

# 振型函数拟合方法求解移动荷载作用下连续梁的响应\*

钱长照 陈得良

(长沙理工大学土木与建筑学院,长沙 410076)

**摘要** 利用 ANSYS 对连续梁桥进行模态分析,得到各阶频率及振型数据.利用 MATLAB 编制程序对振型函数数据进行函数拟合,拟合函数采用等截面直梁的振型函数通式,相比样条插值函数和振型函数修正方法,该方法拟合得到的振型函数更为简单,更加和实际振型吻合,便于工程应用.利用拟合的振型函数,对移动荷载作用下连续梁的响应进行分析,应用方便,且得到相当好的结果.该方法具有较好的工程应用价值.

**关键词** 耦合振动, 摄动法, 车辆-桥梁系统

## 引言

车桥系统振动是一个古老而又复杂难解的课题,其振动机理在桥梁设计、维护和控制中起着重要的作用.早在 100 多年前,英国铁路桥梁在列车通过时发生强烈振动而破坏,提出了移动荷载作用下的车桥耦合振动问题.自此,移动荷载问题引起了各国学者的关注与广泛性研究<sup>[1-2]</sup>.已有大量关于移动荷载下桥梁振动的理论研究、数值研究和实验分析,但迄今为止仍然没有清楚桥梁振动的所有特征,且大多的理论研究的桥梁模型都是简支梁模型.

相对于简支梁,连续梁在移动荷载作用下的车桥耦合振动的最大问题就是在于桥梁振型函数的确定.多跨连续梁的振型函数还没有统一的解析表达式,研究从不同的假设出发,提出了各种振型函数的确定方法来实现问题的求解<sup>[3-8]</sup>.

Lee<sup>[3]</sup>采用简支梁的振动模态作为假设模态,将中间点约束看作刚性的线性弹簧约束,利用哈密顿原理求解了有中间支撑点约束的梁在移动荷载作用下的动力响应.由于振型函数不能满足中间约束点的位移,必然会引起误差<sup>[4]</sup>.Zhang<sup>[5]</sup>和 Cheung<sup>[6]</sup>采用了修正的振型函数作为假设模态,能满足桥梁两端和中间支撑点的所有零挠度条件.但是由于获得修正的振型函数还是建立在简支梁的振动模态上,且计算过程比较繁杂,不利于推广应用. Saadeghvaziri M A 曾经用有限元软件 ADINA 对

移动荷载作用下的桥梁进行响应计算,但是他同时也指出了用有限元软件处理该类问题在网格划分和加载处理的不足<sup>[7]</sup>.基于 ANSYS 对桥梁系统的模态分析结果,沈火明等<sup>[8]</sup>进行三次样条插值得到不单满足梁两端的零挠度边界条件,而且满足梁中间支撑点处的零挠度条件,能真实反映连续梁的各阶振型,进而研究了移动荷载作用下等截面连续梁的响应,得到较为满意的结果.但难以给出振型函数的显示表达式,所得振型函数不便于重复利用.

本文利用结构摄动理论,从理论上严格证明摄动方法对耦合方程解耦求解的可行性,用实例分析验证了求解结果的可靠性.同时由所得摄动方程揭示了摄动解的本质,为利用 ANSYS 软件求解车桥耦合振动问题提供了编程思想,算例也表明了该方法是可行的.拓宽了 ANSYS 软件的应用,为工程求解耦合振动问题提供了一种新的方法.

## 1 振型拟合

当不计剪切变形和转动惯量,并假定轴向变形影响可以忽略时,等截面直梁的自由振动方程可直接写出

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

其中  $EI$  为梁的截面抗弯刚度,  $\rho$  为材料密度,  $A$  为梁截面面积

由分离变量法可令梁弯曲振动挠度函数为:

$$w(x,t) = Y(x)T(t) \quad (2)$$

分离变量得

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \lambda^4 Y(x) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d^4 T(t)}{dt^2} + \omega^4 T(t) = 0 \tag{4}$$

其中  $\lambda$  与  $\omega$  存在关系

$$\lambda = \sqrt{\frac{\omega^2 m}{EI}} \tag{5}$$

方程(3)的解可写为

$$Y(x) = A_1 \sin(\lambda x) + A_2 \cos(\lambda x) + A_3 \sinh(\lambda x) + A_4 \cosh(\lambda x) \tag{6}$$

即振型函数,其中  $A_i$  是由边界支撑条件决定的待定常数.对于简单的支撑条件,如简支梁模型,可以将边界支撑条件代入方程(6)求解得到.但对于稍微复杂的桥梁模型,就无法通过直接求解方程得到待定常数.但在很多工程问题中振型函数的求解是非常关键的,如移动荷载响应求解、移动荷载识别及裂纹参数识别等等问题,因此,写出振型函数的表达式是很有意义的.有限元作为结构计算中重要的工具,可以很容易的通过模态分析得到振动频率和振型,但得到振型是由离散的数据点表示的,应用到其它工程问题存在困难. MATLAB 作为工程计算中重要的计算软件有着强大的处理数据功能,利用 MATLAB 对有限元软件得到的数据进行函数模拟是可行的.本文基于这种思想给出振型模拟的方法并应用到移动荷载响应求解问题中.

将有限元模型中节点坐标用列向量表示为

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T \tag{7}$$

由有限元求得某阶振型对应于各节点处数值用列向量表示为

$$Y_i = \{y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}\}^T \tag{8}$$

将节点坐标代入向量  $\{\sin\lambda_i x, \cos\lambda_i x, \sinh\lambda_i x, \cosh\lambda_i x\}$  后组成矩阵

$$N_i = \begin{bmatrix} \sin\lambda_i x_1 & \cos\lambda_i x_1 & \sinh\lambda_i x_1 & \cosh\lambda_i x_1 \\ \sin\lambda_i x_2 & \cos\lambda_i x_2 & \sinh\lambda_i x_2 & \cosh\lambda_i x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\lambda_i x_n & \cos\lambda_i x_n & \sinh\lambda_i x_n & \cosh\lambda_i x_n \end{bmatrix} \tag{9}$$

其中  $\lambda_i$  由(5)式得到,利用 MATLAB 内部函数 `linefit2()` 即可拟合曲线得到

$$A_i = \{A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}, A_{i4}\} = \text{linefit}(X, Y_i, N_i) \tag{10}$$

考虑到在曲线拟合中拐点会带来较大的偏差,因

此,对于振型拟合采用分段函数得到,由算例中图 1~图 3 可以看出,拟合得到的曲线与数值点比较吻合.

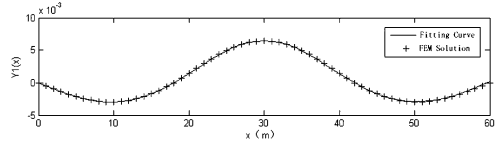


图1 第一阶振型曲线

Fig. 1 The curve of first modal

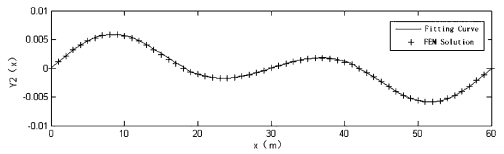


图2 第二阶振型曲线

Fig. 2 The curve of second modal

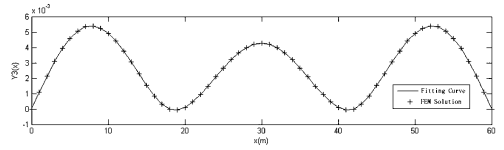


图3 第三阶振型曲线

Fig. 3 The curve of third modal

**算例:** 本文分析文献[5]中三跨连续梁简化模型,截面尺寸及各跨长度如图 4 所示.桥梁密度  $\rho = 2400\text{kg}/\text{m}^3$ ,杨氏模量为  $E = 30\text{GPa}$ .使用 ANSYS 建模计算得到前三阶频率为  $\omega_1 = 30.072, \omega_2 = 49.181, \omega_3 = 59.007$ .由式(5)计算得  $\lambda_1 = 0.15549, \lambda_2 = 0.192528, \lambda_3 = 0.210883$ ,为了使拟合函数较好的满足中间支撑点的支撑条件,按三跨将振型函数模拟成三段的分段函数,拟合得到的各阶振型函数中系数  $A_i$  如表 1~表 3 所示.

表 1 第一阶振型函数中常数项

Table 1 Constant in the first modal function

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$0 \leq x \leq 18$	-0.003285	0.0001095	0.00026609	-0.00011878
$18 < x < 42$	-0.0059318	-0.00028309	-0.028659	0.028664
$42 \leq x \leq 60$	-0.0032597	-0.00042185	-0.82967	0.82967

表 2 第二阶振型函数中常数项

Table 2 Constant in the second modal function

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$0 \leq x \leq 18$	0.0056172	1.62E-05	0.00012852	-1.5731E-05
$18 < x < 42$	0.0021503	0.0011957	-0.058756	0.058755
$42 \leq x \leq 60$	0.0029778	0.004763	5.8604	-5.8604

表3 第三阶振型函数中常数

Table 3 Constant in the third modal function

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$0 \leq x \leq 18$	0.0050768	$1.4175e-005$	0.00015547	$-1.6142e-005$
$18 < x < 42$	0.00016402	0.0037852	-0.1371	0.1371
$42 \leq x \leq 60$	-0.0050565	0.00045327	-21.783	21.783

## 2 移动荷载作用响应求解

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \delta(x - vt) F(t) \quad (11)$$

其中  $v$  为梁上荷载的移动速度(假定为恒量),利用模态叠加原理,令  $w(x, t) = Y_n(x) T(t)$ ,若  $Y_n(x)$  为标准正交模态,则可利用模态正交性得振动方程

$$\ddot{T}_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = Y_n(vt) F(t) \quad (12)$$

方程(12)用数值方法或 Duhamel 积分方法均可求解,为了验证方法的可靠性,取上面实例中三跨连续梁模型上作用移动荷载计算,并与 ANSYS 方法<sup>[9]</sup> 所得结果相比较.由图可以看出拟合振型方法求解得到的结果与 ANSYS 方法得到结果吻合较好.

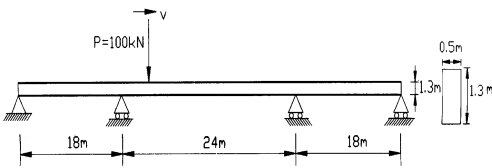


图4 移动荷载作用下的连续梁桥模型

Fig.4 Continuous bridge under moving load

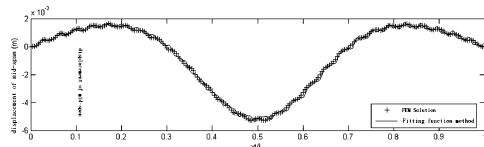


图5 中跨跨中竖向位移-时间历程图

Fig.5 Deflection history curve of mid-span's mid-point

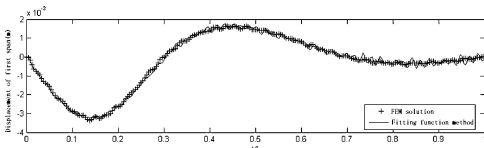


图6 左边跨跨中位移-时间历程图

Fig.6 Deflection history curve of left span's mid-point

图中本文计算结果采用了三阶振型叠加,可以看出结果相当吻合.实际研究表明,对于中跨跨中

的响应,仅采用一阶振型叠加即可得当近似程度较高的结果,但对于边跨,则必须采用至少三阶振型叠加,否则会在荷载不在研究点所在跨移动时产生较大的误差<sup>[8]</sup>.

## 3 结论

本文采用等截面直梁的振型函数通式为拟合函数,基于 ANSYS 对连续梁桥进行模态分析所得到的各阶频率及各阶振型数据,利用 MATLAB 编制程序对振型函数数据进行函数拟合.利用拟合的振型函数,对移动荷载作用下连续梁的响应进行分析,应用方便,且得到相当好的结果.该方法具有一定的工程应用价值和意义:

(1) 相比样条插值函数法,该方法得到函数表达式形式更加简单,应用更加方便;相比振型函数修正方法,该方法拟合得到的振型函数和实际振型吻合.

(2) 对于多跨连续梁问题依然可以应用,只是对于更多跨的连续梁振型拟合函数需要更多的分段.

(3) 得到的振型函数在应用到移动荷载作用下连续梁响应问题相当方便.为了比较效果,观察其可靠性,本文仅对数值不变的移动荷载进行了分析,实际上可以对有车辆模型的车桥耦合振动响应进行分析,将在其他文中论述.

总之,本文的主要创新之处和意义就在于得到了形式更加简单应用更加方便的振型函数,拓宽了移动荷载作用下连续梁响应的求解方法.

## 参 考 文 献

- 1 Michaltsos G, Sophianopoulos D, Kounadis A N. The effect of a moving mass and other parameters on the dynamic response of a simply supported beam. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 191(3): 3572362
- 2 Hillerborg A. Dynamic influences of smoothly running loads of simply supported girders. Stockholm: Kungl. Tekhn. Hogskolan, 1951:1250
- 3 Lee H P. Dynamic response of beam with a moving mass. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 191(2): 289 ~ 294
- 4 Lin Y H, Comment on Dynamic Response of a Beam with Intermediate Point Constraints Subject to a Moving Load. *Journal of sound and Vibration*, 1995, 180(5): 808 ~

- 812
- 5 Zhang D Y , Cheung Y K, AUFTK, Cheng Y S. Vibration of Multi-span Non-Uniform Beams Under Moving Loads by Using Modified Beam Vibration Functions. *Journal of sound and Vibration*, 1998, 212 (3) : 455 ~ 467
- 6 Cheung Y K, Auftk, Zhang D Y, Cheng Y S. Vibration of Multi-span Non-Uniform Bridges Under Moving Vehicles and Trains by Using Modified Beam Vibration Functions. *Journal of sound and Vibration*, 1999, 228 (3) : 611 ~ 628
- 7 Saadeghvaziri M A. Finite Element Analysis of Highway Bridges Subjected to Moving Loads. *Computers & Structures*, 1993, 49 (5) : 837 ~ 842
- 8 沈火明,肖新标. 插值振型函数法求解移动荷载作用下等截面连续梁的动态响应. 振动与冲击, 2005, 24(2) : 27 ~ 32 (Shen huoming, Xiao Xinbiao. Vibration response of multi-span uniform beam under moving loads by using fitting beam mode function. *Journal of Vibration and Shock*, 2005, 24(2) : 27 ~ 32 (in Chinese))
- 9 钱长照. 车桥耦合振动的摄动分析方法. 动力学与控制学报, 2009, 7(4), 375 ~ 378 (Qian changzhao. Perturbation method for coupling vibration of vehicle-bridge system. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(4) : 375 ~ 378 (in Chinese))
- 10 彭献,游福贺,高伟钊,金一鸣,刘子建. 移动质量与梁耦合系统的固有频率的计算与分析. 动力学与控制学报, 2009, 7(3), 270 ~ 274 (Peng Xian, You Fuhe, Gao Weizhao, Jin Yiming, Liu Zijian. Calculation and analysis on natural frequency of a moving mass and beam's coupled system. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(3) : 270 ~ 274 (in Chinese))

## SOLVING THE RESPONSE OF CONTINUOUS BRIDGE USING THE MODAL FUNCTION OF FIT \*

Qian changzhao    Chen Deliang

(College of civil and architecture Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410076, China)

**Abstract** The frequencies and modal data of a continuous bridge were obtained using finite element method. Based on the software MATLAB, the modals were expressed as modal functions of fit. Using the fitting function, the response of the continuous bridge with moving load was studied. Compared with the method using spline function or modified modal function, the present method is more convenient in engineering application.

**Key words** coupling dynamic system, perturbation method, vehicle-bridge system