第 8 卷第 4 期 2010 年 12 月
1672-6553/2010/08(4)/305-6
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 8 No. 4
Dec. 2010

从运动方程构造 Lagrange 函数的直接方法

丁光涛
(安徽师范大学物理与电子信息学院,芜湖 241000)

摘要 根据对 Lagrange 函数的结构分析,提出直接从运动微分方程构造一维系统 Lagrange 函数新的一般方法和 6 种特殊方法. 利用提出的方法导出若干运动微分方程的 Lagrange 函数. 直接构造法证实一个系统具有多个不同而等效的 Lagrange 函数,甚至是 Lagrange 函数族. 这种直接构造法也是构造 Lagrange 对称性并导出对应守恒量的一种途径.

关键词 Lagrange 力学, 逆问题, 非保守系统, Lagrange 对称性

引言

Lagrange 力学中已知 Lagrange 函数,就可以直接列出运动微分方程,其逆问题研究已知的系统运动微分方程能否由变分原理导出的问题,即判断是否存在并构造出对应的 Lagrange 函数,将给定的方程表示成等价的 Lagrange 方程形式. 这种逆问题由来已久,是数学、力学和物理学领域中热门课题[1-13]. 由于逆问题在理论和应用方面的重要价值,这方面的研究一直持续至今,不同的构造 Lagrange 函数方法不断出现[8-13]. 逆问题的研究使一些非保守系统,也纳入 Lagrange 系统,突破了 Lagrange 函数由系统动能和势能(包括广义势)构成的限制. 文献[1,2]中把非保守力影响归结为对自由系统 Lagrange 函数的双重修正,本文把文献[10]中对自由系统 Lagrange 函数修正项的宗量推广为包括广义速度在内,从而导出直接从运动微分方程构造 Lagrange 函数新的一般方法和 6 种特殊方法;然后,利用提出的新方法得到一些数学、力学和物理学乃至其他学科中典型的微分方程系统的 Lagrange 表示,其中有未曾见于其他文献的结果.

本文提出的直接构造法证实,一个系统可以具有若干不同而等效的 Lagrange 函数,甚至是 Lagrange 函数族,这些等效的函数,有些是规范等效的,有些是同位等效的,后者也称为 Lagrange 对称性,并对应着守恒量[15-17]. 文献[17]中曾提出如何构造 Lagrange 对称性的问题,本文提出的直接构造 Lagrange 函数的方法即是解决这个问题的一条途径. 本文只讨论一维情况.

1 Lagrange 函数的直接构造法

1.1 直接构造一维系统 Lagrange 函数的一般方法

给定一维系统运动微分方程为

$$\ddot{x}+f(t,x,\dot{x})=0 \tag{1}$$

设其 Lagrange 函数可以写成

$$L=\frac{1}{2}u(t,x,\dot{x})\dot{x}^2+v_1(t,x)\dot{x}+v_0(t,x) \tag{2}$$

代入 Lagrange 方程,展开得到

$$\varphi\ddot{x}+\varphi_1\dot{x}+\varphi_2\dot{x}^2+\varphi_3\dot{x}^3+\varphi_0=0 \tag{3}$$

式中

$$\varphi=\varphi(t,x,\dot{x})=u+2\dot{x}\frac{\partial u}{\partial\dot{x}}+\frac{1}{2}\dot{x}\frac{\partial u}{\partial\dot{x}^2},$$

$$\varphi_1=\varphi_1(t,x,\dot{x})=\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\varphi_2=\varphi_2(t,x,\dot{x})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial\dot{x}}\right)$$

$$\varphi_3=\varphi_3(t,x,\dot{x})=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\dot{x}},$$

$$\varphi_0=\varphi_0(t,x)=\frac{\partial v_1}{\partial t}-\frac{\partial v_0}{\partial x} \tag{4}$$

将方程(3)改写成如下形式

$$\ddot{x}+(\varphi_1/\varphi)\dot{x}+(\varphi_2/\varphi)\dot{x}^2+$$
$$(\varphi_3/\varphi)\dot{x}^3+\varphi_0/\varphi=0$$

比较方程(1),得到

$$(\varphi_1/\varphi)\dot{x}+(\varphi_2/\varphi)\dot{x}^2+(\varphi_3/\varphi)\dot{x}^3+$$

2010-06-19 收到第 1 稿,2010-07-08 收到修改稿.

$$\varphi_0/\varphi = f(t,x,\dot{x}) \tag{5}$$

根据$f(t,x,\dot{x})$的具体形式，解方程(5)，得出$u(t,x,\dot{x})$，$v_1(t,x)$和$v_0(t,x)$从而构造出(2)式中函数L.

对一维系统利用规范等效变换，适当选择规范变换函数，总可以使函数v_1或v_0中的一个变换为零，即(2)式中L可以简化成以下两种特殊情况：

$$L' = \frac{1}{2}u(t,x,\dot{x})\dot{x}^2 + v'_0(t,x) \tag{6}$$

$$L'' = \frac{1}{2}u(t,x,\dot{x})\dot{x}^2 + v'_1(t,x)\dot{x} \tag{7}$$

这样可使方程(5)中待求的未知函数减少为2个.

1.2 6种特殊解法

在具体问题中为简化方程(5)的求解，可以对函数u的宗量作6种不同的设定，导出对应的特殊解法.

特殊解法1 设$u = u(t)$，由(4)和(5)式得

$$\varphi = u(t),$$

$$\varphi_1 = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 = 0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}/u\right)\dot{x} + \varphi_0/u = f(t,x,\dot{x}); \tag{8}$$

特殊解法2 设$u = u(x)$，由(4)和(5)式得

$$\varphi = u(x),$$

$$\varphi_1 = \varphi_3 = 0,$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}/u\right)\dot{x}^2 + \varphi_0/u = f(t,x,\dot{x}); \tag{9}$$

特殊解法3 设$u = u(\dot{x})$，由(4)和(5)式得

$$\varphi = \varphi(\dot{x}) = u + 2\dot{x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\dot{x}} + \frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\dot{x}^2},$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0,$$

$$\varphi_0/\varphi = f(t,x,\dot{x}); \tag{10}$$

特殊解法4 设$u = (t,x)$，由(4)和(5)式得

$$\varphi = u,$$

$$\varphi_1 = \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\varphi_3 = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}/\varphi\right)\dot{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}/\varphi\right)\dot{x}^2 + \varphi_0/u = f(t,x,\dot{x}); \tag{11}$$

特殊解法5 设$u = u(t,\dot{x})$，由(4)和(5)式得

$$\varphi = u + 2\dot{x}\frac{\partial u}{\partial \dot{x}} + \frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{\partial^2 u}{\partial \dot{x}^2},$$

$$\varphi_1 = \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial \dot{x}},$$

$$\varphi_3 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}/\varphi\right)\dot{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial \dot{x}}/\varphi\right)\dot{x}^2 + \varphi_0/\varphi = f(t,x,\dot{x}); \tag{12}$$

特殊解法6 设$u = u(x,\dot{x})$，由(4)和(5)式得

$$\varphi = u + 2\dot{x}\frac{\partial u}{\partial \dot{x}} + \frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{\partial^2 u}{\partial \dot{x}^2},$$

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \dot{x}},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}/\varphi\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \dot{x}}/\varphi\right)\dot{x}^3 + \varphi_0/\varphi = f(t,x,\dot{x}); \tag{13}$$

实际构造Lagrange函数时，方程(1)中$f(t,x,\dot{x})$是给定的，可以从上述一般方法和6种特殊方法选择一种或几种方法求解，得出的结果不是唯一确定的，不同的解法得出的Lagrange函数可能不同，同一种解法也可能存在多种结果，但是，由这些不同的Lagrange函数列出的Lagrange方程都与给定的方程(1)等价，故这些函数是等价的Lagrange函数，部分是规范等效的，部分是同位等效的. 对后一种等效，作进一步说明：设L和L'是方程(1)两个同位等效Lagrange函数，由它们列出的Lagrange方程分别是

$$E(L) = \varphi[\ddot{x} + f(t,x,\dot{x})] = 0,$$

$$E(L') = \varphi'[\ddot{x} + f(t,x,\dot{x})] = 0$$

两者之间存在如下等效关系

$$E(L') = \frac{\varphi'}{\varphi}E(L) = 0 \tag{14}$$

已经证明[14,15]

$$\varphi'/\varphi = h(t,x,\dot{x}) = \mathrm{const} \tag{15}$$

即h是方程(1)的第一积分. 文献[14]中将同位等效关系称为Lagrange对称性，而h就是与Lagrange对称性对应的守恒量；文献[17]中提出了如何构造Lagrange对称性的问题，上述直接构造Lagrange函数的方法是对这个问题的一种回答.

还应当指出，求解函数u的偏微分方程中可能

存在的解是一个函数族,这就是说得到的是系统的 Lagrange 函数族(见后面具体算例).

2　若干系统运动微分方程的 Lagrange 函数

应用前面提出的方法构造一些微分方程的 Lagrange 函数,这些方程涉及数学、力学和物理学领域,还包括其他学科领域. 为了全面说明直接构造法,对例 1 和例 2 两种最简单的保守和非保守系统,给出了详细的讨论,其他的一些微分方程的 Lagrange 函数具体计算过程将省略,用结果说明提出方法的价值.

(1) 简谐振动运动微分方程

$$\ddot{x}+x=0 \quad (\text{取 } \omega^2=1) \tag{16}$$

应用特殊解法 1,设 $u=u(t)$,将 $f=x$ 代入方程(8),得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}/u\right)\dot{x}+\varphi_0/u=x \tag{17}$$

其解是

$$u=c,\varphi_0=\frac{\partial v_1}{\partial t}-\frac{\partial v_0}{\partial x}=cx \tag{18}$$

取后一式两个特解

$$v_1=0,v_0=-\frac{1}{2}cx^2,\text{或 } v'_1=ctx,v'_0=0$$

得到简谐振动的两个 Lagrange 函数为

$$L=\frac{c}{2}\dot{x}^2-\frac{c}{2}x^2,\text{或 } L'=\frac{c}{2}\dot{x}^2+ctx\dot{x} \tag{19}$$

通常取常数 $c=1$,L 和 L'是规范等效的 Lagrange 函数.

应用特殊解法 2、3、4 和 5,均可得到相同的 $u=c$ 的结果. 然而,用特殊解法 6 求解时,方程(13)写成

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\dot{x}}\dot{x}^3+\varphi_0=\left(u+2\dot{x}\frac{\partial u}{\partial\dot{x}}+\frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{\partial^2 u}{\partial\dot{x}^2}\right)x \tag{20}$$

方程(20)的一个不同 $u=c$ 的解为

$$u=\frac{2}{x\dot{x}}\operatorname{arctg}\frac{\dot{x}}{x}-\frac{1}{\dot{x}^2}\ln(\dot{x}^2+x^2),\varphi_0=0 \tag{21}$$

即简谐振动的另一个 Lagrange 函数为

$$L^*=\frac{\dot{x}}{x}\operatorname{arctg}\frac{\dot{x}}{x}-\frac{1}{2}\ln(\dot{x}^2+x^2) \tag{22}$$

如果应用一般解法,即 $u=u(t,x,\dot{x})$,则由方程(5)和式(4)可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}\dot{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial\dot{x}}\right)\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\dot{x}}\dot{x}^3+\varphi_0=\left(u+2\dot{x}\frac{\partial u}{\partial\dot{x}}+\frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{\partial^2 u}{\partial\dot{x}^2}\right)x \tag{23}$$

方程(23)的一个解为

$$u=\frac{1}{3}\dot{x}\cos t+x\sin t-\frac{2x^2}{\dot{x}}\cos t,\varphi_0=0 \tag{24}$$

即简谐振动的又一个 Lagrange 函数为

$$L^{**}=\frac{1}{6}\dot{x}^3\cos t+\frac{1}{2}x\dot{x}^2\sin t-x^2\dot{x}\cos t \tag{25}$$

(19)式、(22)式和(25)式中 L,L^* 和 L^{**} 为同位等效的 Lagrange 函数.

(2) 阻尼运动微分方程

$$\ddot{x}+\lambda\dot{x}=0 \quad (\lambda>0,\text{为常数}) \tag{26}$$

应用特殊解法 1,可得

$$u=u(t)=e^{\lambda t},\varphi_0=0,L=\frac{1}{2}e^{\lambda t}\dot{x}^2 \tag{27}$$

应用特殊解法 3,可得

$$u=\frac{2}{\dot{x}}\ln\dot{x},\varphi_0=\lambda$$

从 $\varphi_0=\lambda$,可得到不同的解,如

$v_1=0,v_0=-\lambda x$;

$v'_1=\lambda t,v'_0=0$;

$v''_1=\frac{1}{2}\lambda t,v''_0=-\frac{1}{2}\lambda t$,等等.

对应地,一组规范等效的 Lagrange 函数为

$$L=\dot{x}\ln\dot{x}-\lambda x \tag{28}$$

$$L'=\dot{x}\ln\dot{x}+\lambda t\dot{x} \tag{29}$$

$$L''=\dot{x}\ln\dot{x}+\frac{1}{2}\lambda t\dot{x}-\frac{1}{2}\lambda x \tag{30}$$

应用特殊解法 5,设 $u=u(t,\dot{x})$,则有

$$\frac{\partial u}{\partial t}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial\dot{x}}\dot{x}^2+\varphi_0=\lambda\dot{x}\left(u+2\dot{x}\frac{\partial u}{\partial\dot{x}}+\frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{\partial^2 u}{\partial\dot{x}^2}\right) \tag{31}$$

方程(31)存在一个解族

$$u=\frac{2e^{-\lambda t}}{\dot{x}^2}F(\dot{x}e^{\lambda t}+c_0),\varphi_0=0 \tag{32}$$

其中 c_0 是常数,$F=F(\xi)=F(\dot{x}e^{\lambda t}+c_0)$是对其宗量 ξ 任意的光滑函数,但要求 $d^2F/d\xi^2\neq0$. 与(32)式 u 对应的是阻尼运动的 Lagrange 函数族.

$$\bar{L}=e^{-\lambda t}F(\dot{x}e^{\lambda t}+c_0) \tag{33}$$

当 F 取不同函数形式时,就得到一系列不同而等效的 Lagrange 函数,例如

$$L=\dot{x}^{n}e^{(n-1)\lambda t}\quad (n\neq 0,1) \tag{34}$$

$$L=(\dot{x}e^{2\lambda t}+e^{\lambda t})^{-1} \tag{35}$$

$$L=\sqrt[n]{e^{n}+e^{-n\lambda t}} \tag{36}$$

等等. 应当指出(29)式中 L' 也属于这个函数族.

应用特殊解法 6,设 $u=u(x,\dot{x})$,可以求解,(28)式中 L 就是特解之一. 应用一般解法,设 $u=u(t,x,\dot{x})$,也可求解,(30)式中 L'' 就是另一个特解.

(3) 平方阻尼运动微分方程

$$\ddot{x}+\lambda\dot{x}^{2}=0$$

$$(\lambda>0,\text{为常数}) \tag{37}$$

利用特殊解法 2、3 和 6,可以直接构造出如下的 Lagrange 函数

$$L=\frac{1}{2}e^{2\lambda t}\dot{x}^{2} \tag{38}$$

$$L=\ln\dot{x}+\lambda x \tag{39}$$

$$L=\dot{x}(1-\ln\dot{x})e^{\lambda t} \tag{40}$$

等等. 特殊解法 6 中设 $u=u(x,\dot{x})$,由方程(13)可以得到导出 u 的方程

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\dot{x}^{2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}u}{\partial x\partial\dot{x}}\dot{x}^{3}+\varphi_{0}=\lambda\dot{x}^{2}(u+2\dot{x}\frac{\partial u}{\partial\dot{x}}+\frac{1}{2}\dot{x}^{2}\frac{\partial^{2}u}{\partial\dot{x}^{2}}) \tag{41}$$

方程也存在一个解族

$$u=\frac{2}{\dot{x}^{2}}F(\dot{x}e^{\lambda x}) \tag{42}$$

其中函数 $F=F(\xi)=F(\dot{x}e^{\lambda x})$,是其宗量的任意光滑函数,但要求 $\frac{d^{2}F}{d\xi}=0$,与之对应的 Lagrange 函数族为

$$\bar{L}=F(\dot{x}e^{\lambda x}) \tag{43}$$

(38)和(39)式中 Lagrange 函数直接是这个解族中的特例,而(40)式中函数经过适当的规范变换,也成为这个解族中的成员.

(4) 变摆长单摆振动方程

$$\ddot{\theta}+\frac{2a\dot{\theta}}{l_{0}+at}+\frac{g\sin\theta}{l_{0}+at}=0$$

$$(l_{0},a\text{ 为常数}) \tag{44}$$

$$L=\frac{1}{2}(l_{0}+at)^{2}\dot{\theta}^{2}+(l_{0}+at)g\cos\theta \tag{45}$$

(5) Duffing 方程

$$\ddot{x}+\lambda\dot{x}+x+\beta x^{3}=f(t)$$

$$(\lambda,\beta\text{ 为常数}) \tag{46}$$

$$L=e^{\lambda t}\left[\dot{x}^{2}-\left(x^{2}+\frac{1}{4}\beta x^{4}\right)+2f(t)x\right] \tag{47}$$

(6) Bessel 方程

$$\ddot{x}+\frac{1}{t}\dot{x}+\left(1-\frac{\upsilon^{2}}{t^{2}}\right)x=0,$$

$$(\upsilon\text{ 为常数}) \tag{48}$$

$$L=\frac{1}{2}t\left[\dot{x}^{2}-\left(1-\frac{\upsilon^{2}}{t^{2}}\right)x^{2}\right] \tag{49}$$

(7)狭义相对论粒子加速运动方程

$$\ddot{x}+f(t,x)\left(1-\frac{\dot{x}^{2}}{c^{2}}\right)^{3/2}=0,$$

$$(c\text{ 为光速}) \tag{50}$$

$$L=-c^{2}\left(1-\frac{\dot{x}^{2}}{c^{2}}\right)^{1/2}-\int^{x}f(t,\xi)\,d\xi \tag{51}$$

(8)Lane-Emden 方程[13,18]

$$\frac{d^{2}\psi}{d\xi^{2}}+\frac{2}{\xi}\frac{d\psi}{d\xi}+\psi^{k}=0 \tag{52}$$

这个方程与恒量演化的多层球模型相关,ξ 与 ψ 分别与半径及密度对应,其 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}\xi^{2}\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^{2}-\frac{\psi^{k+1}\xi}{k+1} \tag{53}$$

(9)广义相对论中 Buchduhl 方程[13]

$$\ddot{x}+\frac{3\dot{x}^{2}}{x}-\frac{\dot{x}}{t}=0 \tag{54}$$

利用特殊解法 4,容易得到

$$u=ct^{-1}x^{-6},v=0,$$

$$(c\text{ 为常数})$$

$$L=\frac{1}{2}c\dot{x}^{2}t^{-1}x^{-6} \tag{55}$$

文献[13]中,给出另外两个 Lagrange 函数

$$L'=K_{1}\dot{x}^{-2}t^{3}x^{6},L''=[K_{1}(K_{2}\dot{x}^{2}t^{3}x^{6}+t)]^{-1} \tag{56}$$

式中 K_1 和 K_2 为常数,利用前面的基本解法可以直接导出(56)式中 L' 和 L'',但是(55)式中 L 是文献[13]中没有的新结果,而且 L 比 L' 和 L'' 的结构简单.

(10) 经济调整微分方程模型[19]

文献[19]中将经济调整微分方程模型变换成等价的形式

$$\dot{x}=y,\dot{y}+2\beta y+\gamma^{2}x=0 \tag{57}$$

并导出其一阶 Lagrange 函数. 显然,(57)式还可以写成二阶微分方程形式

$$\ddot{x}+2\beta\dot{y}+\gamma^{2}x=0 \tag{58}$$

利用特殊解法 1 和 6,分别得到

$$L_1 = \frac{1}{2} e^{2\beta t} (\dot{x}^2 - \gamma^2 x^2) \tag{59}$$

$$L_2 = \frac{\dot{x} + \beta x}{\omega x} \text{arctg} \frac{\dot{x} + \beta x}{\omega x} - \frac{1}{2} \ln (\dot{x}^2 + 2\beta x \dot{x} + \gamma^2 x^2) \quad (\omega^2 = \gamma^2 - \beta^2 , \gamma^2 > \beta^2) \tag{60}$$

利用上述结果,可以验证用不同方法导出的 Lagrange 函数是结构不同的等效函数,

$$E(L_1) = e^{2\beta t} (\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \gamma^2 x) = 0 \tag{61}$$

$$E(L_2) = (\dot{x}^2 + 2\beta x \dot{x} + \gamma^2 x^2)^{-1} (\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \gamma^2 x) = 0 \tag{62}$$

即 L_1 和 L_2 为同位等效的 Lagrange 函数,或者说存在着 Lagrange 对称性,对应的守恒量为

$$e^{2\beta t} (\dot{x} + 2\beta x \dot{x} + \gamma^2 x^2) = const \tag{63}$$

3　结论和讨论

本文提出了 Lagrange 力学逆问题的一种新思路,即基于对 Lagrange 函数的结构分析,给出直接从微分方程构造 Lagrange 函数的一般方法和 6 种特殊方法. 通过对不同学科领域中典型微分方程的 Lagrange 函数的直接构造,说明本文提出方法有较高的实用价值,得到了一些是其他文献中未得到的 Lagrange 函数. 本文提出的方法可以应用在多种系统.

从微分方程直接构造 Lagrange 函数方法是多种多样的,同一种方法得到的解也可以是多值的,表明一个微分方程系统存在着多个 Lagrange 函数,甚至是函数族,这些函数是等效的,或为规范等效,或为同位等效,后一种等效表明这些函数之间存在 Lagrange 对称性和对应的守恒量. 对一个 Lagrange 函数来说,存在如何构造它的 Lagrange 对称性函数的问题[17],本文给出的方法是对该问题的一种回答.

本文的讨论局限于直接构造一维系统的 Lagrange 函数,因此,有待推广到多维系统乃至连续系统.

参　考　文　献

1　Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics I. New York: Springer-Verlag. 1978

2　Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics II. New York: Springer-Verlag. 1983

3　梅凤翔. 分析力学专题. 北京:北京工业学院出版社, 1988. (Mei F X. Special Problems of Analytical Mechanics. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1988 (in Chinese))

4　Darboux G. Lecons sur la theorie generale des surfaces Vol 3. Paris: Gauthier-Villars, 1984

5　Douglas D. Solution of the inverse problem of the calculus of Variations. *Trans. Am. Math. Soc*, 1941, 50: 71 ~ 128

6　Hojman S, Urrutia L F. On the inverse problem of the calculus of variations. *J. Math. Phys*, 1981, 22 1896 ~ 1902

7　Sarlet W. The Holmholtz conditions revisited. A new approach to the inverse problem of Lagrange dynamics. *J. Phys. A: Math. Gen*, 1982, 15: 1503 ~ 1517

8　Lopez G. Hamilton and Lagrangian for N-dimensional autonomous systems. *Ann. Phys*, 1996, 251: 363 ~ 371

9　Lopez G. One-dimensional autonomous systems and dissipation systems. *Ann. Phys*, 1996, 251: 372 ~ 383

10　丁光涛. 一种构造 Lagrange 函数的直接方法. 安徽师范大学学报, 1996, 19: 382 ~ 386 (Ding G T. A direct method for the construction of Lagrangians. *J. of Anhui Normal Univ*, 1996, 19: 382 ~ 386 (in Chinese))

11　丁光涛, 陶松涛. 一阶 Lagrange 力学逆问题及其在非力学领域中的应用. 科学通报. 2008, 53: 872 ~ 876 (Ding G T, Tao S T. The inverse problem of the first-order Lagrange mechanics and the applications in non-mechanics domain. *Chin. Sci. Bull*, 2008, 53: 872 ~ 876 (in Chinese))

12　Musielak Z E. Standard and non-standard Lagrangians for dissipative dynamical Systems with variable coefficients. *J. Phys. A: Math. Theor*, 2008, 41: 055205

13　Cieslinski J L, Nikiciuk T. A direct approach to the construction of standard and non-standard Lagrangians for dissipative-like dynamical systems with variable coefficients. *J. Phys. A: Math. Theor*, 2010, 43: 175205

14　赵跃宇, 梅凤翔. 力学系统的对称性与不变量. 北京:科学出版社, 1989 (Zhao Y Y, Mei F X. Symmetries and Invariants of Mechanical Systems. Beijing: Science Press, 1989 (in Chinese))

15　Currie D F, Saletan E J. Q-equivalent particle Hamiltionians I. The classical one-dimensional Case. *J. Math. Phys*, 1966, 7: 967 ~ 974

16　Hojman S, Harleston H. Equivalent Lagrangians: multidimensional Case. *J. Math. Phys*, 1981, 22: 1414 ~ 1419

17　梅凤翔. 经典约束力学系统对称性与守恒量研究进展.

力学进展. 2009,39:37 ~43 (Mei F X . Advances in the symmetries and conserved quantities of classical constrained systems. *Advances in Mechanics*, 2009,39:37 ~43(in Chinese))

18 Weinberg S. Gravitation and cosmology. Principles and applications of the genoral theory of relativity. John Wiley, 1972

19 丁光涛. 研究经济调整微分方程模型的 Lagrange-Noether 方法,安徽师范大学学报,2009,32:328 ~330 (Ding G T Lagrange-Noether methodfor studying differential equation model of economic adjustment. *J. of Anhui Normal Univ*, 2009, 32:328 ~330 (in Chinese))

A DIRECT APPROACH TO THE CONSTRUCTION OF LAGRANGIANS FROM THE MOTION EQUATION

Ding Guangtao

(*The College of Physics and Electronic Information*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

Abstract Based on the analysis of the structure of Lagrangions, a new general method and 6 special methods for the construction of Lagrangians for one dimensional system from the motion equation directly were presented. By use of the metthods, some Lagrangians of the differetial equations were derived. By means of the direct approach, it is verified that a system may have many different equivalent Lagrangians, even an infinite family of Lagrangians. The approach presented is a way to obtain Lagrange symmetries and the conserved quantities.

Key words Lagrange mechanics, inverse problem, non-conservative system, Lagrange symmetry

Received 19 June 2010, revised 8 July 2010.