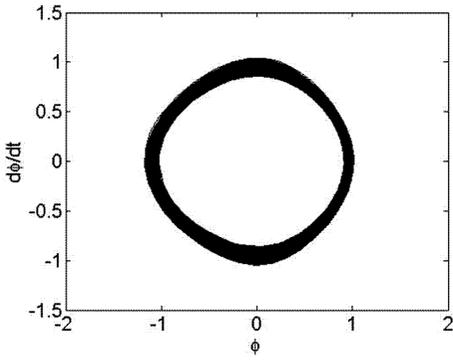


图2 相轨线

Fig. 2 phase trajectory

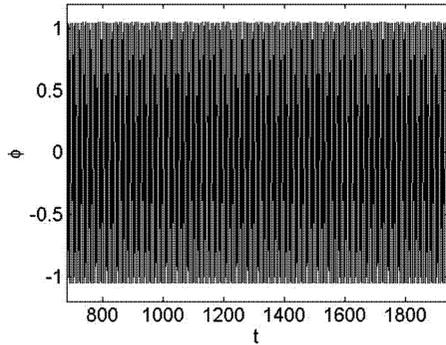


图3 时间历程

Fig. 3 time history

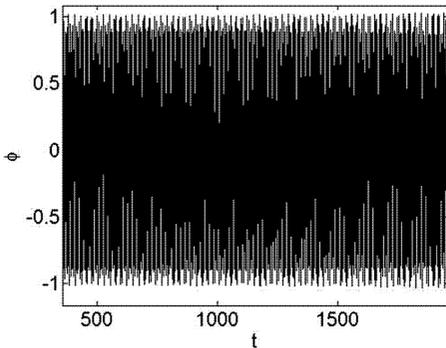


图4 时间历程

Fig. 4 time history

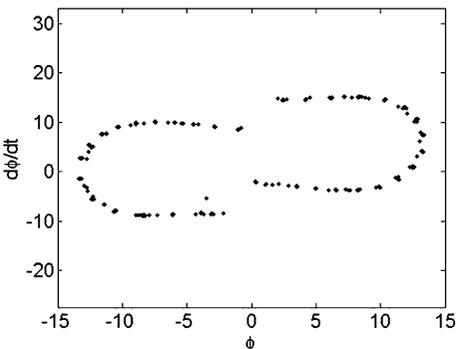


图5 Poincaré映射

Fig. 5 Poincaré map

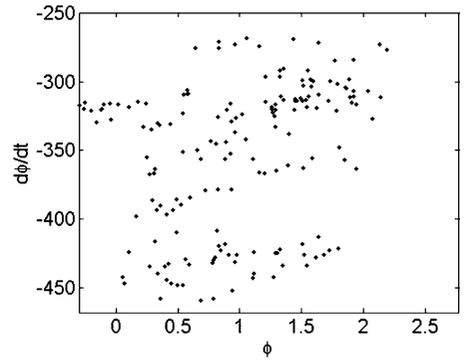


图6 Poincaré映射

Fig. 6 Poincaré map

## 4 结论

本文在考虑大气阻力的情况下,忽略磁性刚体航天器的结构内阻尼,利用动量矩定理建立磁性刚体航天器在万有引力场和磁场中的姿态动力学运动方程.应用 Melnikov 方法证明了系统存在混沌运动,并采用数值仿真研究了系统的动力学行为.计算结果表明磁场力系数和大气阻力系数满足上述关系式时,系统出现混沌行为.且当磁场力系数变大时对应的不规则运动越激烈,系统的混沌行为也越严重.

## 参 考 文 献

- 1 刘延柱. 航天器姿态动力学. 北京:国防工业出版社, 1995 (Liu Y Z. Attitude dynamics of spacecrafts. Beijing: National Defence Industry press, 1995)
- 2 刘延柱, 陈立群, 彭建华. 航天器混沌姿态运动研究进展. 自然科学进展, 1998, 8(4): 386 ~ 390 (Liu Y Z, Chen L Q, Peng J H. Survey of research on chaotic attitude motion of spacecraft. *Progress in Natural Science*, 1998, 8(4): 386 ~ 390 (in Chinese))
- 3 岳宝增. 充液柔性航天器非线性姿态动力学及再定向姿态机动. 动力学与控制学报, 2010, 8(1): 74 ~ 76 (Yue B Z. Nonlinear attitude dynamics and reorientation maneuver for completely liquid-filled flexible spacecraft. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(1): 74 ~ 76 (in Chinese))
- 4 岳宝增. 充液航天器全局姿态机动及控制研究. 动力学与控制学报, 2008, 6(2): 118 ~ 121 (Yue B Z. Study on the global attitude maneuver and control for the liquid-filled spacecraft. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(2): 118 ~ 121 (in Chinese))
- 5 Inarrea M, Lanchares V. Chaos in the reorientation

- process of a dual – spin spacecraft with the time – dependent moments of inertia. *International Journal Bifurcation and chaos*, 2000, 10: 997 ~ 1018
- 6 Tong X, Rimrott F P J. Numerical studies on chaotic planar motion of satellites in an elliptic orbit. *Chaos Solitons Fractals*, 1991, 1: 179 ~ 186
- 7 Gray G L, Dobson L, Kammer D C. Chaos in a spacecraft attitude maneuver due to time periodic perturbations. *Journal of applied mechanics*, 1996, 63 (6): 501 ~ 508
- 8 Gray G L, Andre p M. Analytical criterion for chaotic dynamics in flexible satellites with nonlinear controller damping. *Journal of Guidance, control and dynamics*, 1998, 21 (4): 558 ~ 565
- 9 陈立群,刘延柱. 磁性刚体航天器的混沌姿态运动. 应用数学和力学, 2003, 24(4): 387 ~ 389 (Chen L Q, Liu Y Z. Chaotic attitude motion of a magnetic rigid spacecraft. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, 24 (4): 387 ~ 389 (in Chinese))
- 10 陈立群,刘延柱. 一类复杂力场中磁性刚体航天的混沌姿态运动. 空间科学学报, 2001, 24(1): 80 ~ 85 (Chen L Q, Liu Y Z. Chaotic attitude motion of a magnetic rigid spacecraft in complex force. *Chinese Journal of Space Science*, 2001, 24 (1): 80 ~ 85 (in Chinese))

## ANALYSIS ON THE CHAOTIC ATTITUDE MOTION OF A MAGNETIC RIGID SPACECRAFT WITHOUT INTERNAL DAMPING IN ORBIT NEAR EQUATORIAL PLANE OF THE EARTH \*

Xie Jiafang Lv Xindong Wang Haoyu Zou Jietao

(College of Sciences, North China University of Technology, Beijing 100144, China)

**Abstract** In the environment of earth gravitation and magnetic field, the influence of aerodynamic drag was considered. The chaotic phenomenon was discussed when the magnetic rigid spacecraft without internal damping was on a circular orbit round the earth. The dynamical model was established by the law of moment of momentum. The Melnikov analysis was carried out to verify that the chaotic phenomenon is possible, and the numerical simulations were used to analyze the systematic dynamical motion. The theory analysis results agree with numerical simulations.

**Key words** spacecraft attitude dynamics, chaos, Melnikov's method, numerical simulation