

# 有限元、变分原理与辛数学的推广\*

高强 钟万颢

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室,大连 116024)

**摘要** 发展型偏微分方程混和有限元的求解往往需要变动的维数,不符合传递辛矩阵群固定维数的限制. 本文按变分法的进一步发展的思路,推导了运用虚功原理解决不同维数传递辛矩阵群连接的原理. 数值例题表明了方法的有效性.

**关键词** 发展型偏微分方程, 混和有限元积分, 传递辛矩阵, 不同维数的连接

## 引言

辛数学本来是从分析动力学来的,但文献[1]指出分析结构力学与分析动力学是模拟的,所以“有限元自动保辛”. 随着需求不断提升,应用力学结合了实际需求后,暴露了传统经典分析力学的局限性:

- \* 它奠基于连续时间的系统,但应用力学有限元、控制与信号处理等需要离散系统;
- \* 分析动力学总是考虑同时间的位移向量,但应用力学有限元要考虑不同时间的位移向量;
- \* 动力学要求体系的维数自始至终不变,但应用力学有限元需要变动的维数.
- \* 它认为物性是即时响应的,但时间滞后是常见的物性,例如粘弹性、控制理论等

这些局限性表明传统分析动力学还需要大力发展. Hilbert 在 1900 年巴黎世界数学大会上的大会报告《数学问题》提出了 23 个数学问题. 其中第 23 号数学问题是:变分法的进一步发展,指出了一个需要不断地深入发展的方向. 现在广泛应用的应用力学有限元法的数学基础就是变分法,仍需要深入发展. 辛数学的出现也是变分法的发展,不过辛是 H. Weyl 根据 Hamilton 正则方程的对称性而提出的,蕴涵着只能适用于恒定维数的体系. 而分析结构力学与有限元分析是非常灵活的,没有这样的维数限制.

发展型偏微分方程的离散求解,必然需要时空混和元的划分,不能接受自始至终恒定维数的限

制. 本文要探讨变动维数的动力学问题,这就超出了辛的传统范畴了.

离散,是数值求解的需要. 应予以强调指出的是,李群理论是针对连续系统的,离散后就不能用李群了. 冯康指出离散差分格式应要求近似解保辛<sup>[2]</sup>,但保辛并不能自动保证能量守恒,有论文甚至证明了命题“保辛则能量不能守恒”<sup>[3]</sup>,书[2]也接受了该结论. 保辛所期望的是使能量保守,例如著作[4]的大量例题,就用能量对于守恒性质的偏离来检验保辛差分格式的优良性质,但仍然不保证能量守恒! 前文[5]指出文献[3]的命题不成立,运用参变量方法,保辛积分也可保证能量守恒的. 以后讲保辛,就是指保辛-守恒的算法的.

对于不同时间离散的时-空混和元网格<sup>[6]</sup>,则应指出,波动方程恰当的时间-空间变换是 Lorentz 变换<sup>[7,8]</sup>. 而在 Lorentz 变换下,时间-空间的变换是线性的. 在原坐标下的同时,在 Lorentz 变换后,就不再同时了;而只要是在特征线下的两点,则通过 Lorentz 变换就可以成为同时. Einstein 相对论早就讲清楚时间-空间问题,同时的概念是与坐标选择相关的. 文献[6]已经给出了不同时的网格的数值例题. 因此本文只探讨不同维数离散的时间-空间混和有限元积分问题.

## 1 结构力学有限元自动保辛

局限于传统的分析动力学,则必然是面对相同维数的体系. 然而例如以波动方程来说,就是偏微分方程了,相当于无穷多未知数的动力体系. 半解

析法对空间坐标离散,成为线性联立微分方程的时间积分. 如用简单边界条件,则本来就有分析解,离散也可以是同维数的规则网格. 复杂些的边界条件问题,则只能数值求解,不同维数的网格划分也就可能出现了.

结构力学有限元的离散本来是静力问题,从来未曾将一个坐标当作“时间”而将不同维数看成一个问题,从来未曾提出保辛的问题. 从分析结构力学与分析动力学模拟的角度看,选择了“时间”坐标而说保辛,应讲清楚其意义. 弹性力学的辛求解体系就是这样建立的.

说有限元自动保辛,是从有限元法的单元刚度阵为对称阵的角度说的,当然其子结构的出口刚度阵也是对称阵. Hilbert 在《数学问题》中又指出:“在讨论数学问题时,我们相信特殊化比一般化起着更为重要的作用. 可能在大多数场合,我们寻找一个问题的答案而未能成功的原因,是在于这样的事实,即有一些比手头的问题更简单、更容易的问题没有完全解决或是完全没有解决. 这时,一切都有赖于找出这些比较容易的问题并使用尽可能完善的方法和能够推广的概念来解决它们”,故不妨以弹性平面有限元分析为例来分析.

将子结构选择为两层“时间”, $z_a, z_b$  之间的区域,其出口刚度阵就是两层“时间”的面,每个“时间”层  $a$  与层  $b$  并非一定是划一的“时间”. 如果每个“时间”的出口位移  $w_a, w_b$  自由度相等,则其不同“时间”层间的出口刚度阵

$$K = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \quad (1)$$

的对称性  $K^T = K$  就可化到传递辛矩阵.

$$S = \begin{bmatrix} S_{aa} & S_{ab} \\ S_{ba} & S_{bb} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} S_{aa} &= -(K_{ab})^{-1}K_{aa}, \\ S_{ab} &= -(K_{ab})^{-1}, \\ S_{bb} &= -K_{bb}(K_{ab})^{-1}, \\ S_{ba} &= (K_{ab})^T - K_{bb}(K_{ab})^{-1}K_{aa} \end{aligned} \quad (2)$$

但,如果  $w_a, w_b$  的自由度数不等,则就有困难了.

这里就体现了辛数学的局限性,  $S^TJS = J$  必须是相等维数. 结构力学有限元法根本不需要这种限制,原因是结构力学是椭圆型偏微分方程. 因此刚度阵对称的概念更为开放. 结构力学有限元从来不讲究辛. 怎样将刚度阵对称的概念与保辛联系起来是本文要探讨的课题.

传统的分析动力学是  $n$  个自由度,维数有限且不变. 可用 Hamilton 体系描写, H. Weyl 在 Hamilton 正则方程对称的基础上提出辛对称的概念,先天就有同等维数体系的要求. 当推广到无限维的双曲型波动偏微分方程时,例如有区域随时间变化的问题,可用混和有限元求解<sup>[6]</sup>. 如果有限元的离散有同等维数的要求,则使用时有许多不便. 当然要考考虑不受维数限制的方案. 问题又回到结构力学有限元不同维数时的保辛.

这种表达,不同维数时的保辛,无非是使用传递辛矩阵时才出现.

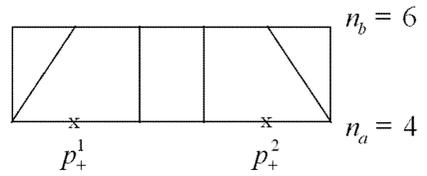


图1 不同维数时空网格示意

Fig. 1 Time-space mesh for different dimensions

困难在于不同维数时矩阵  $K_{ab}$  不能求逆, 设  $w_a, w_b$  的维数分别是  $n_a, n_b, n_a < n_b$ . 解决此问题的方案是增加  $n_a$  使其与  $n_b$  相等,方法是增加节点  $p_+$  使  $n_{a+} = n_b$ ,如图1,同时保证原有节点位置不变. 有限元本来是基于插值的近似解,在相邻节点间按线性规则插入节点,无非是加密了子结构的单元数目而已,近似程度不会减少. 这样产生的子结构刚度阵  $K_+$  就可实现传递辛矩阵的方案了. 传递的是状态向量,即

$$v_{a+} = \begin{Bmatrix} w_{a+} \\ f_{a+} \end{Bmatrix}_{n_{a+}}, \quad v_b = \begin{Bmatrix} w_b \\ f_b \end{Bmatrix}_{n_b} \quad (3)$$

从位移  $w_{a+}, w_b$  计算两端力向量  $f_{a+}, f_b$  是容易的.

但现实是增加了节点  $p_+$ , 有  $n_a < n_{a+}$ . 要返回原来的  $K$  阵很容易,因有限元采用线性插值,增加约束条件,将  $p_+$  的位移表达为其两端节点位移的线性插值即可. 将线性插值条件代入,刚度阵  $K_+$  就退化到  $K$  了. 根据刚度阵  $K$  和位移  $w_a, w_b$  计算两端力向量  $f_a, f_b$  也是容易的. 但要考虑  $f_{a+}, f_b$  与  $f_a, f_b$  的关系. 根据  $w_a, w_b$  取出子结构,点  $p_+$  位移的线性插值,就是有限元法线性插值. 所以增加了点  $p_+$  的位移,在子结构出口刚度阵分析时,对于  $f_b$  没有影响. 而  $f_{a+}$  与  $f_a$  的维数不同. 位移的线性插值相当于将包含点  $p_+$  的线段看成刚性.  $p_+$  点的对偶力在  $f_a$  中没有位置,只能按照线性,即杠杆原理的规则,

分配到两端的节点上. 杠杆原理就是虚功原理.

虚功原理,简单、有效且优美. 还可以推广到双曲型方程方面. 讲究的证明可选择非常薄的单元. 为节省篇幅,略.

这样看来,弹性力学问题的有限元法的对称刚度阵自然就是保辛的. 因为是椭圆型方程的 Dirichlet 边界问题,增加节点无非是虚功原理而已. 不必考虑状态的初值积分,所以说自动就保辛了,因此有限元法给出的近似结果是高度稳定、可靠的,为广大工程师所接受.

## 2 波动偏微分方程,不同维数位错的转换

文献[6]的时-空混和元例题,是运用相同维数的网格划分的. 因两端边界变动小,故空间坐标离散仍采用了相同维数的划分,此时积分仍可以保辛. 面对更复杂的情况,要求用不同维数的网格划分是很自然的. 如何发展“保辛”积分,自然就成为有兴趣的课题. 按传统的数学辛的定义,不同维数则无法用传递辛矩阵表示. 必然需要冲破传统辛数学概念的限制. 以下就探讨此问题. 当然是运用时-空混和元计算的.

结构力学有限元是椭圆型偏微分方程离散来的,适用 Dirichlet 边界条件;在一维表述时是两端边界条件,因此没有不同维的问题. 结构力学本来也只重视刚度阵的对称性而不讲究传递辛矩阵求解. 不同维数问题只在动力学初值问题时才出现. 文献[1,9,10]指出,辛矩阵对应于对称的刚度阵或混合能矩阵. 辛矩阵的定义本来有同维数的限制而刚度阵、混合能矩阵则不受此限制. 运用结构力学保辛的规则,就给动力学扩展辛的概念提供了机会.

因此选择波动方程的离散进行分析不同维数问题是有帮助的. 因为问题比较单纯,而按 Hilbert 的概念,这些方法是能够推广的.

文献[1]讲述了分析动力学与分析结构力学的模拟关系,变分原理是对应的. 无非是相差一个正负号,因此边界条件的提法发生了变化,椭圆型方程的 Dirichlet 边值问题变化为双曲型方程的初值问题. 上面就结构力学有限元讲解了有限元传递矩阵表达不同维数的保辛推广. 按有限元法增加节点数目,改变不同维数为相同维数,运用虚功原理即可.

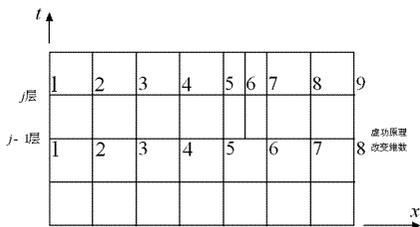


图2 增加节点的时空网格

Fig. 2 Time - space mesh by adding node

处理双曲型的波动方程,简单些不妨离散到同时的网格. 时间离散为层  $j = 1, 2, \dots$ , 而不同的  $j$  可以有不同维数. 设在  $j - 1$  层以前,每层皆为 8 站离散;而  $j$  层则过度到 9 站离散. 时间离散称层,而空间离散称站. 原来  $j - 1$  层以前,  $k$  站与临近层的  $k$  站存在有限元网格的连线. 这规则在  $j - 1$  层过度到  $j$  层时被打破. 设在第  $k = 5$  点时该规则成立,而  $j - 1$  层的  $j - 1; k = 6$  对应于  $j; k = 7$ . 因此  $j; k = 6$  成为多出的位错,不再是规则网格了,如图 2. 传统辛矩阵的概念无法适应了. 于是有 5 点单元:  $j - 1; k = 5, 6$ ; 以及  $j; k = 5, 6, 7$ . 局部分别表示为 1, 2, 3, 4, 5, 再设一个点 2. 简单起见,如图 3 所示,设局部坐标为

- 1: (0, 0); 2: (0, 1); 3: (0, 2)
- 4: (1, 0); 5: (1, 1); 6: (1, 2)

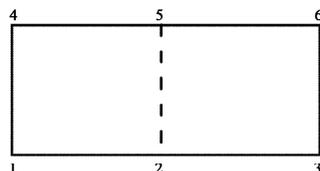


图3 局部单元

Fig. 3 Local element

括号内是坐标值. 1, 3, 4, 5, 6 点的位移  $w_i, i = 1, 3, 4, 5, 6$  是独立位移;而 2 号局部节点的位移则要求

$$w_2 = (w_1 + w_3) / 2 \tag{4}$$

不是独立的. 所以是共 5 个独立位移, 2 个在  $j - 1$  层而 3 个在  $j$  层. 局部节点 2 在  $j - 1$  层以前是不出现的. 只在从  $j - 1$  层过度到  $j$  层时才出现.

时间积分有因果律. 既然认为  $j - 1$  层及以前的离散近似是满意的, 则意味着线性插值的位移是满意的. 前面设了局部 2 号点的位移的相关也是合理的.

既然辛矩阵的概念不能直接运用, 就应当采用

变分原理的方法. 有限元求解的根据是变分原理. 从时间坐标看是初值问题, 但从空间坐标看则是两端边值问题. 故变分原理可写成

$$\delta \int \left[ \max_w \int_0^l [\dot{w}^2/2 - k_0 w'^2/2] dx \right] dt = 0 \quad (5)$$

表明: 时间坐标方向是动力学, 而空间坐标方向是结构力学.

从时间积分看,  $j-1$  层只有 2 点的状态, 即  $w_1, p_1; w_3, p_3$ , 虽然有线性插值的  $w_2$  但不是独立位移, 现在也拿不出其对偶. 然而要求得到层 3 点的状态, 所以有怀疑, 其实这是误解, 深入分析可运用变分的虚功原来解决如下.

既然承认  $j-1$  层只用局部 1, 3 号点的线性插值是满意的, 则中点的位移 (3. 1) 是满意的. 有限元法当然不是精确解, 所以只能说满意. 如果能确定 2 号点满意的对偶量  $p_2$ , 以及同时修改  $p_1, p_3$ , 则就具备了  $w_1, p_1; w_2, p_2; w_3, p_3$  的状态向量, 也就是将位错的 2 号点的状态向量修补了, 当然维数不同. 于是从层的位错修补的状态向量开始, 于是又可以向前进行传递辛矩阵的积分了. 变分原理 (3. 2) 表明, 空间坐标仍是结构力学的规则. 上面对于结构力学有限元的传递辛矩阵, 仍适用. 表明结构力学的虚功原理也可以转移用于双曲型方程的动力学. 在给定时间  $j-1$  层的空间坐标方向, 本来就是结构力学问题, 使用结构力学的虚功原理完全合理. 而在不同时间层次, 则应当用传递的规则.

先看局部单元的  $p_1, p_3$  构成. 局部单元节点 1 是联系 ( $j-2, j-1$ ) 层的一批时-空混和元的, 这批时-空混和元组装得到 ( $j-2, j-1$ ) 层的作用量矩阵  $K_g$ , 其对应的位移向量是  $j-2$  层的  $w_{j-2}$  与  $j-1$  层的  $w_{j-1}$  组合. 其中只有一个混和元  $E_h$  包含局部的 1~3 边. 从  $j-2$  层采用混和元积分到  $j-1$  层时必然包含单元  $E_h$ . 前面的局部节点 1, 3, 包含于  $w_{j-1}$  中. 总体的对偶动量为

$$p_{j-1} = \partial S / \partial w_{j-1} \quad S = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} w_{j-2} \\ w_{j-1} \end{matrix} \right\}^T K_g \left\{ \begin{matrix} w_{j-2} \\ w_{j-1} \end{matrix} \right\} \quad (6)$$

这是总体传递辛矩阵积分时必然使用的.

有位移必然有其对偶量, 时-空混和有限元时表现为对偶向量  $p_{j-1}$ . 虽然  $p_{j-1}$  是按节点表达的集中动量; 但本来是波动偏微分方程, 动量本来应当是分布的, 节点的动量只是分布动量的反映. 位移插值是线性的, 分布动量也认为是线性的, 形函数

么.

前面按式 (4) 插值了单元  $E_h$  的局部节点 2 的位移, 尚待寻求其  $E_h$  的局部对偶量  $p_2$ , 同时  $E_h$  的局部  $p_{1h}, p_{3h}$  也应修改. 将单元  $E_h$  对于作用量的贡献记为  $S_h$ , 则修改前

$$p_{1h} = \partial S_h / \partial w_1, p_{3h} = \partial S_h / \partial w_3 \quad (7)$$

因为已经是传递后, 所以维数修改前的  $w_{j-1}$  是能计算的, 从而局部  $p_{1h}, p_{3h}$  也是能计算的. 因中间增加了节点,  $p_{1h}, p_{3h}$  的集中动量也是有待修改的. 注意式 (7) 的  $p_{1h}, p_{3h}$  不是总体量, 因为只包含了一个单元  $E_h$ , 只能反映局部 1~3 线段的线性分布动量.  $p_{1h}, p_{3h}$  是在修改前的, 因为有限元法的线段 1~3 保持为 2 个自由度的直线, 故 2 个集中对偶量已经可以表示.

当需要加密网格时, 在局部的 1~3 线要增加一个节点 2. 此时有限元的可能位移不能认为保持为直线了, 而有 3 个自由度, 除原来的刚体移动与转动外尚需增加折线的可能位移. 对偶动量分布也应同样增加. 有限元法是 3 个节点位移, 而对偶向量也是 3 个节点动量.

怎样确定对偶动量的 3 个自由度呢? 当然是使用功、能的思路; 按《力、功、能量与辛数学》的阐述, 辛是从功、能来的. 现在则可用虚功原理来处理, 单元  $E_h$  的分布对偶变量对于增加节点的作用.

首先清楚, 有限元得到的  $p_{1h}, p_{3h}$  是节点上的集中力. 中间增加一个节点, 表明 1~3 已经不再是直线, 是有 1~2, 2~3 两段直线的折线, 有 3 个参数, 应确定 3 个对偶集中力  $p_{1x}, p_{2x}, p_{3x}$ , 以代替  $p_{1h}, p_{3h}$ .

前面 2 个节点对偶量  $p_{1h}, p_{3h}$ , 对应于线性分布对偶分布量  $p(x) = a + bx$ , 其中  $a, b$  是待定常数而中间点取为  $x=0$ . 确定方法是静力等价. 平移自由度  $w_1(x)$ , 虚功相等

$$p_{1h} + p_{3h} = \int_{-l_{13}/2}^{l_{13}/2} a \cdot w_1(x) dx = al_{13},$$

$$a = (p_{1h} + p_{3h}) / l_{13}$$

转动自由度  $w_2(x) = x$

$$(p_{3h} - p_{1h}) \cdot l_{13}/2 =$$

$$\int_{-l_{13}/2}^{l_{13}/2} (a + bx) \cdot w_2(x) dx = bl_{13}^3/12,$$

$$b = 6(p_{3h} - p_{1h}) / l_{13}^2$$

这给出了原来的线性分布对偶分布量  $p(x) = a + bx$ .

当增加节点在中间时,在刚体位移外又增加了位移分布例如

$$w_3(x) = \begin{cases} 1 + 2x/l_{13}, & \text{when } x < 0 \\ 1 - 2x/l_{13}, & \text{when } x > 0 \end{cases}$$

将  $p(x) = a + bx$  作用到  $w_3(x)$ , 则基于对称性有

$$\int_{-l_{13}/2}^{l_{13}/2} (a + bx) \cdot w_2(x) dx = al_{13}/2$$

对应的增加节点的对偶变量  $p_{1x}, p_{2x}, p_{3x}$  可通过虚功原理得到

对  $w_1(x) = 1$  自由度:

$$p_{1x} + p_{2x} + p_{3x} = al_{13} = p_{1h} + p_{3h}$$

对  $w_2(x) = x$  自由度:

$$(p_{3h} - p_{1h}) \cdot l_{13}/2 = (p_{3x} - p_{1x}) \cdot l_{13}/2$$

对  $w_3(x)$  自由度:

$$[al_{13}/2] = (p_{1h} + p_{3h})/2 = p_{2x}$$

求解,有

$$p_{2x} = (p_{1h} + p_{3h})/2; p_{1x} = (3p_{1h} - p_{3h})/4;$$

$$p_{3x} = (-p_{1h} + 3p_{3h})/4$$

表明原来的两节点的对偶量  $p_{1h}, p_{3h}$  已经因增加中间节点而变换为 3 节点的对偶量  $p_{1x}, p_{2x}, p_{3x}$ . 得到了全部节点的状态向量后,就可继续进行  $(j-1, j)$  层的保辛积分了.

辛数学的定义只针对同维数的问题. 不同维数已经超出了辛的定义. 虽然是在同一时间层进行的虚功原理,当然也是变分原理范畴的内容. 所以用 Hilbert 的“变分法的进一步发展”提法是恰当的.

以上阐述了增加维数的问题. 当然还应考虑减少维数的问题. 其实虚功原理的方法是可以反过来的. 如果要减少一个节点,当然该节点的位移应与两侧相邻节点几乎就是线性插值. 于是同样采取虚功原理的方法,可将该节点的位移用线性初值,而其对偶动量则用杠杆原理将其转移到相邻节点. 于是就完成了维数的变化.

结构力学虚功原理是有力工具,要选择独立虚位移. 上面的选择是 2 个刚体位移与一个  $w_3(x)$ . 其实,也可选择 3 个折线位移:

$$w_1 = 1, w_2 = 0, w_3 = 0;$$

$$w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = 0;$$

$$w_1 = 0, w_2 = 0, w_3 = 1$$

例如对应于  $w_1 = 1, w_2 = 0, w_3 = 0$  函数是

$$w_1(x) = \begin{cases} (1 - 2x/l_{13}), & \text{when } x < l_{13}/2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

则可计算出

$$a = (p_{1h} + p_{3h})/l_{13}, b = 6(p_{3h} - p_{1h})/l_{13}^2$$

$$p_{1x} = \int_{-l_{13}/2}^{l_{13}/2} (a + bx) \cdot w_1(x) dx =$$

$$a \cdot l_{13}/4 - b \cdot l_{13}^2/12 =$$

$$[p_{1h} + p_{3h} - 2(-p_{1h} + p_{3h})]/4 =$$

$$(3p_{1h} - p_{3h})/4$$

同样,也可计算得到

$$p_{2x} = (p_{1h} + p_{3h})/2;$$

$$p_{3x} = (-p_{1h} + 3p_{3h})/4$$

这个方法可用于在直线 1~3 上任何处增加多个节点的情况. 仍用在增加一个节点 2 后成为 2 个线段 1~2, 2~3 的情况为例,设  $l_{12} = (1 + \alpha)l_{13}/2$  其中  $-1 < \alpha < 1$ . 虚功原理要选择独立虚位移. 同样,选择 3 个折线位移:  $w_1 = 1, w_2 = 0, w_3 = 0; w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = 0; w_1 = 0, w_2 = 0, w_3 = 1$ ; 3 根折线,即

$$w_1(x) = \begin{cases} -\frac{1}{l_{12}}(x - \frac{al_{13}}{2}), & \text{when } x < \frac{al_{13}}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{l_{12}}(x + \frac{l_{13}}{2}), & \text{when } x < \frac{al_{13}}{2} \\ -\frac{1}{l_{13} - l_{12}}(x - \frac{l_{13}}{2}), & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$w_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{when } x < \frac{al_{13}}{2} \\ \frac{1}{l_{13} - l_{12}}(x - \frac{l_{13}}{2}\alpha), & \text{otherwise} \end{cases}$$

按照上面的方法,可计算出

$$p_{1x} = \frac{1}{4}(\alpha^2(p_{3h} - p_{1h}) + 2ap_{1h} + 3p_{1h} - p_{3h})$$

$$p_{2x} = \frac{1}{2}\alpha(p_{3h} - p_{1h}) + \frac{1}{2}(p_{1h} + p_{3h})$$

$$p_{3x} = \frac{1}{4}(\alpha^2(p_{1h} - p_{3h}) - 2ap_{3h} + 3p_{3h} - p_{1h})$$

### 3 数值算例

考虑如下变动边界问题. Timmy 拉小提琴,滑音,即移动压弦线的手指而产生. 方程为

$$\frac{\partial w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

时变的区域边界条件为

$$w(0, t) = 0, w(x_m, t) = 0,$$

$$x_m = \begin{cases} 1, & t \leq 0.2(s) \\ 1 + 0.05\sin(2\pi t), & t > 0.2(s) \end{cases}$$

初始条件为

$$w(x,0) = \sin(\pi x), \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0$$

变动边界问题解析求解很困难. 采用半解析方法, 先对空间离散然后再积分动力方程的方法也很难适应变动边界问题. 本文采用的时空混和元方法, 对于这类变动边界问题的处理是很方便和灵活的.

0. 05. 这四种时空混和的网格均是传统半解析方法无法覆盖的情况. 第一种网格空间节点的位置在不同时刻是可以变化的, 第二种网格在某些时刻在中点处增加了一个空间离散节点, 第三种网格则是在某些时刻任意增加了空间离散节点, 第四种网格是在第三种网格的基础上, 在时空域某些区域加密了网格, 并可使用三角形单元.

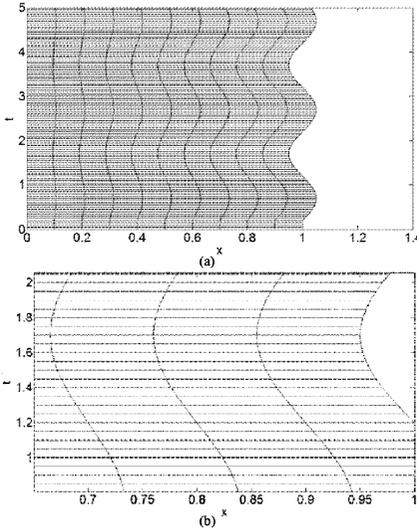


图4 (a) 第一种时空混和网格;  
(b) 第一种时空混和网格的局部放大

Fig. 4 (a) The first type of time - space mesh;  
(b) The local zoom for first type of time - space mesh

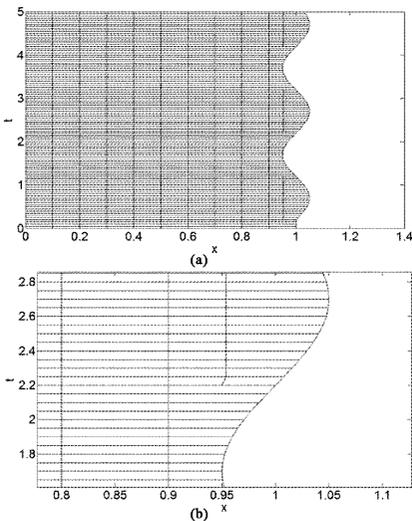


图5 (a) 第二种时空混和网格;  
(b) 第二种时空混和网格的局部放大

Fig. 5 (a) The second type of time - space mesh;  
(b) The local zoom for second type of time - space mesh

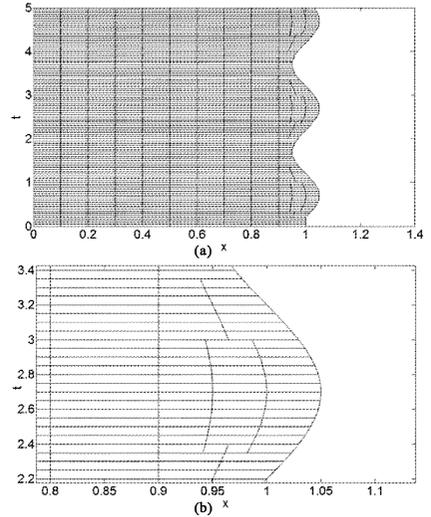


图6 (a) 第三种时空混和网格;  
(b) 第三种时空混和网格的局部放大

Fig. 6 (a) The third type of time - space mesh;  
(b) The local zoom for third type of time - space mesh

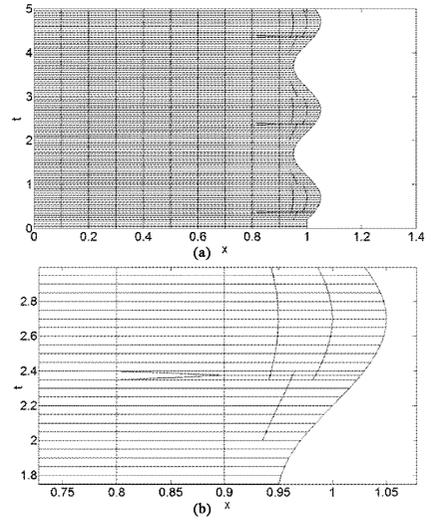


图7 (a) 第四种时空混和网格;  
(b) 第四种时空混和网格的局部放大

Fig. 7 (a) The fourth type of time - space mesh;  
(b) The local zoom for fourth type of time - space mesh

边界周期变化, 周期为 1. 故只需在一个周期内划分网格, 以后周期重复第一个周期的网格. 分别采用图 4 - 7 所示的四种网格, 其积分步长都是

采用以上四种网格计算以上提出的变动边界波动问题, 计算结果如图 8 - 13 所示, 它们分别给出了  $t=0.25(s), 1(s), 2(s), 3(s), 4(s), 5(s)$  时的

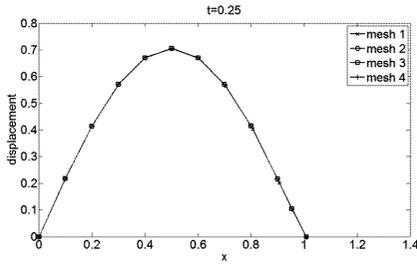


图 8  $t=0.25(s)$  的位移响应;

Fig. 8 (a) The displacement response at  $t=0.25(s)$

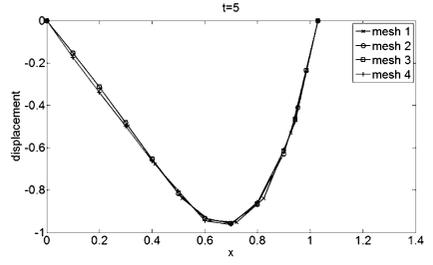


图 13  $t=5(s)$  的位移响应

Fig. 13 The displacement response at  $t=5(s)$

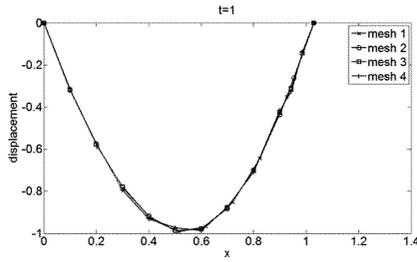


图 9  $t=1(s)$  的位移响应

Fig. 9 The displacement response at  $t=1(s)$

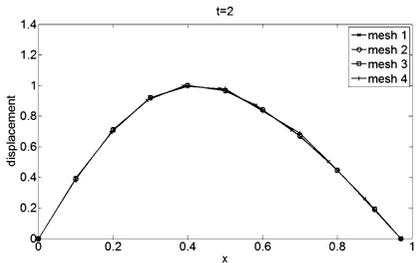


图 10  $t=2(s)$  的位移响应

Fig. 10 The displacement response at  $t=2(s)$

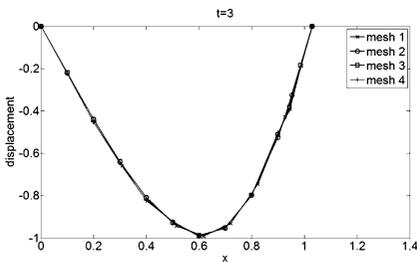


图 11  $t=3(s)$  的位移响应

Fig. 11 The displacement response at  $t=3(s)$

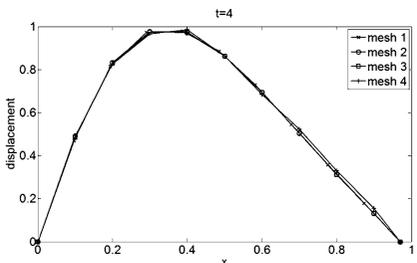


图 12  $t=4(s)$  的位移响应

Fig. 12 The displacement response at  $t=4(s)$

位移响应. 可以看到, 四种网格划分对应的结果互相符合, 相差很小, 况且不同网格的节点并不完全重合, 这说明了本文提出的处理时空网格变动维数方法的正确性.

### 4 结束语

辛数学有其局限性, 对于推广应用不利. 辛数学先天就有传递时相同维数的要求, 不能适应广泛的双曲型偏微分方程的离散求解. 本文提出运用虚功原理的连接方法. 连接后, 每一次传递仍然可以保辛, 但不同层次传递的维数可以不同. 这样就扩展了保辛传递的范围. 应该认识到, 辛数学不可仅限于原来定义的范围, 这样就困住了广泛应用的机会, 而应予以扩展.

辛数学提供了良好的基本框架, 然而一个固定的维数  $n$  是其限制. 按课题的需要, 应当让不同维数的辛传递矩阵共同发挥作用. 于是在不同维数的辛传递矩阵群之间一定要互相连接. 考虑到运用保辛数值方法的意图, 本来是期望能够能量保守. 按变分法进一步发展的思路, 本文提出了运用虚功原理的连接方案. 数值例题验证表明, 虚功原理的方案得到的数值结果能够达到满意的程度. 虽然本文选择的例题只是最简单的波动方程的离散, 但其虚功原理基本思路属于变分法的进一步发展, 相信是广泛适用的.

### 参 考 文 献

- 1 钟万勰. 应用力学的辛数学方法. 北京: 高等教育出版社, 2006 ( Zhong Wxianxie. Symplectic Solution Methodology in Applied Mechanics. Beijing: Higher Education Press, 2006 (in Chinese) )
- 2 冯康, 秦孟兆. Hamilton 体系的辛计算格式. 杭州: 浙江科技出版社, 2004 ( Feng Kang, Qin Mengzhao. Symplec-

- tic Geometric algorithm for Hamiltonian systems. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press, 2003 (in Chinese))
- 3 G Zhong, JE Marsden. Lie-Poisson Hamilton-Jacobi theory and Lie-Poisson integrators. *Physics Letter A*, 1988, 113(3):134 ~ 139
  - 4 E Hairer, Ch Lubich, G Wanner. Geometric numerical integration-Structure preserving algorithms for ordinary differential equations-2nd Ed. Berlin: Springer, 2006
  - 5 高强, 钟万勰. Hamilton 系统的保辛-守恒积分算法, 动力学与控制学报, 2009, 7(3):193 ~ 199 (Gao Qiang, Zhong Wanxie. The symplectic and energy preserving method for the integration of hamilton system. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(3):193 ~ 199 (in Chinese))
  - 6 钟万勰, 高强. 时间-空间混和有限元. 动力学与控制学报, 2007, 5(1):1 ~ 7 ( Zhong Wanxie, Gao Qiang. Harmony element method for time and space domain. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(1):1 ~ 7 (in Chinese))
  - 7 H Goldstein. Classical mechanics, 2nd ed. , Addison-Wesley, 1980
  - 8 P M Morse and H Feshbach: Methods of Theoretical Physics, chapter 2. McGraw-Hill, 1953
  - 9 钟万勰. 力、功、能量与辛数学. 大连:大连理工大学出版社, 2009 ( Zhong Wxanxie. Force, Work, Energy and Symplectic Mathematics. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2009(in Chinese))
  - 10 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制. 大连:大连理工大学出版社, 1993 ( Zhong Wanxie, Ouyang Huajiang, Deng Zichen. Computational Structural Mechanics and Optimal Control. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1993 (in Chinese))

## FEM, VARIATIONAL PRINCIPLE AND THE GENERALIZATION OF SYMPLECTIC MATHEMATICS\*

Gao Qiang Zhong Wanxie

(Department of Engineering Mechanics, State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment,  
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract** The harmony finite element method for solving the evolution partial differential equation requires different dimension on space-time domain, which does not satisfy the restrictions on the same dimension of symplectic matrix group. In this paper, according to variational principle and using the virtual work principle, a principle for dealing with the different dimension problem of symplectic transfer matrix was proposed. The numerical example shows that the proposed method is effective.

**Key words** evolution partial differential equation, harmony FEM, symplectic transfer matrix, the connection of different dimension