

# 一个五维受控混沌系统的动力学行为

韩峰 唐驾时

(湖南大学机械与运载工程学院,长沙 410082)

**摘要** 用状态反馈的方法对 Lü 系统的混沌运动进行控制,在 Lü 系统中增加两个新的状态变量,获得了一个五维的受控混沌系统,该系统有复杂的动力学行为. 计算了系统的 Lyapunov 指数、功率谱和相轨迹. 数值模拟表明:通过改变控制参数,可以将系统的周期运动改变为混沌运动、混沌运动改变为周期运动.

**关键词** 五维混沌系统, Lü 吸引子, 控制, 混沌运动, 周期运动

## 引言

在 Lorenz 系统族中, Lorenz 系统和 Chen 系统都是三维、有两个二次非线性项、自治的连续系统,它们有类似的结构但不拓扑等价. Lü 系统是从 Lorenz 系统到 Chen 系统的过渡<sup>[1,2]</sup>. 在研究 Lü 系统的控制过程中, Chen<sup>[3]</sup> 等人用状态反馈方法,在 Lü 系统中增加一个新的状态变量,获得了一个超混沌系统. 文献[4]对两个恒同的超混沌 Lü 系统,在全局范围内分别给出了它们在线性耦合和非线性耦合情形下实现同步的充分条件,并给出了理论上的证明. 超混沌系统、混沌控制与同步的研究<sup>[5-8]</sup>已成为非线性动力学<sup>[9,13]</sup>的一个重要的领域. 基于 Lü 吸引子,本文用状态反馈的方法对 Lü 系统的混沌运动进行控制,在 Lü 系统中增加两个新的状态变量,获得了一个五维的受控混沌系统. 通过改变控制参数,可以计算出系统的 Lyapunov 指数,用数值模拟的方法将系统的周期运动改变为混沌运动、混沌运动改变为周期运动.

## 1 一个基于吕吸引子的五维控制系统

Lü 系统<sup>[1,2]</sup>可以用下面的三维自治微分方程表示

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = -xz + cy \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x, y, z$  为状态变量,  $a, b, c$  是正的实数. 当  $a = 36, b = 3$  和  $c = 20$  时, Lü 系统有一个典型的混沌吸

引子. 用状态反馈方法,在 Lü 系统中增加一个新的状态变量,可获得一个超混沌系统<sup>[3]</sup>. 基于这个思想,我们对 Lü 系统进行控制,即在 Lü 系统增加两个状态控制器,这样得到了一个五维混沌控制系统如下

$$\begin{cases} \dot{x} = -36x + 36y + u \\ \dot{y} = -xz + 20y + v \\ \dot{z} = xy - 3z \\ \dot{u} = -xy + k_1u \\ \dot{v} = -yz + k_2v \end{cases} \quad (2)$$

其中  $u, v$  表示增加的状态变量,  $k_1, k_2$  是控制增益. 系统(2)也可以视为一个独立的五维混沌系统,其非线性均为二次. 五维混沌系统尚不多见,它同样有复杂的动力学行为.

## 2 五维受控系统的混沌运动

五维控制系统(2)有复杂的动力学行为,通过改变控制参数,系统可由作混沌运动改变为周期运动.

令  $k_1 = -1$ , 当  $k_2 = -2$  时,计算得到系统(2)的 Lyapunov 指数为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1.27695, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -0.98416, \\ \lambda_4 &= -2.59686, \lambda_5 = -19.69738 \end{aligned}$$

系统(2)有一个正的 Lyapunov 指数,这个五维系统是一个混沌系统.

系统有三个平衡点

$$O(0, 0, 0, 0, 0),$$

$$P_1(6.1192, 7.3723, 15.0373, -45.1120, -$$

55. 4296)

$P_2(-6.4920, -5.5002, 11.9024, -35.7072, 32.7325)$

很明显,平衡点  $P_1$  和  $P_2$  不关于任何一个坐标轴对称.

系统(2)的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -36 & 36 & 0 & 1 & 0 \\ -z & 20 & -x & 0 & 1 \\ y & x & -3 & 0 & 0 \\ -y & -x & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & -z & -y & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

为求得系统的特征值,令

$$|\lambda I - J| = 0 \quad (4)$$

对应平衡点  $O$  的特征值是  $-36, -3, -2, -1, 20$ , 最后一个特征值是正数,因此,平衡点  $O$  是一个不稳定的鞍点. 对应平衡点  $P_1$  的特征值是  $-25.7581, -3.1713, -0.9590, 3.9442 + 9.9489i, 3.9442 - 9.9489i$ , 后两个复特征值有正的实部,平衡点  $P_1$  是一个不稳定的平衡点. 对应平衡点  $P_2$  的特征值是  $-28.7618, -2.8828, -1.0446, 5.3446 + 8.3018i, 5.3446 - 8.3018i$ , 后两个复特征值有正的实部,平衡点  $P_2$  也是一个不稳定的平衡点.

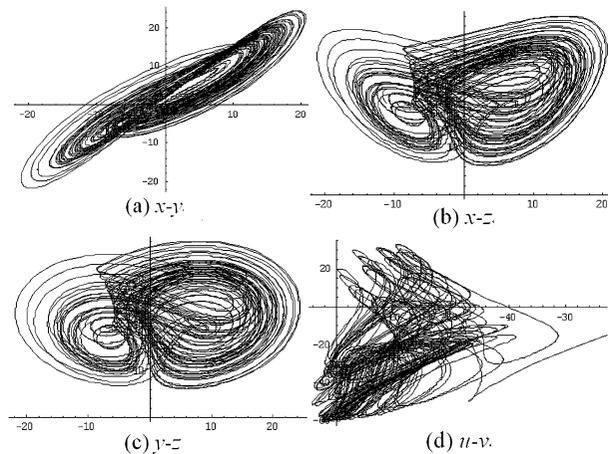


图1 (a)  $x-y$ , (b)  $x-z$ , (c)  $y-z$ , (d)  $u-v$  相图表示的奇怪吸引子

Fig.1 Strange attractors in (a)  $x-y$ , (b)  $x-z$ , (c)  $y-z$ , (d)  $u-v$  phase planes

由参数  $k_2$  控制的系统(2)的相轨迹图如图1所示,它的功率谱图如图2所示. 很明显,这个非线性系统作混沌运动,有一个奇怪吸引子.

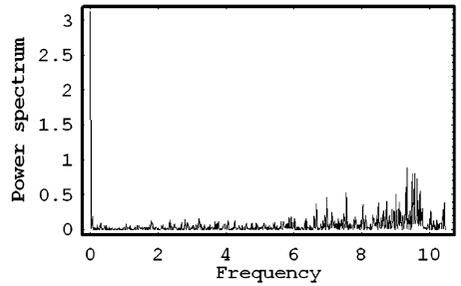


图2 当  $k_2 = -2$  时的功率谱

Fig.2 Power spectrum  $k_2 = -2$

### 3 五维受控系统的周期运动

仍令  $k_1 = -1$ , 当  $k_2 = -4$  时, 计算得到系统(2)的 Lyapunov 指数为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.4750, \lambda_3 = -0.48545, \lambda_4 = -3.53454, \lambda_5 = -19.50761$$

系统(2)没有正的 Lyapunov 指数, 这个五维系统不是一个混沌系统.

系统(2)在  $x-y, x-z, y-z$  平面的相轨线如图3所示, 时间历程波形如图4所示, 功率谱如图5所示. 随着控制参数  $k_2$  的改变, 系统从混沌运动变为周期运动.

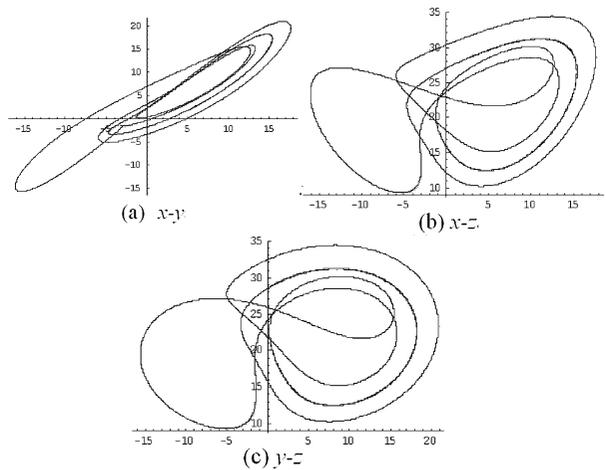


图3 当  $k_2 = -4$  时, (a)  $x-y$ , (b)  $x-z$ , (c)  $y-z$ , (d)  $u-v$  周期相轨线

Fig.3 When  $k_2 = -4$  periodic orbits in (a)  $x-y$ , (b)  $x-z$ , (c)  $y-z$  phase planes

随着控制参数  $k_2$  的改变, 系统的动力学行为也发生变化. 当  $k_2 = -5$  时, 系统(2)的 Lyapunov 指数为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.81097, \lambda_3 = -2.37196, \lambda_4 = -4.25616, \lambda_5 = -17.56109$$

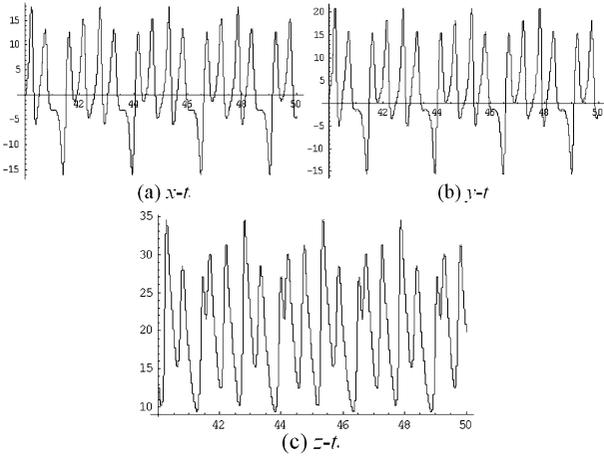


图4 (a)  $x(t)$ , (b)  $y(t)$ , (c)  $z(t)$  时间历程图  
 Fig.4 Waveform (a)  $x(t)$ , (b)  $y(t)$ , (c)  $z(t)$

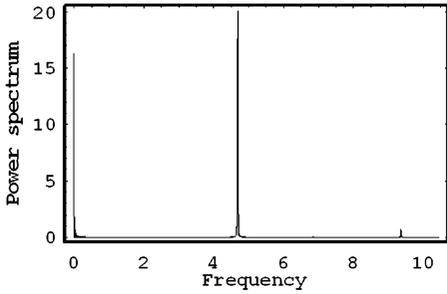


图5 当  $k_2 = -4$  时的功率谱  
 Fig.5 Power spectrum  $k_2 = -4$

系统(2)的运动仍然为周期运动,其在  $x-y, x-z, y-z$  平面的相轨线如图6所示.

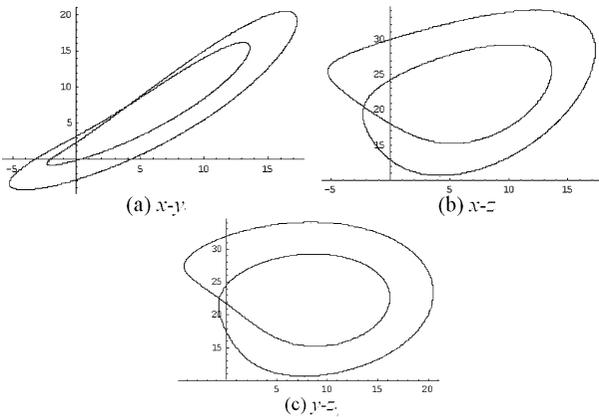


图6 当  $k_2 = -5$  时, (a)  $x-y$ , (b)  $x-z$ , (c)  $y-z$ , (d)  $u-v$  周期相轨线

Fig.6 When  $k_2 = -5$  periodic orbits in (a)  $x-y$ , (b)  $x-z$ , (c)  $y-z$  phase planes

当  $k_2 = -0.5$  时,系统(2)的 Lyapunov 指数为  
 $\lambda_1 = -0.00097, \lambda_2 = -26215,$   
 $\lambda_3 = -0.26247, \lambda_4 = -0.96929,$   
 $\lambda_5 = -19.00482$

系统(2)的运动变为周期1运动,其在  $x-y, x-z, y-z$  平面的相轨线如图7所示.

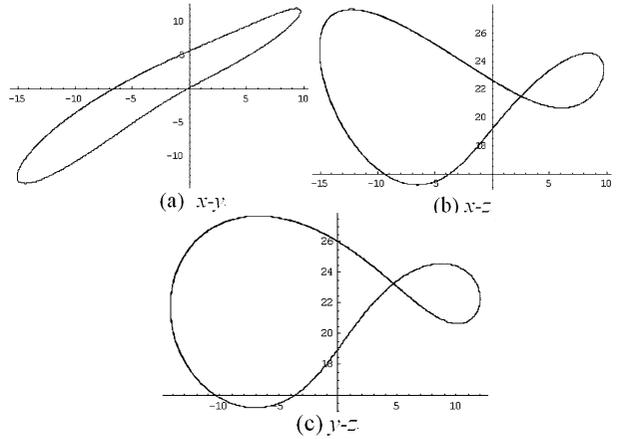


图7 当  $k_2 = -0.5$  时, (a)  $x-y$ , (b)  $x-z$ , (c)  $y-z$ , (d)  $u-v$  周期相轨线

Fig.7 When  $k_2 = -0.5$  periodic orbits in (a)  $x-y$ , (b)  $x-z$ , (c)  $y-z$  phase planes

数值模拟很清楚地表明,随着控制参数  $k_2$  的改变,系统(2)从周期运动变为混沌运动,从混沌运动变为周期运动.通过精确计算可以找到系统作周期运动和混沌运动的控制参数  $k_2$  的范围.

### 4 结论

基于 Lü 吸引子构造了一个五维混沌系统,在增加的两个新的状态变量方程中,固定一个方程的控制参数不变,通过改变另一个方程的控制参数,系统的运动由周期运动变为混沌运动,再从混沌运动变为周期运动.控制参数另外选择也能达到同样的效果.

### 参 考 文 献

- 1 Lü J H, Chen G R. A new chaotic attractor coined. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(3): 659 ~ 661
- 2 陈关荣,吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步. 北京:科学出版社,2003 (Chen G R, Lu J H. Dynamics of Lorenz system family: analysis, control and synchronization. Beijing: Science Pub., 2003 (in Chinese))
- 3 Chen A M, Lu J A, Lü J H, Yu S M. Generating hyperchaotic Lü attractor via state feedback control. *Physica A*, 2006, 364:103 ~ 110
- 4 贾贞,邓光明. 超混沌 Lü 系统的线性与非线性耦合同

- 步. 动力学与控制学报, 2007, 5(3): 220 ~ 223 (Jia Z, Deng G M. Linearly and nonlinearly coupled synchronization of hyperchaotic Lü systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(3): 220 ~ 223 (in Chinese))
- 5 王兴元, 王明军. 超混沌 Lorenz 系统. 物理学报, 2007, 56:5136 ~ 5141 (Wang X Y, Wang M J. Hyperchaotic Lorenz system. *Acta Phys Sin*, 2007, 56:5136 ~ 5141 (in Chinese))
- 6 朱红兰, 张学兵. 一个新的复混沌系统的动力学特性及其同步. 动力学与控制学报, 2008, 6(4):307 ~ 311 (Zhu H L, Zhang X B. Dynamical analysis of a new complex chaotic system and its synchronization. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(4):307 ~ 311 (in Chinese))
- 7 Liang C X, Tang J S. Equilibrium points and bifurcation control of a chaotic system. *Chinese Physics*, 2008, 17(1):135 ~ 139
- 8 Liang C X, Tang J S, Liu S H, Han F. Hopf Bifurcation Control of a Hyperchaotic Circuit System. *Communications in Theoretical Physics*, 2009, 52(3):457 ~ 462
- 9 Tang J S, Zhao M H, Han F, Fu W B. Saddle-node bifurcation and its control of Burgers-KdV equation. *Modern Physics Letters B*, 2010, 24(6):567 ~ 574
- 10 Tang J S, Han F, Xiao H, Wu X. Amplitude control of a limit cycle in a coupled van der Pol system. *Nonlinear Analysis*, 2009, 71(7-8):2491 ~ 2496
- 11 Huang Q W, Tang J S. Bifurcation of a limit cycle in the ac-driven complex Ginzburg Landau equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, 2010, 14(1):129 ~ 141
- 12 Liu S H, Tang J S. Algorithm for amplitude control of limit cycles emerging from Hopf bifurcations in 3D systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2009, 19(1):171 ~ 186
- 13 Qian C Z, Tang J S. A time delay control for a nonlinear dynamic beam under moving load. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 309(1-2):1 ~ 8

## DYNAMICAL BEHAVIORS OF A FIVE -DIMENSIONAL CONTROLLED CHAOTIC SYSTEM

Han Feng Tang Jiashi

(College of Mechanical and Vehicle Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract** By using the state feedback control on Lü attractor, a five-dimensional controlled chaotic system is discovered by adding two new state feedback controllers. This new system exhibits sufficient and complex dynamical behaviors. Some dynamics characteristics are explored in detail by Lyapunov exponents, phase portraits and power spectrum. Numerical simulations show that the system is in chaotic, and periodic state separately as the change in control gain of feedback controller.

**Key words** five-dimensional chaotic system, Lü attractor, control, chaotic motion, periodic motion