

车桥耦合系统固有频率的研究*

彭献 游福贺

(湖南大学机械与运载工程学院,长沙 410082)

摘要 建立了用来计算车桥耦合系统各阶固有频率的特征值方法理论,研究了系统的各阶固有频率随车辆在桥梁上相对位置和车辆与桥梁相对刚度的变化规律,以及系统基频随车速和加速度的变化规律.数值算例结果表明,车桥耦合系统的各阶固有频率不仅与相对位置有关,而且与相对刚度有关,并且呈现一定的规律性,车速和加速度对耦合系统的基频也有一点程度的影响,若用桥梁的固有频率取代耦合系统的固有频率将会产生较大误差.

关键词 车桥耦合系统, 固有频率, 特征值算法

引言

随着计算机与计算技术的发展,将车辆与桥梁作为一个耦合系统来进行研究成为可能,并取得了长足进展^[1-9].固有频率是结构的重要动力特性之一,确定或计算固有频率是结构动力分析的主要任务之一.以上研究大都集中在耦合系统的响应分析上,尚未涉及耦合系统固有频率的计算与分析.在工程实际中,长期以来对于车桥耦合系统通常用桥梁的固有频率取代系统的固有频率.文[10]虽然研究的是移动质量与梁耦合系统的固有频率,但从其结果来看,若用梁的固有频率取代耦合系统的固有频率或用实验值代替理论值有时会产生较大误差的结论,说明了进一步研究车桥耦合系统固有频率的必要性.本文建立了用来计算车桥耦合系统各阶固有频率的特征值方法理论,研究了系统的各阶固有频率随车辆在桥梁上相对位置(即位置比)和车辆与桥梁刚度比值(即刚度比)的变化规律,以及系统基频随车速和加速度的变化规律,鉴于文[10]着重研究了耦合系统的各阶固有频率随运动体与梁质量比的变化规律,其结果对车桥耦合系统仍有指导意义,故本文不再探讨这方面问题.数值算例结果表明,车桥耦合系统的各阶固有频率不仅与位置比有关,而且与刚度比有关,并且呈现一定的规律性,车速和加速度对耦合系统的基频也有一点程度的影响.本文的研究对桥梁的动态设计、动

力性能评估以及桥梁的振动控制具有一定的指导意义.

1 基本理论

考察图1所示车桥耦合系统,由达朗贝尔原理得到其振动微分方程为:

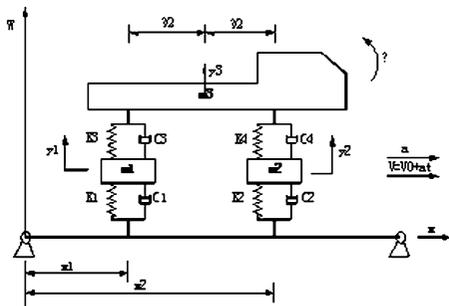


图1 车桥耦合系统的力学模型

Fig. 1 Mechanical modal of vehicle - bridge coupled system

$$EIY'''' + m \ddot{Y} + D \dot{Y} - [(m_1 + m_3/2)g + m_1 \dot{y}_1 + m_3 \dot{y}_3/2 - I_1 \ddot{\theta}/\lambda - m_1 a Y'_1 - m_3 a Y'_1/2] \delta(x - x_1) - [(m_2 + m_3/2)g + m_2 \dot{y}_2 + m_3 \dot{y}_3/2 + I_1 \ddot{\theta}/\lambda - m_2 a Y'_2 - m_3 a Y'_2/2] \delta(x - x_2) = 0 \quad (1)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + K_1(y_1 + Y_1) + C_1(\dot{y}_1 + \dot{Y}_1) + K_3(y_1 - y_3 + \theta\lambda/2) + C_3(\dot{y}_1 - \dot{y}_3 + \dot{\theta}\lambda/2) = m_1 a Y'_1 + m_3 a Y'_1/2 \quad (2)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + K_2(y_2 + Y_2) + C_2(\dot{y}_2 + \dot{Y}_2) + K_4(y_2 -$$

$$y_3 + \theta\lambda/2) + C_4(\dot{y}_2 - \dot{y}_3 + \dot{\theta}\lambda/2) = m_3 a Y'_2 + m_3 a Y'_2/2 \quad (3)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + K_3(y_3 - y_1 - \theta \frac{\lambda}{2}) + C_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_1 - \dot{\theta}\lambda/2) + K_4(y_3 - y_2 + \theta\lambda/2) + C_4(\dot{y}_3 - \dot{y}_2 + \dot{\theta}\lambda/2) = m_3 a Y'[(x_1 + x_2)/2] \quad (4)$$

$$I_1 \ddot{\theta} - K_3(y_3 - y_1 - \theta\lambda/2)\lambda/2 - C_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_1 - \dot{\theta}\lambda/2)\lambda/2 + K_4(y_3 - y_2 + \theta\lambda/2)\lambda/2 + C_4(\dot{y}_3 - \dot{y}_2 - \dot{\theta}\lambda/2)\lambda/2 = 0 \quad (5)$$

式中, $\delta(x - x_i)$ ($i = 1, 2$) 为狄拉克函数. EI 、 m 、 D 和 L 分别为桥梁的抗弯刚度、分布质量、阻尼系数和跨度; x_2, x_1 为车辆的前后轴在桥梁上的位置; $Y(x, t)$ 为桥梁的横向振动位移, 在此取向向下为正; m_1 、 m_2 、 m_3 和 I_1 为车辆的惯性系数; K_1 、 K_2 、 K_3 和 K_4 为车辆的弹性系数; C_1 、 C_2 、 C_3 和 C_4 为车辆的阻尼系数; λ 为车辆的前后轴间距, 本文设前后两轴到车辆重心的距离相等; y_1 、 y_2 、 y_3 和 θ 为车辆的广义坐标; Y_2, Y_1 为车辆前后轴所在位置梁的横向振动位移, a 为车辆的加速度. 令

$$Y(x, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \quad (6)$$

式中, $\phi_i(x)$ 为桥梁的模式函数, N 为模式截断数. 注意到 $\phi_i'''' = \beta_i^4 \phi_i(x)$ 以及模式函数的正交性, 得

$$m\omega_i^2 q_i(t) + m\ddot{q}_i(t) + D\dot{q}_i(t) - [(m_1 + \frac{m_3}{2})g + m_1 \ddot{y}_1 + \frac{m_3}{2} \ddot{y}_3 - \frac{I_1 \ddot{\theta}}{\lambda} - m_1 a \sum_{j=1}^N \phi'_j(x_1) q_j(t) - \frac{m_3}{2} a \sum_{j=1}^N \phi'_j(x_1) q_j(t)] \phi_i(x_1) - [(m_2 + \frac{m_3}{2})g + m_2 \ddot{y}_2 + \frac{m_3}{2} \ddot{y}_3 + \frac{I_1 \ddot{\theta}}{\lambda} - m_2 a \sum_{j=1}^N \phi'_j(x_2) q_j(t) - \frac{m_3}{2} a \sum_{j=1}^N \phi'_j(x_2) q_j(t)] \phi_i(x_2) = 0 \quad (7)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + K_1[y_1 + \sum_{i=1}^N \phi_i(x_1) q_i(t)] + K_3(y_1 - y_3 + \theta \frac{\lambda}{2}) - m_1 a \sum_{i=1}^N \phi'_i(x_1) q_i(t) - \frac{1}{2} m_3 a \sum_{i=1}^N \phi'_i(x_1) q_i(t) + C_1[\dot{q}_1 + (v_0 + at) \sum_{i=1}^N \phi'_i(x_1) q_i(t) + \sum_{i=1}^N \phi_i(x_1) \dot{q}_i(t)] + C_3(\dot{y}_1 - \dot{y}_3 + \dot{\theta} \frac{\lambda}{2}) = 0 \quad (8)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + K_2[y_2 + \sum_{i=1}^N \phi_i(x_2) q_i(t)] + K_4(y_2 - y_3 +$$

$$\theta \frac{\lambda}{2}) - m_1 a \sum_{i=1}^N \phi'_i(x_2) q_i(t) - \frac{1}{2} m_3 a \sum_{i=1}^N \phi'_i(x_2) q_i(t) + C_2[\dot{q}_2 + (v_0 + at) \sum_{i=1}^N \phi'_i(x_2) q_i(t) + \sum_{i=1}^N \phi_i(x_2) \dot{q}_i(t)] + C_4(\dot{y}_2 - \dot{y}_3 + \dot{\theta} \frac{\lambda}{2}) = 0 \quad (9)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + K_3(y_3 - y_1 - \theta \frac{\lambda}{2}) + K_4(y_3 - y_2 + \theta \frac{\lambda}{2}) - m_3 a [\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi'_i(x_1) q_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi'_i(x_2) q_i(t)] + C_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_1 - \dot{\theta} \frac{\lambda}{2}) + C_4(\dot{y}_3 - \dot{y}_2 + \dot{\theta} \frac{\lambda}{2}) = 0 \quad (10)$$

$$I_1 \ddot{\theta} - K_3(y_3 - y_1 - \theta \frac{\lambda}{2}) + K_4(y_3 - y_2 + \theta \frac{\lambda}{2}) \frac{\lambda}{2} - C_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_1 - \dot{\theta} \frac{\lambda}{2}) \frac{\lambda}{2} + C_4(\dot{y}_3 - \dot{y}_2 + \dot{\theta} \frac{\lambda}{2}) \frac{\lambda}{2} = 0 \quad (11)$$

式(7)中的 ω_i ($i = 1, 2, \dots, N$) 为桥梁的各阶固有频率.

方程(7) ~ (11)可写成如下矩阵形式:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{P\} \quad (12)$$

利用方程(12), 在车辆变速运动情况下, 通过获取桥梁的跨中挠度响应曲线, 可以数值仿真实验获得耦合系统的基频, 用于研究车辆的速度和加速度对耦合系统固有频率的影响. 本文称其为跑车仿真实验法.

又令

$$\{q\} = \{Q\} \sin \hat{\omega} t \quad (13)$$

代入式(12)有

$$([K] - \hat{\omega}^2 [M]) \{Q\} = 0 \quad (14)$$

可得车桥耦合系统的特征方程:

$$|[K] - \hat{\omega}^2 [M]| = 0 \quad (15)$$

解此方程就可获得车桥耦合系统的各阶固有频率值 $\hat{\omega}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), 用于研究车辆位置、质量及刚度对耦合系统固有频率的影响. 此即特征值计算法.

从理论的推导过程可以看出, 上述特征值方法计算车桥耦合系统的各阶固有频率, 对桥梁的边界条件未加任何限制, 只要能写出其模式函数的解析表达式就能应用, 因而适用范围较广.

2 算例分析

以车辆与简支梁桥耦合系统为例,说明车桥耦合系统固有频率的计算与分析.简支梁桥的各阶固有频率和模态函数的表达式分别为:

$$f_1 = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{\beta_i^2 \sqrt{EI}}{2\pi \sqrt{m}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\phi_i(x) = \sin \frac{i\pi}{L} x \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (16)$$

桥梁的参数取为:

$$EI = 2.5663 \times 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^2; m = 3.6 \times 10^4 \text{ kg/m}; L = 50 \text{ m}$$

按式(16),简支梁桥的前三阶固有频率的理论计算值分别为:

$$f_1 = 1.6776 \text{ Hz}, f_2 = 6.7103 \text{ Hz}, f_3 = 15.0982 \text{ Hz} \quad (17)$$

汽车的参数取为:

$$m_1 = m_2 = 1.0 \times 10^4 \text{ kg}, m_3 = 2.5 \times 10^5 \text{ kg},$$

$$I_1 = 2.0 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0,$$

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 5.0 \times 10^6 \text{ N/m}$$

2.1 位置和刚度对耦合系统固有频率的影响

定义位置比,按式(15)计算,车桥耦合系统的前三阶固有频率随位置比的变化列于表1所示.

表1 耦合系统的前三阶固有频率随位置比的变化

position ratio	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
f_1 (Hz)	1.6773	1.6716	1.6630	1.6527	1.6418	1.6315	1.6226	1.6159	1.6117	1.6102
position ratio	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	
f_1 (Hz)	1.6117	1.6159	1.6226	1.6315	1.6418	1.6527	1.6630	1.6716	1.6773	
position ratio	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
f_2 (Hz)	6.7041	6.7038	6.7034	6.7031	6.703	6.7031	6.7034	6.7038	6.7041	6.7042
position ratio	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	
f_2 (Hz)	6.7041	6.7038	6.7034	6.7031	6.703	6.7031	6.7034	6.7038	6.7041	
position ratio	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
f_3 (Hz)	15.1017	15.1045	15.1065	15.1061	15.1035	15.1010	15.1005	15.1026	15.1054	15.1067
position ratio	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	
f_3 (Hz)	15.1054	15.1026	15.1005	15.1010	15.1035	15.1061	15.1065	15.1045	15.1017	

由表1可知,车桥耦合系统的各阶固有频率随位置比变化呈现如下规律:当位置比 $\bar{x} < 0.5$ 时, f_1 随 λ 增大而降低,当位置比 $\bar{x} > 0.5$ 时,随 \bar{x} 增大而增大.当 $\bar{x} < 0.25$ 时, f_2 随 \bar{x} 增大而降低, $0.25 < \bar{x} < 0.5$ 时, f_2 随 \bar{x} 增大而增大, $0.5 < \bar{x} < 0.75$ 时, f_2 随 \bar{x} 增大而降低, $\bar{x} > 0.75$ 时, f_2 随 \bar{x} 增大而增大.当 $\bar{x} < 0.15$ 时, f_3 随 \bar{x} 增大而增大, $0.15 < \bar{x} < 0.35$ 时, f_3 随 \bar{x} 增大而降低, $0.35 < \bar{x} < 0.5$ 时, f_3 随 $\lambda\bar{x}$ 增大而增大, $0.5 < \bar{x} < 0.65$ 时, f_3 随 \bar{x} 增大而降低, $0.65 < \bar{x} < 0.85$ 时, f_3 随 \bar{x} 增大而增大, $\bar{x} > 0.85$ 时, f_3 随 \bar{x} 增大而降低.

耦合系统的前三阶固有频率与式(17)给出的桥梁前三阶固有频率理论计算值误差分别为4%,0.11%和0.056%.可见,具有重要意义的基频误差最大,这说明车辆位置对耦合系统的基频影响最大,若用梁桥的基频取代耦合系统的基频将带来较大误差.

为了更清晰的反映耦合系统的各阶固有频率随位置比和刚度比的变化规律,图2~图4分别给

出了车桥耦合系统的前三阶固有频率随位置比和刚度比变化的三维图形.由图可见,各阶固有频率随位置比呈简谐函数规律变化,且阶数愈高波数愈多,一阶固有频率呈现半波形状,二阶固有频率呈现全波形状,三阶固有频率呈现1.5倍全波形状;随着刚度比的增大,第一阶固有频率波形变化不大,但第二阶固有频率和第三阶固有频率波形变化十分明显,波幅显著增大.

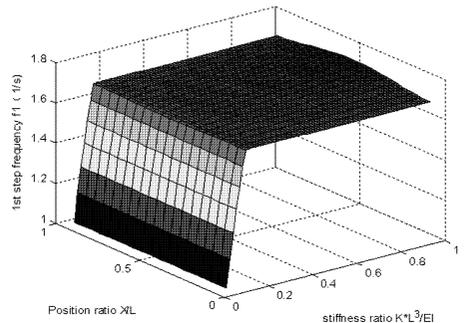


图2 耦合系统的第1阶固有频率随位置比和刚度比的变化

Fig. 2 Changes of 1st step natural frequency of the coupled system with position ratio and stiffness ratio

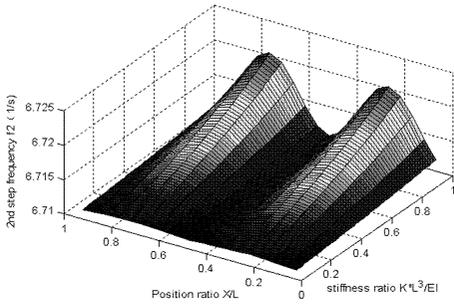


图3 耦合系统的第2阶固有频率随位置比和刚度比的变化
Fig. 3 Changes of 2nd step natural frequency of the coupled system with position ratio and stiffness ratio

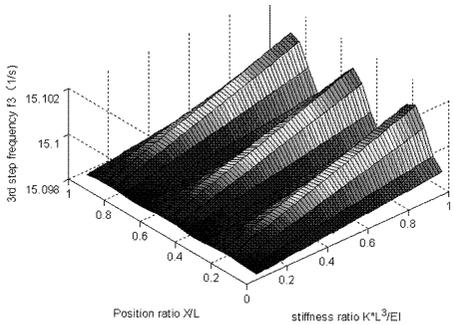


图4 耦合系统的第3阶固有频率随位置比和刚度比的变化
Fig. 4 Changes of 3rd step natural frequency of the coupled system with position ratio and stiffness ratio

2.2 速度和加速度对耦合系统固有频率的影响

车辆的速度和加速度对耦合系统固有频率的影响,可藉跑车仿真实验法通过获取桥梁的跨中挠度响应曲线获得.图5给出了车辆在桥梁上加速行驶($v = 5\text{m/s}$, $a = 12\text{m/s}^2$)时获取的桥梁跨中的一个挠度时间历程样本,据此样本可换算得到给定速度和加速度时耦合系统的基频值.

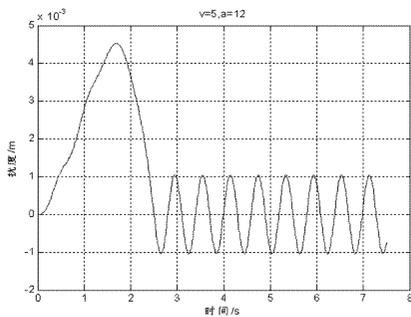


图5 桥梁跨中的挠度时间历程

Fig. 5 Time course of the mid-span deflection of the bridge

车桥耦合系统的基频随车辆速度和加速度的变化列于表2所示.

由表2可知,车速和加速度对耦合系统的基频有一定程度的影响,与式(17)给出的桥梁的基频

理论计算值误差在0.45~0.66%之间变化.

表2 耦合系统的基频随车辆速度和加速度的变化
Table 2 Changes of 1st step natural frequency of the coupled system with speed and acceleration

v (m/s)	a (m/s ²)				
	0	3	6	9	12
5	1.6701	1.6701	1.6746	1.6754	1.6771
10	1.6842	1.6771	1.6771	1.6789	1.6771
15	1.6771	1.6746	1.6746	1.6771	1.6754
20	1.6807	1.6771	1.6771	1.6886	1.6746
25	1.6771	1.6754	1.6746	1.6787	1.6766
30	1.6706	1.6807	1.6766	1.6746	1.6746

3 结束语

车桥耦合系统的各阶固有频率随位置比呈简谐函数规律变化,且阶数愈高波数愈多,一阶为半波,二阶为全波,三阶为1.5倍全波形状;随着刚度比的增大,一阶波形变化不大,但二阶以上变化十分明显,波幅显著增大.车速和加速度对耦合系统的基频也有一点程度的影响.这些都说明车桥耦合系统的各阶固有频率并非常量,而与车辆的质量、刚度、车速和加速度以及车辆在桥梁上的位置等诸多因素有关,若用桥梁的固有频率取代耦合系统的固有频率有时会产生较大误差.

上述结论对于桥梁的动态设计、动力性能评估以及振动控制具有一定的指导意义.

参考文献

- 1 夏禾. 车辆与结构动力相互作用. 北京: 科学出版社, 2002: 1~11 (Xia H. The vehicles and the structure power affect mutually. Beijing: Science Press, 2002: 1~11 (in Chinese))
- 2 Henchi K, Fafardm M, Talbot M, Dhatt G. An efficient algorithm for dynamic analysis of bridges under moving vehicles using a coupled modal and physical components approach. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 212 (4): 663~683
- 3 Chompooming K, Yener M. The influence of roadway surface irregularities and vehicle deceleration on bridge dynamics using the method of lines. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 183 (4): 567~589
- 4 Yang H, Chen C A, Tan L, Bergman A. Effects of boundary flexibility on the vibration of a continuum with a moving

- oscillator. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2002, 124 (1): 552 ~ 560
- 5 Michaltsos G T. Dynamic behavior of a single-span beam subjected to loads moving with variable speeds. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 258(2): 359 ~ 372
- 6 Yang Y B, Lin C L, Yau J D, Chang D W. Mechanism of resonance and cancellation for train-induced vibrations on vibrations on bridges with elastic bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 269: 345 ~ 360
- 7 Coussy O, Said M and Hoove J P. The influence of random surface irregularities on the dynamic response of bridges under suspended moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, 130(2): 313 ~ 320
- 8 李小珍, 张黎明, 张洁. 公路桥梁与车辆耦合振动研究现状与发展趋势. *工程力学*, 2008, 25(3): 230 ~ 240 (Li X Z, Zhang L M, Zhang J. State-of-the-art review and trend of studies on coupling vibration for vehicle and highway bridge system. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(3): 230 ~ 240 (in Chinese))
- 9 钱长照. 车桥耦合振动的摄动分析方法. *动力学与控制学报*, 2009, 7(4): 375 ~ 378 (Qian C Z. Perturbation method for coupling vibration of vehicle-bridge system. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(4): 375 ~ 378 (in Chinese))
- 10 彭献, 游福贺, 高伟钊, 金一鸣, 刘子建. 移动质量与梁耦合系统固有频率的计算与分析. *动力学与控制学报*, 2009, 7(3): 270 ~ 274 (Peng X, You F H, Gao W Z, Jin Y M, Liu Z J. Calculation and analysis on natural frequency of a moving mass and beam's coupled system. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(3): 270 ~ 274 (in Chinese))

RESEARCH ON NATURAL FREQUENCY OF VEHICLE-BRIDGE COUPLED SYSTEM*

Peng Xian You Fuhe

(College of Mechanical and Vehicle Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract The formula to calculate the natural frequencies of vehicle-bridge coupled system was established. Changes of the various steps natural frequencies of the coupled system with position ratio and stiffness ratio and the fundamental frequencies with speed and acceleration of the vehicle were researched. The results of numerical examples show that the natural frequencies of coupled system are related, not only to the location ratio but also to the stiffness ratio. The speed and acceleration of vehicle to the fundamental frequencies of coupled system produce different effects. Sometimes there will be bigger error if the natural frequencies of bridge are used instead of the natural frequencies of coupled system.

Key words vehicle-bridge coupled system, natural frequency, eigenvalue computation method