第 8 卷第 4 期 2010 年 12 月
1672-6553/2010/08(4)/297-3

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 8 No. 4
Dec. 2010

广义 Birkhoff 方程的平衡稳定性*

崔金超　梅凤翔
（北京理工大学宇航学院，北京　100081）

摘要　广义 Birkhoff 方程是一类更为普遍的约束力学系统的方程. 研究定常广义 Birkhoff 方程的平衡稳定性. 建立平衡方程，给出系统的能量变化方程，根据 Birkhoff 函数的定号性质，建立平衡稳定性的判据. 举例说明结果的应用.

关键词　广义 Birkhoff 方程，　平衡方程，　能量变化方程，　平衡稳定性

引 言

Birkhoff 1927 年发表名著《动力系统》[1]，1978 年 Santilli 将文献[1]的方程推广并建议命名为 Birkhoff 方程[2]. 文献[3，4]建立了 Birkhoff 系统动力学基本理论框架. 文献[5，6]在 Birkhoff 方程的右端添加一项，并称之为广义 Birkhoff 方程，同时研究了这类方程的 Noether 对称性与 Noether 守恒量. 本文研究广义 Birkhoff 方程的平衡稳定性，给出平衡方程和能量变化方程，选择适当的 Lyapunov 函数，利用 Lyapunov 定理得到方程平衡稳定性的结论.

1　运动微分方程

广义 Birkhoff 方程有形式[5，6]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=-\Lambda_\mu,\quad (\mu,\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{1}$$

其中 $B=B(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数，$R_\mu=R_\mu(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数组，$\Lambda_\mu=\Lambda_\mu(t,\boldsymbol{a})$ 为附加项.

当 $\Lambda_\mu=0\ (\mu=1,2,\cdots,2n)$ 时，方程(1)成为 Birkhoff 方程. 因此，方程(1)比 Birkhoff 方程更为普遍. 另外，将一个微分方程组化成 Birkhoff 方程是相当困难的[2]，而化成广义 Birkhoff 方程(1)就容易得多.

假设

$$\det(\Omega_{\mu\nu})\neq 0 \tag{2}$$

其中

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \tag{3}$$

则由方程(1)可解出所有 $\dot a^\mu$

$$\dot a^\mu=\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}-\frac{\partial R_\nu}{\partial t}-\Lambda_\nu\right) \tag{4}$$

其中

$$\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\rho}=\delta^\mu_\rho \tag{5}$$

如果函数 B，R_μ 和 Λ_μ 都不显含 t，则称为定常系统. 对定常系统，方程(1)和方程(4)分别表为

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}=-\Lambda_\mu \tag{6}$$

和

$$\dot a^\mu=\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}-\Lambda_\nu\right) \tag{7}$$

2　平衡条件

系统平衡时，有 $\dot a^\mu=0$，$a^\mu=a^\mu_0\ (\mu=1,2,\cdots,2n)$，此时方程(1)成为

$$\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=\Lambda_\mu \tag{8}$$

而方程(6)成为

$$\frac{\partial B}{\partial a^\mu}=\Lambda_\mu \tag{9}$$

方程(8)和方程(9)就是广义 Birkhoff 方程的平衡方程. 如果方程(8)或(9)是彼此独立的，便可求得平衡位置 $a^\mu=a^\mu_0\ (\mu=1,2,\cdots,2n)$. 为研究系统的平衡稳定性，经过变换可将平衡位置移到 $a^\mu_0=0\ (\mu=1,2,\cdots,2n)$.

2010-07-03 收到第 1 稿，2010-07-15 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目（10772025，10932002）

3 能量变化方程

将方程(1)两端乘以 $\dot{a}^{\mu}$ 并对 μ 求和,得到

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial B}{\partial t}+\left(\Lambda_{\mu}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right)\dot{a}^{\mu} \tag{10}$$

再将式(4)代入式(10),得

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial B}{\partial t}+\left(\Lambda_{\mu}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right)\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right) \tag{11}$$

对定常情形,式(11)成为

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\Lambda_{\mu}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}} \tag{12}$$

因为通常将 Birkhoff 函数 B 理解为"能量",故方程(11)和(12)可称为能量变化方程. 能量变化方程可用于研究系统的平衡稳定性.

4 稳定性判据

对定常广义 Birkhoff 系统,利用函数 $B(\boldsymbol{a})$ 的性质可以判断平衡稳定性. 有如下结果

判据 对定常广义 Birkhoff 系统,如果 $B(0)=0$,$B(\boldsymbol{a})$ 在平衡位置邻域内是正定的,且

$$\Lambda_{\mu}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}\leqslant 0 \tag{13}$$

则平衡位置 $a_0^{\mu}=0(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 是稳定的.

实际上,取 $B(a)$ 为 Lyapunove 函数

$$V=B(a)$$

则 V 是正定的. 将式(13)代入式(12),得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$$

据 Lyapunov 定理知,平衡是稳定的.

对定常 Birkhoff 系统,因 $\Lambda_{\mu}=0(\mu=1,2,\cdots,2n)$,故有

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=0$$

于是有

推论 对定常 Birkhoff 系统,如果 $B(0)=0$,$B(\boldsymbol{a})$ 在平衡位置邻域内是正定的,则平衡位置 $a_0^{\mu}=0(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 是稳定的.

这个结果已由文献[3]给出.

5 算 例

为说明上述结果,举一简单例子.

二阶广义 Birkhoff 系统为

$$\begin{aligned}
&R_1=0,\\
&R_2=a^1,\\
&B=\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2,\\
&\Lambda_1=(a^2)^3,\\
&\Lambda_2=0
\end{aligned} \tag{14}$$

研究平衡位置 $a^1=a^2=0$ 的稳定性.

由式(14)知

$$(\Omega^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{\mu}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}=\Lambda_1\Omega^{12}\frac{\partial B}{\partial a^2}=-(a^2)^4\leqslant 0$$

而 B 在平衡位置邻域内是正定的,由判据知,平衡是稳定的.

6 结论

以广义 Birkhoff 方程为基础的广义 Birkhoff 系统动力学是经典力学的一个新发展. 本文由 Birkhoff 函数的定号性质研究了定常广义 Birkhoff 方程的平衡稳定性.

参 考 文 献

1 Birkhoff G D. Dynamical Systems, Providence R I: AMS College Publ, 1927

2 Santilli R M. Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ. New York: Springer-Verlag, 1983

3 梅凤翔,史荣昌,张永发,吴惠彬. Birkhoff 系统动力学. 北京:北京理工大学出版社,1996 (Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B. Dynamics of Birkhoffian System, Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1996 (in Chinese))

4 Mei F X. On the Birkhoffian mechanics. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2001, 36(5): 817~834

5 Mei F X. The Noether's theory of Birkhoffian systems. *Science in China Serie A*, 1993, 23(12): 1456~1467

6 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用. 北京:科学出版社,1999 (Mei F X. Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems, Beijing: Science Press, 1999 (in Chinese))

STABILITY OF EQUILIBRIUM FOR GENERALIZED BIRKHOFF EQUATION *

Cui Jinchao　Mei Fengxiang
(*School of Engineering Aerospace*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

Abstract The generalized Birkhoff′s equations are more general equations of constrained mechanical systems. The stability of equilibrium for generalized Birkhoff equations was addressed. The equations of equilibrium and energy change were established. The criterion of stability of equilibrium was obtained by using the property of definite sign of the Birkhoffian. An example was given to illustrate the application of the result.

Key words generalized Birkhoff equations, equation of equilibrium, equation of energy change, stability of equilibrium

Received 3 July 2010, revised 15 July 2010.
* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10772025) and by the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (10932002)