

纵横向耦合轴向运动梁的自由振动响应研究*

黄建亮 陈树辉

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

摘要 研究轴向运动梁在纵向与横向振动耦合下的自由振动响应, 尤其是在横向第 1, 2 固有频率之比 ω_1/ω_2 接近 1:3 内共振条件下的系统响应. 利用哈密顿原理建立非惯性参考系下轴向运动梁的振动微分方程, 采用分离变量法分离时间变量和空间变量并利用 Galerkin 方法离散, 得到了运动梁含有 2 次和 3 次非线性项的运动微分方程. 利用增量谐波平衡法 (IHB 法) 分析纵向与横向振动耦合时非线性振动复杂的频幅响应曲线, 探讨了相互耦合下系统在横向前 2 阶固有频率附近没有横向外激励作用下的自由振动响应, 揭示了复杂而有趣的非线性现象.

关键词 轴向运动梁, 非线性振动, IHB 法, 耦合, 内共振

引言

在工程应用中, 轴向运动体系作为传送材料或能量传输非常普遍, 例如, 磁带、能量传输带、锯片等. 这种体系按其抗弯刚度的不同可分为运动梁或运动绳的模型, 过去几十年来, 许多学者对这类体系进行研究^[1,2], 多数集中在模态分析或计算方法上. 早期对该轴向运动系统的研究集中在线性振动问题的分析上, 包含了固有频率、模态分析和运动临界速度等, 然而线性振动分析解释不了振幅大或在临界速度附近出现的一些自激振动、参数振动、内共振、次谐波共振、超谐波共振、组合谐波共振、跳跃问题等非线性振动特有的现象, 这些共振点会给工程设计带来隐患, 仅研究线性问题无能为力, 所以非常有必要考虑该类系统的非线性振动问题.

Wickert 和 Mote 用特征函数来研究轴向运动体系的横向振动^[3], Riedel 等利用多尺度法研究了轴向运动体系的内共振^[4]. Chen^[5]很好地总结了 2005 年之前的运动梁\绳的研究工作, 最近丁虎和陈立群对轴向变速运动黏弹性梁的受迫振动响应作了分析^[6]. Öz 等^[7]研究了变速下运动梁的横向振动的稳定性问题. Sze 等^[8,9]应用 IHB 法研究了在恒定速度下运动梁的横向振动的基谐波、超谐波、次谐波等一系列复杂的稳态响应, 陈树辉等进一步^[10]研究了内共振的情况, 以及利用多元 L-P

法研究运动梁的横向非线性振动^[11]. 张伟等^[12]分析具有 Kelvin 黏弹性材料的传动带, 利用多尺度法和 Galerkin 离散法得到在 1:3 内共振时平均方程, 用数值模拟方法得到系统的周期振动和混沌动力学. 由于运动梁的纵向振动频率远高横向振动频率, 上述的研究工作大多数是直接忽略纵向振动对横向振动的影响. 然而, 在高速传动或振动幅度大时, 纵向振动对系统振动响应的影响将不可忽略, 并直接影响系统的内共振特征.

本文探讨在纵向振动和横向振动耦合作用下轴向运动梁的非线性自由振动响应, 应用 IHB 法深入分析在横向第 1, 2 固有频率 1:3 内共振条件下系统的响应特征.

1 运动方程

图 1 所示为轴向运动梁的示意图. 梁在两端铰支的条件下以轴向速度 V 运动, 梁的横截面积为 A , 质量密度 ρ , 长度为 L , 抗弯刚度为 EI , P 为轴向张力, X 为轴向坐标, XOZ 是固定坐标系. 记运动梁的横向位移为 $W(X, T)$, 纵向位移 $U(X, T)$, 为 T 为时间. 根据哈密顿原理 (Hamilton's Principle) 建立梁的运动微分方程, 得到下列无量纲化的纵向与横向耦合的非线性振动方程^[8].

$$(u_{,tt} + 2vu_{,xt} + v^2u_{,xx}) - v_1^2(u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2)_{,x} = 0 \quad (1)$$

$$w_{,tt} + 2vw_{,xt} + v^2 w_{,xx} - \{ [1 + v_1^2 (u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2)] w_{,x} \}_{,x} + v_f^2 w_{,xxxx} = 0 \quad (2)$$

运动梁的边界条件为

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (3)$$

$$w(0, t) = w(1, t) = 0,$$

$$w_{,xx}(0, t) = w_{,xx}(1, t) = 0 \quad (4)$$

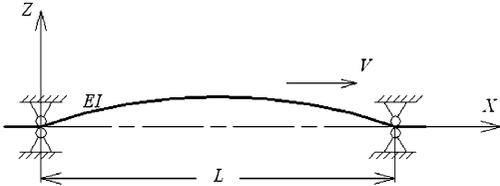


图1 运动梁的以速度运动的示意图

Fig.1 Schematic of an axially moving beam with velocity V

其中无量纲量

$$u = U/L, w = W/L, x = X/L, t = T\sqrt{P/\rho A L^2},$$

$$v = V/\sqrt{P/\rho A}, v_1 = \sqrt{EA/P}, v_f = \sqrt{EI/PL^2}$$

2 GALERKIN 方法

首先采用变量分离,把时间变量 t 和空间变量 x 进行分离,为此,令

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N q_j^u(t) \sin j\pi x \quad (5)$$

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^M q_j^w(t) \sin j\pi x \quad (6)$$

为简便计,只取 $N = M = 2$,将式(5)和(6)代入式(1)和(2)后,应用 Galerkin 方法进行运算,从而得到下列方程

$$\ddot{q}_1^u - \frac{16}{3} v \dot{q}_2^u - (v^2 - v_1^2) \pi^2 q_1^u + v_1^2 \pi^3 q_1^w q_2^w = 0 \quad (7)$$

$$\ddot{q}_2^u + \frac{16}{3} \dot{q}_1^u - 4(v^2 - v_1^2) \pi^2 q_2^u + \frac{1}{2} v_1^2 \pi^3 (q_1^u)^2 = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1^w - \frac{16}{3} v \dot{q}_2^w + (v_f^2 \pi^2 - v^2 + 1) \pi^2 q_1^w + \\ v_1^2 \pi^3 q_1^u q_2^w + v_1^2 \pi^3 q_1^w q_2^u + \\ \frac{3}{8} v_1^2 \pi^4 (q_1^w)^3 + 3v_1^2 \pi^4 q_1^w (q_2^w)^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2^w + \frac{16}{3} v \dot{q}_1^w + 4(4\pi^2 v_f^2 - v^2 + 1) \pi^2 q_2^w + \\ v_1^2 \pi^3 q_1^u q_1^w + 3v_1^2 \pi^4 (q_1^w)^2 q_2^w + \\ 6v_1^2 \pi^4 (q_2^w)^3 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

由方程(7)~(10)得知,阻尼矩阵具有反对称性质,所以该类系统具有陀螺特性,且方程中的恢复

力包含了2次和3次非线性项.方程(7)和(8)及方程(9)和(10)可表示成矩阵形式

$$M^u \ddot{q}^u + C^u \dot{q}^u + K^u q^u + K_2^w(q^w) q^w = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} M^w \ddot{q}^w + C^w \dot{q}^w + K^w q^w + K_2^u(q^u) q^w + \\ K_3^w(q^w) q^w = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $q^u = [q_1^u, q_2^u]^T$, $q^w = [q_1^w, q_2^w]^T$, 其它系数矩阵由于篇幅所限不予列出,可参见文[8].最后,式(11)和(12)可组合成

$$M \dot{q} + C \dot{q} + K q + K_2(q) q + K_3(q) q = 0 \quad (13)$$

其中:

$$q = [q^u, q^w]^T, M = \begin{bmatrix} M^u & 0 \\ 0 & M^w \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} C^u & 0 \\ 0 & C^w \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K^u & 0 \\ 0 & K^w \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & K_2^w \\ K_2^u & 0 \end{bmatrix}, K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_3^w \end{bmatrix}$$

3 增量谐波平衡法 (IHB 法)

增量谐波平衡法(IHB法)自提出以来,在解决非线性振动的问题被广泛应用. Sze, 陈树辉等^[8,9]进一步推广到适合于含有陀螺系统特性的轴向运动梁的横向非线性振动.

引入新的时间变量 τ , 令

$$\tau = \omega t \quad (14)$$

其中 ω 为系统响应频率.

方程(13)变为

$$\omega^2 M \dot{q}'' + \Omega C \dot{q}' + [K + K_2(q) + K_3(q)] q = 0 \quad (15)$$

IHB 法的第一步是 Newton - Raphson 的增量过程. 令 q_0 和 ω_0 表示振动过程中的某一状态, 则其邻近的状态可以表示为增量的形式

$$q_j = q_0 + \Delta q_j \quad (16)$$

$$\omega = \omega_0 + \Delta \omega \quad (17)$$

其中 $j = 1, 2, \dots, m, m = N + M$

将表达式(16), (17)代入方程(15)并略去高阶项, 便得到矩阵形式的增量方程

$$\begin{aligned} \omega_0^2 M \Delta \dot{q}'' + \omega_0 C \Delta \dot{q}' + (K + \\ K_2^* + 3K_3) \Delta q = R - (2\omega_0 M \dot{q}_0'' + \\ C \dot{q}_0') \Delta \omega \end{aligned} \quad (18)$$

$$R = -\{ \omega_0^2 M \dot{q}_0'' + \omega_0 C \dot{q}_0' + [K + K_2(q_0) + K_3(q_0)] q_0 \} \quad (19)$$

其中:

$$\begin{aligned} q_0 &= [q_{10}, q_{20}, \dots, q_{m0}]^T, \\ \Delta q &= [\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_m]^T, \\ K_2^* &= \begin{bmatrix} 0 & K_2^w + (K_2^u)^T \\ 2K_2^u & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

R 是误差向量, 当 q_0, ω_0 为准确解时, 其值为零.

IHB 法的第二步骤是谐波平衡过程. 为此把 q_0 和 Δq 展开成傅里叶级数

$$\begin{aligned} q_{j0} &= \sum_{k=1}^{n_c} a_{j(k-1)} \cos(k-1)\tau + \\ &\sum_{k=1}^{n_s} b_{jk} \sin k\tau = C_s A_j \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Delta q_j &= \sum_{k=1}^{n_c} \Delta a_{jk} \cos(k-1)\tau + \\ &\sum_{k=1}^{n_s} \Delta b_{jk} \sin k\tau = C_s \Delta A_j \end{aligned} \quad (21)$$

其中:

$$\begin{aligned} C_s &= [1, \cos\tau, \dots, \cos(n_c-1)\tau, \\ &\sin\tau, \dots, \sin n_s\tau]^T \\ A_j &= [a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn_c}, b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jn_s}]^T \\ \Delta A_j &= [\Delta a_{j1}, \dots, \Delta a_{jn_c}, \Delta b_{j1}, \dots, \Delta b_{jn_s}]^T \end{aligned}$$

于是,

$$q_0 = SA, \Delta q = S\Delta A \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} S &= \text{diag}[C_s, C_s], A = [A_1, A_2]^T, \\ \Delta A &= [\Delta A_1, \Delta A_2]^T, \end{aligned}$$

将式(22)代入公式(18)并应用 Galerkin 过程, 可以得到以 $\Delta A, \Delta\omega$ 表示的线性方程组.

$$\bar{K}_{mc} \Delta A = \bar{R} - \bar{R}_{mc} \Delta\omega \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{K}_{mc} &= \int_0^{2\pi} S^T [\omega_0^2 MS'' + \omega_0 CS' + \\ &(K + K_2^* + 3K_3)S] d\tau \\ \bar{R} &= \int_0^{2\pi} S^T \{ -[\omega_0^2 MS'' + \omega_0 CS' + \\ &(K + K_2^* + K_3)S] \} d\tau A \\ \bar{R}_{mc} &= \int_0^{2\pi} S^T (2\omega_0 MS'' + CS') d\tau A \end{aligned}$$

方程是一个线性方程组, 其未知量的数目比方程数目多一个. 因此, 求解时必须选定其中一个增量作为控制增量. 如果我们选择 $\Delta\omega$ 作为控制增量的话, 则在给定的增量中, $\Delta\omega$ 是已知值, 其他的增量从下列方程求解得到.

$$\bar{K}_{mc} \Delta A = \bar{R} \quad (24)$$

求得 ΔA 后, 由表达式(15)求得 $\Delta q, q_0$, 再由表达式求得 q , 从而求得新的 \bar{K}_{mc}, \bar{R} , 于是又可以从方程求得 ΔA . 这一过程称为迭代过程. 迭代过程一直进行下去, 直到误差向量 R 小于预先规定的误差值, 此时就得到对应于 ω 的振幅 A , 从而求得原方程的解. 当迭代过程结束, 再给控制增量 ω 增加一个增量 $\Delta\omega$, 于是在新的 ω 值之下进行上述的迭代过程, 以求出对应新的 ω 值的振幅 A . 这一人为给出增量 $\Delta\omega$ 的过程称为 ω 增量过程. 整个非线性振动问题的求解过程就是反复交替应用增量过程和迭代过程.

4 算例

参考文[4]所取的具有工程背景的参数, $v_1^2 = 1123, v_2^2 = 0.03, v = 0.6$. 那么系统的固有频率可由方程(13)线性化后确定, 表示为

$$M\ddot{q} + G\dot{q} + Kq = 0 \quad (25)$$

其中 G 为去除阻尼项之后的具有陀螺性质矩阵系数.

由式(25)得到横向振动的 2 个固有频率为 $\omega_{w1} = 2.82$ 和 $\omega_{w2} = 9.14$, 纵向振动的 2 个固有频率为 $\omega_{w3} = 105.29$ 和 $\omega_{w4} = 210.65$.

在方程(20)中, 取 $n_c = 9, n_s = 8$, 令

$$\begin{aligned} q_1^u &= A_{10} + A_{11} \cos(\tau + \phi_{11}) + A_{12} \cos 2(\tau + \phi_{12}) + \dots, \\ q_2^u &= A_{20} + A_{21} \cos(\tau + \phi_{21}) + A_{22} \cos 2(\tau + \phi_{22}) + \dots, \\ q_3^u &= A_{30} + A_{31} \cos(\tau + \phi_{31}) + A_{32} \cos 2(\tau + \phi_{32}) + \dots, \\ q_2^w &= A_{40} + A_{41} \cos(\tau + \phi_{41}) + A_{42} \cos 2(\tau + \phi_{42}) + \dots \end{aligned}$$

其中 ϕ 为相位差, $A_{jk} = \sqrt{a_{jk}^2 + b_{jk}^2}$. 对于 q_1^u , 因方程(7)和(8)只包含 2 次非线性项, 得到奇数谐波项为零; 而方程(9)和(10)包含 2, 3 次非线性项, 但以 3 次非线性项为主, 得到偶数谐波项为零.

4.1 在横向第一阶固有频率 ω_{w1} 附近振动的情况

图 2 为系统在横向第一阶固有频率附近, 横向振动的各阶幅频响应曲线图, 实线和虚线分别表示为有无纵向振动影响下的响应曲线. 图 2(a) 为 $\Omega/\omega_{w1} - A_{31}$ 的响应(谐波项 A_{33} 太小, 可忽略), 图 2(b) 和(c) 分别为 $\Omega/\omega_{w1} - A_{41}$ 和 $\Omega/\omega_{w1} - A_{43}$ 响应. 从图 2 可看出 A_{31} 在响应过程中占主导, 即该系统的振动以横向的第一模态振动为主. 从图中的实线与虚线对比可看出, 当系统的振幅小时, 纵向振动对横

向振动的影响很小. 而当振幅大时, 纵向振动对横向振动的影响越来越明显, 在同一频率处, 在纵向振动的影响下, 其横向振动的振幅要比没有耦合情况时要大, 说明了部分纵向振动的能量向横向振动转移. 但在整个过程中纵向振动的影响并不会改变对横向振动的非线性特性, 这也是现有大多数文献中不考虑纵向振动影响的主要因素.

在纵向振动的影响下, 图 2 中系统的振动响应从点 ‘A’ ($\Omega/\omega_{w1} = 1.0$) 开始, 谐波项 A_{31}, A_{41} 和 A_{43} 都随着频率的增加而增大到点 ‘B’. 经点 ‘B’, 谐波 A_{31} 和 A_{41} 减小直到点 ‘C’ (对应的振幅为零), 而谐波 A_{43} 继续增加, 此时系统的横向振动响应以第二阶模态为主, 能量从第一阶模态向第二阶模态转移, 即发生了内共振. 经点 ‘C’, 谐波项 A_{31} 随着频率的增加而增大到点 ‘D’, 而谐波项 A_{41} 一开始随着频率的增加而增大, 在 $\Omega/\omega_{w1} = 1.8$ 时会急剧下降到零, 谐波项 A_{43} 在 ‘CD’ 段的响应较为复杂, 在频率为 $\Omega/\omega_{w1} = 1.64, 1.83, 1.85$ 时的振幅为零.

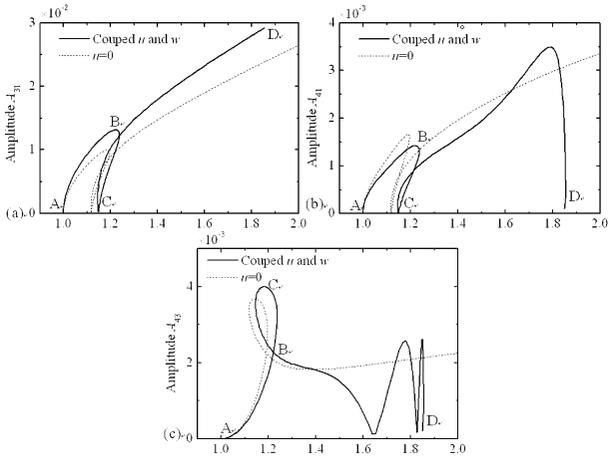


图 2 横向振动的频幅响应:

(a) $\Omega/\omega_{w1} - A_{31}$, (b) $\Omega/\omega_{w1} - A_{41}$, (c) $\Omega/\omega_{w1} - A_{43}$

Fig. 2 Frequency response of the first and second transverse mode:

(a) $\Omega/\omega_{w1} - A_{31}$, (b) $\Omega/\omega_{w1} - A_{41}$, (c) $\Omega/\omega_{w1} - A_{43}$

图 3 所示为对应的在横向第一阶固有频率附近时纵向振动的各模态频幅响应曲线图. 图 3(a) 为纵向第 1 阶模态各谐波响应, 图 3(b) 为纵向第 2 阶谐波响应 (第 4 阶响应太小, 可忽略). 从图 3 得知, 纵向振动响应远小于图 2 中的横向振动响应. 其振动呈现出硬弹簧特性, 在 $\Omega/\omega_{w1} \approx 1.2$ 附近也发生了复杂的内共振现象.

4.2 在横向第二阶固有频率 ω_{w2} 附近振动的情况

图 4 所示为系统在横向第一阶固有频率附近,

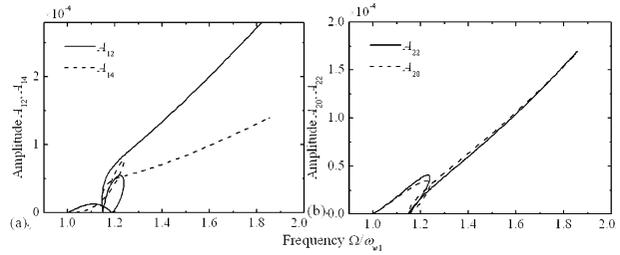


图 3 纵向振动的频幅响应:

(a) $\Omega/\omega_{w1} - A_{12}, A_{14}$, (b) $\Omega/\omega_{w1} - A_{20}, A_{22}$

Fig. 3 Frequency response of the first and second longitudinal mode:

(a) $\Omega/\omega_{w1} - A_{12}, A_{14}$, (b) $\Omega/\omega_{w1} - A_{20}, A_{22}$

横向振动的各阶频幅响应曲线图, 实线和虚线分别表示为有无纵向振动影响下的响应曲线, 系统的横向振动呈硬弹簧特性. 图 4(a) 为 $\Omega/\omega_{w2} - A_{31}$ 的响应 (谐波项 A_{33} 太小, 可忽略), 图 4(b) 和 (c) 分别为 $\Omega/\omega_{w2} - A_{41}$ 和 $\Omega/\omega_{w2} - A_{43}$ 响应. 从图 4 可看出 A_{41} 在响应过程中占主导, 即该系统的振动以横向的第二模态振动为主. 从图中的实线与虚线对比可看出, 当系统的振幅小时, 纵向振动对横向振动的影响很小. 而当振幅大时, 纵向振动对横向振动的影响越来越明显, 在同一频率处, 与其在第一阶固有频率附近振动相反的是, 耦合情况下的横向振动振幅要比没有耦合情况时的要小, 说明了纵向振动会削弱横向振动的能量. 另外在第二阶固有频率附近, 系统没有发生内共振现象, 即横向振动的两个模态之间没有能量的转移.

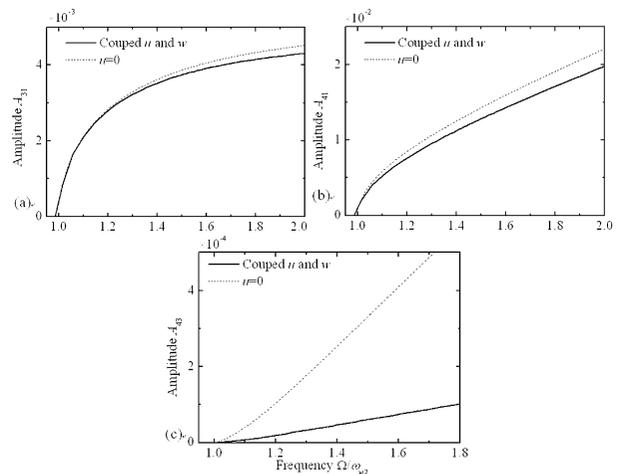


图 4 横向振动的频幅响应:

(a) $\Omega/\omega_{w2} - A_{31}$, (b) $\Omega/\omega_{w2} - A_{41}$, (c) $\Omega/\omega_{w2} - A_{43}$

Fig. 4 Frequency response of the first and second transverse mode:

(a) $\Omega/\omega_{w2} - A_{31}$, (b) $\Omega/\omega_{w2} - A_{41}$, (c) $\Omega/\omega_{w2} - A_{43}$

图 5 所示为对应的在横向第二阶固有频率附近时纵向振动的各模态频幅响应曲线图. 图 5(a)

为纵向第1阶模态各谐波响应,图5(b)为纵向第2阶谐波响应(第4阶响应太小,可忽略).从图5得知,纵向振动响应远小于图4中的横向振动响应.其振动也呈现出硬弹簧特性,然而没有发生内共振现象.

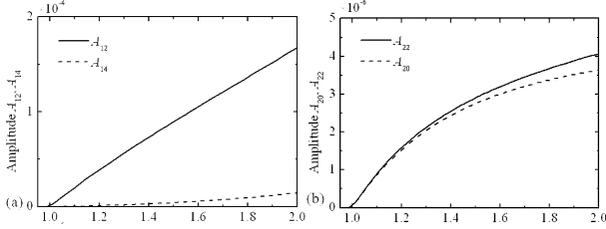


图5 纵向振动的频幅响应:

$$(a) \Omega/\omega_{u2} - A_{12}, A_{14}, (b) \Omega/\omega_{u2} - A_{20}, A_{22}$$

Fig. 5 Frequency response of the first and second longitudinal mode:

$$(a) \Omega/\omega_{u2} - A_{12}, A_{14}, (b) \Omega/\omega_{u2} - A_{20}, A_{22}$$

5 结论

IHB法是一种十分有效的非线性动力学定量分析方法,应用该法对纵向振动与横向振动耦合时,在横向两个模态的固有频率之间成1:3内共振条件下,理论分析了运动梁的系统响应,得到以下3个结论:

(1) 轴向运动梁的横向振动响应远大于纵向振动响应,系统响应以横向振动为主导,纵向振动的影响不会改变横向振动的非线性特性.一般在考虑弱非线性或小振幅情况下,可对系统的横向非线性特性进行简化,忽略纵向振动的影响;

(2) 当系统振幅较大或在强非线性因素的影响下,需考虑纵向振动的影响,此时系统的响应更为复杂.随着系统的振幅越来越大,在横向振动的第一阶固有频率附近,纵向振动对横向振动的影响越来越大,且纵向模态的部分能量会向横向模态转移;而在第二阶固有频率附近,纵向振动反过来会削弱横向振动的能量;

(3) 系统在横向振动的前2阶固有频率1:3内共振条件下,在横向振动的第一阶固有频率附近,模态之间的能量会相互转移,系统发生了内共振;而在第二阶固有频率附近,模态之间无能量转移,系统没有产生内共振.

参 考 文 献

1 Ulsoy AG, Mote Jr CD and Syzmani R. Principal develop-

ments in band saw vibration and stability research. *Holz als Roh-und Werkstoff*, 1978, 36, 273 ~ 280

2 Wickert JA and Mote Jr CD. Current research on the vibration and stability of axially-moving materials. *Shock and Vibration Digest*, 1988, 20: 3 ~ 13

3 Wickert JA, Mote Jr CD. Linear transverse vibration of an axially moving string-particle system. *Journal of the Acoustic Society of America*, 1988, 84: 963 ~ 969

4 Riedel CH, Tan CA. Coupled, forced response of an axially moving strip with internal resonance. *Internal Journal of Non-linear Mechanics*, 2002, 37: 101 ~ 116

5 Chen LQ. Analysis and Control of Transverse Vibrations of Axially Moving Strings. *Applied Mechanics Reviews*, 2005, 58: 91 ~ 116

6 丁虎,陈立群. 轴向运动黏弹性梁横向非线性受迫振动. *振动与冲击*, 2009, 28(12): 128 ~ 131 (Ding H, Chen LQ, Transverse non-linear forced vibration of axially moving viscoelastic beam. *Journal of Vibration and Shock*, 2009, 28(12): 128 ~ 131 (in Chinese))

7 Öz HR, Pakdemirli M, Boyacı H. Non-linear vibrations and stability of an axially moving beam with time-dependent velocity. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2001, 36: 107 ~ 115

8 Sze KY, Chen SH, Huang JL. The incremental harmonic balance method for nonlinear vibration of axially moving beams. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 281: 611 ~ 626

9 陈树辉,黄建亮,余锦炎. 轴向运动梁横向非线性振动研究. *动力学与控制学报*, 2004, 2(1): 40 ~ 45 (Chen SH, Huang JL, She JY. Study on the laterally nonlinear vibration of axially moving beams. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(1): 40 ~ 45 (in Chinese))

10 陈树辉,黄建亮. 轴向运动梁横向非线性振动的内共振研究. *力学学报*, 2005, 37(1): 57 ~ 63 (Chen SH, Huang JL. On internal resonance of nonlinear vibration of axially moving beams. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 37(1): 57 ~ 63 (in Chinese))

11 Chen SH, Huang JL, Sze KY. Multidimensional Lindstedt-Poincare method for nonlinear vibration of axially moving beams. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 306(1-2): 1 ~ 11

12 张伟,温洪波,姚明辉. 黏弹性传动带1:3内共振时的周期和混沌运动. *力学学报*, 2004, 36(4): 443 ~ 454 (Zhang W, Wen HB, Yao MH. Periodic and chaotic oscillation of a parametrically excited viscoelastic moving belt

with 1:3 internal resonance. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36(4): 443 ~ 454 (in Chinese))

STUDY ON VIBRATION OF AN AXIALLY MOVING BEAM WITH COUPLED TRANSVERSE AND LONGITUDINAL MOTIONS *

Huang Jianliang Chen Shuhui

(*Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China*)

Abstract This paper studied the nonlinear vibration of an axially moving beam with coupled transverse and longitudinal motions, and the focus was on the internal resonance in the neighborhood of a 1:3 between the first two transverse modes. First, the motion equations of the axially moving beam were derived through the Hamilton's principle, and were discretized by the Galerkin's method to obtain the quadratic and cubic nonlinearities. Then, the IHB method was applied to analyze the complicated frequency-amplitude response curves, thus obtaining the nonlinear vibration of the axially moving beam near the first two transverse natural frequencies with coupled transverse and longitudinal motions, which reveals the rich and interesting nonlinear phenomena.

Key words axially moving beam, nonlinear vibration, IHB method, coupled, internal resonance