

变速移动弹簧阻尼质量系统作用下梁的动态响应*

陈强 杨国来 王晓锋 葛建立

(南京理工大学机械工程学院, 南京 210094)

摘要 为了分析移动载荷作用下梁的动态响应问题,建立了移动振动质量系统作用下梁的动力学模型,推导出带有附加矩阵和附加向量的时变动力学耦合方程,并整理成便于数值求解的二阶微分方程组,通过与移动力模型和移动质量模型比较,验证了这一方法的可行性,在算例中比较了移动载荷不同运动情况下梁的挠度、弯矩和剪力动载系数。

关键词 移动质量, 梁, 变速运动, 动载系数

引言

移动质量作用下梁的动力学问题在工程实践中有广泛的应用,例如列车桥梁系统的振动、桁车与导轨的振动、火炮后座等问题. 长期以来国内外学者在该领域进行了大量的工作,移动力模型虽然相对简单,但是可以得到解析解,一直是研究的热点, Hilal^[1]建立了移动力模型,通过振型叠加法求解; Fryba^[2]主要通过积分变换法对移动力模型进行了影响梁的挠度动态响应系数的主要因素; 陈伟球等^[3]提出了回传射线矩阵法,用于分析此类结构振动问题. 相对于移动力模型来说,移动质量模型考虑到了移动载荷与梁的相互作用关系,但是由于模型的复杂性,数值方法被广泛的采用, Wu^[4]、Rieker^[5]和汪小超等^[6]通过有限元法对建立的移动质量模型进行了求解. 移动的振动质量系统较前两种模型更为精确,彭献等^[7]通过振型叠加法进行求解; 盛国刚等^[8]通过振型叠加法对多个移动的振动质量系统作用下梁的临界速度和弯矩剪力的动态响应进行了分析; Ouyang 等^[9]提出了综合了有限元法与振型叠加法的数值-解析法,并对移动的振动质量与梁分离和再接触的现象进行了讨论. 模态叠加法虽然可以得到耦合系统的解析解,计算量也不大,但是只局限于对简支梁、悬臂梁等简单边界条件的梁进行分析,对于处理一般边界条件的梁时,由于很难得到梁解析的振型表达式,不便于使用模态叠加法.

本文结合有限元法,分析了变速运动的移动振动质量系统作用在梁上的动力响应问题,建立了移动弹簧-阻尼-质量系统作用下梁的动力学模型,对不同运动状态的移动振动质量系统作用下梁的动力响应进行了数值模拟,与移动力模型和移动质量模型进行了比较,并在算例中给出了弯矩和剪力的响应曲线. 本文所述的方法与模态叠加法相比,在计算速度上虽没有优势,但是能够对具有一般边界条件的梁以及由梁、杆组成的平面结构进行分析.

1 移动振动质量系统作用在梁上的动力学模型

如图1所示,移动质量 M^* 通过弹簧阻尼系统与梁相互作用,梁所受到的载荷表示为:

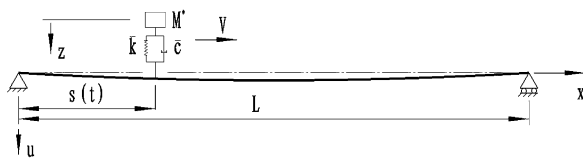


图1 移动弹簧-阻尼-质量系统作用下的简支梁
Fig. 1 Simple supported beam under a moving oscillator

$$f(x,t) = \delta(x-s(t)) \left\{ k[z(t) - u(x,t)|_{x=s(t)}] + c \left[z - \frac{du(x,t)}{dt} \Big|_{x=s(t)} \right] \right\} + mg \quad (1)$$

其中 δ 为 Dirac 函数, $s(t)$ 是移动质量的运动规律, $z(t)$ 为质量块的竖向位移, $u(x,t)$ 表示梁上 x 位置处在 t 时刻的挠度, 括号中两项为弹簧阻尼系统的作用力, m 为梁的线密度, mg 表示梁的自重.

2010-06-02 收到第1稿, 2010-06-27 收到修改稿.

* 国家重点基础研究发展计划 973 项目 (613116)

质量块 M^* 上的平衡方程为:

$$M^* \ddot{z}(t) + \bar{c} \left[\dot{z}(t) - \frac{du(x,t)}{dt} \Big|_{x=s(t)} \right] + \bar{k} [z(t) - u(x,t)|_{x=s(t)}] = M^* g \quad (2)$$

采用二节点 Hermite 插值函数 $N_i(\xi)$, $i=1-4$, 对 Euler-Bernoulli 梁单元建立平面梁的有限元动力学方程, 单元的自由度向量为 $\{w\} = \{u_1 \ \theta_1 \ u_2 \ \theta_2\}^T$ (其中 $u_i, \theta_i (i=1,2)$ 分别为节点上的挠度和转角). 按照虚功等效原理, 移动质量运动到第 i 个单元上时, 此单元的外载荷向量为:

$$\begin{aligned} \{F\}_i^e &= \int_0^l f(x,t) [N]^T dx = \bar{k} [N]^T z(t) - \\ &\bar{k} [N]^T [N] \{w\}_i + \bar{c} [N]^T \dot{z}(t) - \\ &\bar{c} [N]^T [N] \{\dot{w}\}_i - \bar{c} \dot{s}(t) [N]^T \frac{d[N]}{ds} \{w\}_i + \\ &\int_0^l m(x) g [N]^T dx \end{aligned} \quad (3)$$

$s(t)$ 表示移动载荷位移关于时间的导数, 即移动载荷的速度.

移动载荷没有直接作用的单元只受到梁的自重, 即

$$\{F\}_i^e = \int_0^l m(x) g [N]^T dx.$$

质量块 M^* 上的平衡方程经整理得:

$$M^* \ddot{z}(t) + \bar{c} \dot{z}(t) + \bar{k} z(t) = M^* g + \bar{k} [N^*]_i \{w\}_i + \bar{c} [N^*]_i \{\dot{w}\}_i + \bar{c} \dot{s}(t) \frac{d[N]}{ds} \{w\}_i \quad (4)$$

2 移动振动质量系统作用下梁的动力学方程

为了便于数值求解, 综合式(3)和(4), 建立系统的动力学方程形式为:

$$[\tilde{M}] \{\ddot{p}\} + [\tilde{C}] \{\dot{p}\} + [\tilde{K}] \{p\} = \{\tilde{F}\} \quad (5)$$

$\{p\} = \{\{w\}^T, z\}^T$ 是系统的自由度向量, 与梁单元节点的自由度向量 $\{w\}$ 相比, 多了一个自由度, 即质量块的竖向位移 z . 式(5)中的所有系数矩阵也比梁自由振动方程的系数矩阵多了一维.

$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} 0 \\ [M_B] \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \quad \dots \quad 0 \quad M^* \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{C}] = \begin{bmatrix} [C_B] + [\bar{C}] & \{\bar{c}_2\} \\ \{\bar{c}_1\}^T & \bar{c} \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} [K_B] + [\bar{K}] & \{\bar{k}_2\} \\ \{\bar{k}_1\}^T & \bar{k} \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中 $[\bar{C}]$ 和 $[\bar{K}]$ 分别为梁单元的附加阻尼矩阵和附加刚度矩阵, $\{\bar{c}_1\}$, $\{\bar{c}_2\}$ 和 $\{\bar{k}_1\}$, $\{\bar{k}_2\}$ 为附加阻尼向量和附加刚度向量, 只与移动载荷直接作用的单元节点自由度有关, 其他单元的附加矩阵和附加向量为零. 移动质量直接作用单元自由度对应的附加矩阵和附加向量形式为:

$$\begin{aligned} [\bar{C}]^e &= \bar{c} [N]^T [N], \\ [\bar{K}]^e &= \bar{k} [N]^T [N] + \bar{c} \dot{s}(t) [N]^T \frac{d[N]}{ds} \\ \{\bar{c}_1\}^e &= \{\bar{c}_2\}^e = -\bar{c} [N]^T, \\ \{\bar{k}_1\}^e &= -\bar{k} [N] - \bar{c} \dot{s}(t) \frac{d[N]}{ds}, \\ \{\bar{k}_2\}^e &= -\bar{k} [N]^T \end{aligned} \quad (8)$$

载荷向量 $\{\tilde{F}\} = \{\{F\}^T, M^* g\}^T$, $\{F\}$ 为只计算梁自重的载荷向量, $\{\tilde{F}\}$ 比 $\{F\}$ 多了一个元素, 即移动质量的重力 $M^* g$.

3 数值计算算例

算例 1: 如图 1 所示, 不计摩擦影响, 梁的长度为 $L = 1\text{m}$, 截面形状为 $1\text{cm} \times 1\text{cm}$, 密度 $\rho = 10000\text{kg/m}$, 弹性模量 $E = 330.293\text{GPa}$, 移动质量为 $M^* = 1.2\text{kg}$, 以 10m/s 的匀速作用在等截面的简支梁上. 此算例与文献[4]相比只有梁的长度不同, 其他参数相同. 振动质量系统的刚度取 $1\text{E}8\text{N/mm}$, 不计阻尼效应.

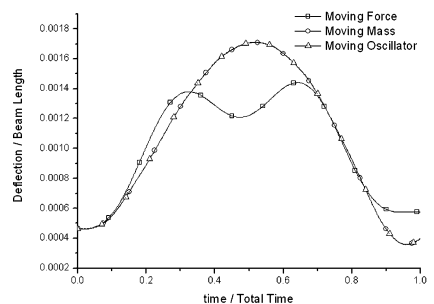


图2 简支梁跨中位置处的无量纲挠度响应曲线
Fig.2 Deflection at the mid-span position of the beam under uniform velocity moving load

将简支梁划分 50 个网格, 共 51 个节点, 按照第 2 节所述方法建模, 利用 Newmark 法编写 C++ 程序求解, 得到简直梁跨中位置处的无量纲挠度响

应曲线如图2所示。

图2中比较了通过移动力模型(Moving Force)、移动质量模型(Moving Mass)和移动振动质量系统模型(Moving Oscillator)得到的简支梁跨中挠度响应曲线,可以看出移动质量模型和移动振动质量系统模型的结果比较接近,但是移动力模型与这两种模型相比,相差较大,其相对误差是16%,这主要是因为移动力模型没有考虑移动载荷的惯性对梁动态响应的影响。

算例2:使用与算例1相同的简支梁和移动振动质量系统,只改变移动质量的运动状态,按照图3中(b)和(c)所示的匀加速和匀减速运动状态,移动载荷的最大速度为 $V_{max} = 10m/s$ 。

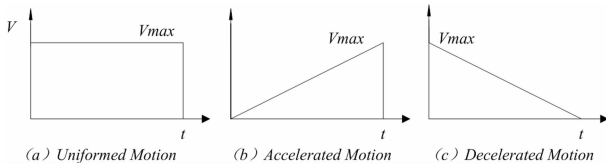


图3 移动载荷的运动规律

Fig. 3 The moving condition of the moving loads

简支梁跨中位置处挠度、弯矩和剪力的响应曲线,如图4-6所示,表1比较了在移动载荷不同运动情况下,挠度、弯矩和剪力的动载系数.这里的动载系数是动态响应的最大值与相同质量的载荷静止作用在简支梁跨中位置时梁上最大静态响应的比值。

移动载荷在加速和减速运动情况下,梁的动态响应与匀速运动的情况存在明显的差别,加速运动的移动载荷作用下,梁的响应曲线沿时间轴向后偏移,而减速运动的情况下,响应曲线沿时间轴向前偏移,另外,通过表1对结果的比较,在移动载荷各种运动情况下,挠度动载系数最大,弯矩动载系数次之,剪力动载系数最小,同时在移动载荷匀速运动的情况下挠度、弯矩和剪力的动载系数较大。

表1 简支梁跨中位置的挠度动载系数、弯矩动载系数和剪力动载系数比较

Table 1 Dynamic coefficients of deflection, bending moment and shearing force under different moving conditions

	Dynamic coefficient of deflection	Dynamic coefficient of bending moment	Dynamic coefficient of shearing force
Uniformed Motion	1.92	1.79	1.47
Accelerated Motion	1.66	1.54	1.12
Decelerated Motion	1.78	1.61	1.14

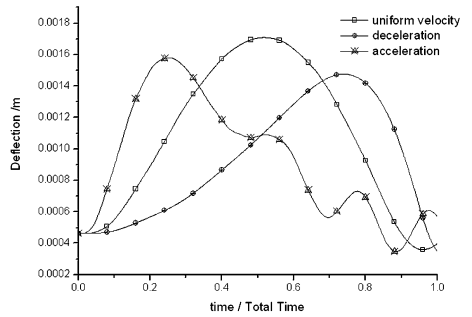


图4 简支梁跨中位置处的挠度响应曲线

Fig. 4 Deflection at the mid-span position of the beam under uniform velocity moving load

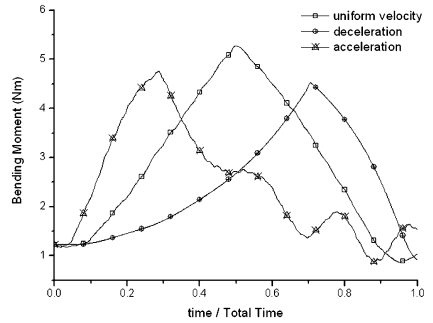


图5 简支梁跨中位置处的弯矩响应曲线

Fig. 5 Bending moment at the mid-span position of the beam under uniform velocity moving load

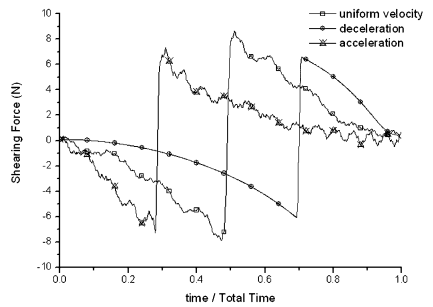


图6 简支梁跨中位置处的剪力响应曲线

Fig. 6 Shearing force at the mid-span position of the beam under uniform velocity moving load

4 结论

为了分析移动载荷作用下梁的动态响应问题,建立了移动振动质量系统作用下梁的动力学模型,结合有限元法推导出了含有附加矩阵、附加向量的时变动力学方程,并整理得到便于数值求解的二阶微分方程组,经过算例计算,验证了这一方法与现有模型的一致性.讨论了梁的应力动态响应问题,在算例中比较了移动载荷不同运动情况下挠度、弯矩和剪力的动载系数,挠度动载系数相对较大,移

动载荷匀速运动的情况下动载系数也相对较大。

参 考 文 献

- Hilal M A. Vibration analysis of beams with general boundary conditions traversed by a moving force. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 229(2) : 377 ~ 388
- Fryba L. Vibration of solids and structures under moving loads (3rd Edition). London: Thomas Telford, 1999
- Guo Y Q, Chen W Q, Pao Y H. Dynamic analysis of space frames: The method of reverberation-ray matrix and the orthogonality of normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 317: 716 ~ 738
- Wu J J, Whittaker A R, Cartmell M P. Dynamic responses of structures to moving bodies using combined finite element and analytical methods. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001, 43: 2555 ~ 2579
- Rieker J R, Trethewey M W. Finite Element analysis of an elastic beam structure subjected to a moving distributed mass train. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1999, 13(1) : 31 ~ 51
- 汪小超,蒲军平. 变截面桥梁在变速移动荷载作用下的动力响应. 科技通报, 2009, 25(2) : 147 ~ 152 (Wang X C, Pu J P. Dynamic responses analysis for non-uniformed beams subjected to moving load with non-uniform velocity. *Bulletin of Science and Technology*, 2009, 25(2) : 147 ~ 152 (in Chinese))
- 彭献,游福贺,高伟钊,金一鸣,刘子建. 移动质量与梁耦合系统固有频率的计算与分析. 动力学与控制学报, 2009, 7(3) : 270 ~ 274 (Peng X, You F H, Gao W Z, Jin Y M, Liu Z J. Calculation and analysis on natural frequency of a moving mass and beam's coupled system. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(3) : 270 ~ 274 (in Chinese))
- 盛国刚,赵冰. 多个移动质量-弹簧-阻尼系统作用下梁的动力特性分析. 振动与冲击. 2003, 22(1), 43 ~ 46 (Sheng G G, Zhao B. Dynamic characteristics of elastic beam under a series of moving oscillating loads. *Journal of Vibration and Shock*, 2003, 22(1) : 43 ~ 46 (in Chinese))
- Stancioiu D, Ouyang H, Mottershead J E. Vibration of a beam excited by a moving oscillator considering separation and reattachment. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 310: 1128 ~ 1140

DYNAMIC RESPONSES OF BEAM SUBJECTED TO A MOVING OSCILLATOR WITH NON-UNIFORM VELOCITY*

Chen Qiang Yang Guolai Wang Xiaofeng Ge Jianli
(School of Mechanical Engineering, NUST, Nanjing 210094, China)

Abstract Based on the model of beams subjected to a moving oscillator, the time-verifying coupling dynamic functions with appended matrixes and vectors were deducted, which were then transferred to a system of second-order differential equations for numerical solving. The method had been proved to be equivalent to the present methods by comparing with the results of the moving force model and the moving mass model. Meanwhile, the dynamic coefficients of deflection, bending moment and shearing force on the beam were analyzed.

Key words moving mass, beam, non-uniform velocity, dynamic coefficient