

分数阶 Rucklidge 混沌系统的同步研究*

陈保颖^{1,2} 张家军² 苑占江²

(1. 广东工业大学应用数学学院, 广州 510006) (2. 中山大学数学与计算科学学院, 广州 510275)

摘要 主要讨论了分数阶混沌系统的同步问题. 采用线性以及自适应控制两种不同的方案实现了分数阶 Rucklidge 系统的混沌同步. 这两种方案均具有结构简单、易于实现的特点. 而且, 基于分数阶微分方程稳定性理论, 可以保证同步是全局渐近稳定的. 最后, 数值结果证明了两种方案的可行性.

关键词 混沌同步, 分数阶混沌系统, 线性反馈, 自适应控制

引言

分数阶微积分已有 300 多年的发展历史, 最早可以追溯到 Leibniz, Riemann 等的研究^[1,2]. 尽管如此, 由于它在许多科学领域包括物理、信息、工程等有着广泛的应用, 所以分数阶微积分仍然是目前的研究热点. 事实上, 许多物理系统都能展现出分数阶动力学行为, 例如: 黏滞系统、介质极化、电极-电解液极化、(电缆的)管道边界层效应、有色噪声和电磁波等^[3-6]. 而且分数阶在图象与信号处理领域也有应用^[7,8]. 最近, 分数阶混沌系统也引起了人们广泛的兴趣和深入研究. Chua 电路、Rossler 系统、Duffing 系统以及 Sprott 系统^[9-12]中, 计算机仿真表明, 当系统的阶数为分数时, 系统仍呈现混沌状态, 且更能反映系统所呈现的物理现象.

另外, 混沌同步近年来也一直是非线性科学研究的热点^[13]. 在通信领域, Arman Kiani-B 等用简单的混沌掩盖方法证明了分数阶混沌信号能加强通信的安全性. 因此, 分数阶混沌系统的同步在保密通信、信号处理和系统控制及其他领域中都拥有潜在的、诱人的应用前景^[14], 研究分数阶混沌系统具有重要的理论意义和实用价值. 文献[15]首先研究了分数阶混沌系统的同步问题. 文献[16,17]则分别讨论了分数阶统一混沌系统和分数阶 Lü 系统的同步问题. 本文将讨论分数阶 Rucklidge 系统的混沌同步问题. 利用两种不同的方案以实现同步的目的. 第一种方案采用线性反馈控制, 第二个则采用自适应同步方法. 这两种方案都具有易于实现

的特点, 具有较高的应用价值. 而且, 根据文献[18]提出的 J 函数准则, 可以保证同步是全局渐近稳定的.

1 理论分析

分数阶导数的概念有多种定义^[1,19], 这里我们采用 Caputo 微分定义^[20]:

$$D_*^\alpha x(t) = J^{m-\alpha} x^{(m)}(t) \quad (\alpha > 0) \quad (1)$$

其中 m 为第一个不小于 α 的整数, $x^{(m)}$ 为 x 的 m 阶导数, $J^\beta (\beta > 0)$ 为 β 阶 Riemann - Liouville 积分算子

$$J^\beta y(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} y(\tau) d\tau \quad (2)$$

其中 Γ 是 Gamma 函数, 算子 D_*^α 通常被称为“ α 阶 Caputo 微分算子”.

文献[18]提出了基于 Lyapunov 方程的分数阶系统稳定性判定定理:

引理 对于分数阶系统 $\frac{d^\alpha x}{dt} = Ax$, 其中 $x \in R^n$ ($n \in N$), $A \in R^{n \times n}$. 当系统阶数 $\alpha < 1$ 时, 如果存在实对称正定矩阵 P , 使得对任意状态变量 x , 方程 $J = x^T P \frac{d^\alpha x}{dt} \leq 0$ (令形如 $x^T P \frac{d^\alpha x}{dt}$ 的函数为 J 函数) 恒成立, 则系统渐近稳定.

利用该引理判定分数阶系统稳定性构造的 J 函数非常类似于整数阶系统的 Lyapunov 函数, 下面我们将利用该引理设计控制器以实现分数阶 Rucklidge 系统的混沌同步.

1.1 线性反馈实现分数阶 Rucklidge 系统的混沌同步

传统的整数阶 Rucklidge 系统^[21]由以下三阶常微分方程描述:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by - yz \\ \frac{dy}{dt} = x \\ \frac{dz}{dt} = -z + y^2 \end{cases} \quad (3)$$

其中 $a < 0, b > 0$ 为系统参数. 数值计算表明当参数 $a = -2, b = 6.7$ 时, 系统(3)具有混沌吸引子(见图 1(a)). 这里, 我们考虑分数阶 Rucklidge 系统如下:

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1}x}{dt^{q_1}} = ax + by - yz \\ \frac{d^{q_2}y}{dt^{q_2}} = x \\ \frac{d^{q_3}z}{dt^{q_3}} = -z + y^2 \end{cases} \quad (4)$$

其中 $0 < q_1, q_2, q_3 \leq 1$. 根据文献[22]提出的必要条件, 可以得到当参数 $a = -2, b = 6.7$ 以及 $q_1 = 0.985, q_2 = q_3 = 0.98$ 时, 系统(4)是混沌的(见图 1(b)).

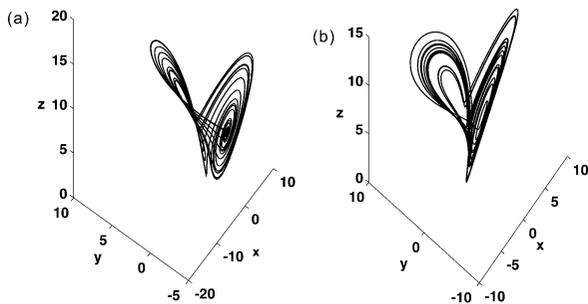


图 1 (a) Rucklidge 混沌吸引子, 其中 $a = -2, b = 6.7$; (b) 分数阶 Rucklidge 混沌吸引子, 其中 $a = -2, b = 6.7, q_1 = 0.985, q_2 = q_3 = 0.98$.

Fig. 1 (a) The Rucklidge chaotic attractor, where $a = -2, b = 6.7$. (b) A typical chaotic attractor in fractional-order Rucklidge system, where $a = -2, b = 6.7$ and $q_1 = 0.985, q_2 = q_3 = 0.98$

下面以(4)做为驱动系统, 响应系统为:

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1}x_1}{dt^{q_1}} = ax_1 + by_1 - y_1z_1 + U_1 \\ \frac{d^{q_2}y_1}{dt^{q_2}} = x_1 + U_2 \\ \frac{d^{q_3}z_1}{dt^{q_3}} = -z_1 + y_1^2 + U_3 \end{cases} \quad (5)$$

我们的目标是选择合适的控制器 U_1, U_2, U_3 以实现系统(4)和(5)的混沌同步. 设误差变量 e_1

$= x_1 - x, e_2 = y_1 - y, e_3 = z_1 - z$, 那么误差系统为:

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1}e_1}{dt^{q_1}} = ae_1 + be_2 - ye_2 + U_1 \\ \frac{d^{q_2}e_2}{dt^{q_2}} = e_1 + U_2 \\ \frac{d^{q_3}e_3}{dt^{q_3}} = -e_1 + (y_1 + y)e_2 + U_3 \end{cases} \quad (6)$$

对于系统(4), (5)以及误差系统(6), 我们有以下结论.

定理 1.1 如果选取以下线性控制器:

$$U_1 = -be_2, U_2 = -ke_2 - e_1, U_3 = 0 \quad (7)$$

其中 k 为足够大的反馈增益, 则误差系统(6)的零解是全局渐近稳定的. 也就是说, 响应系统(4)和驱动系统(5)同步.

证明: 将(7)代入(6)得到:

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1}e_1}{dt^{q_1}} = ae_1 - z_1e_2 \\ \frac{d^{q_2}e_2}{dt^{q_2}} = -ke_2 \\ \frac{d^{q_3}e_3}{dt^{q_3}} = -e_3 + (y_1 + y)e_2 \end{cases} \quad (8)$$

如果令

$$J = re_1 \frac{d^{q_1}e_1}{dt^{q_1}} + e_2 \frac{d^{q_2}e_2}{dt^{q_2}} + e_3 \frac{d^{q_3}e_3}{dt^{q_3}} \quad (9)$$

这里 r 为正常数. 那么由(8)可得:

$$J = rae_1^2 - ke_2^2 - e_3^2 - rze_1e_2 - rye_1e_3 + (y + y_1)e_2e_3 \quad (10)$$

由混沌吸引子的有界性, 假设存在正数 M , 使得 $|y|, |z|, |y_1| \leq M$. 那么

$$\begin{aligned} J &\leq rae_1^2 - ke_2^2 - e_3^2 + \\ &\quad rM|e_1||e_2| + rM|e_1||e_3| + \\ &\quad 2M|e_2||e_3| \end{aligned} \quad (11)$$

记

$$P = \begin{pmatrix} -ra & \frac{rM}{2} & \frac{rM}{2} \\ \frac{rM}{2} & k & M \\ \frac{rM}{2} & M & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

显然, 如果矩阵 P 为正定阵, 系统(6)渐近稳定, 从而系统(4)和(5)同步. 要使 P 正定, 必有下式成立:

$$\begin{cases} -rak > \frac{r^2M^2}{4} \\ -ra(k - M^2) + \frac{r^2M^2}{4}(M - k) - \\ \frac{r^2M^2}{4}(1 - M) > 0 \end{cases} \quad (13)$$

因此,只要 $k > \frac{M^2(-4a+r-2M)}{-4-rM^2}$, 其中 $0 < r < -$

$\frac{4a}{M^2}$, 则 P 为正定阵. 即 $J = rae_1^2 - ke_2^2 - e_3^2 - rze_1e_2 - rye_1e_3 + (y + y_1)e_2e_3 \leq 0$. 根据上述 J 函数准则, 误差系统(6)是渐近稳定的, 从而系统(4)与(5)同步. 证毕.

1.2 自适应控制实现分数阶 Rucklidge 系统的混沌同步

从定理 1.1 的证明我们可以看到, 反馈增益 k 的选取依赖于混沌吸引子的上界. 但是从实际应用来看, 这往往很难准确的界定. 因此, 接下来, 我们提出一种自适应同步方案用来实现 Rucklidge 系统的混沌同步, 这种方法的优点在于不需要事先确定系统的上界.

定理 1.2 如果选取以下自适应控制器:

$$U_1 = -be_2, U_2 = -(k+1)e_2 - e_1, U_3 = 0 \quad (14)$$

其中参数自适应率 $\frac{d^{q_2}k}{dt^{q_2}} = e_2^2$ 那么误差系统(6)的零解全局渐近稳定, 即系统(4)与系统(5)同步.

证明: 将(14)代入(6)可得:

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1}e_1}{dt^{q_1}} = ae_1 - z_1e_2 - ye_3 \\ \frac{d^{q_2}e_2}{dt^{q_2}} = -(k+1)e_2 \\ \frac{d^{q_3}e_3}{dt^{q_3}} = -e_3 + (y_1 + y)e_2 \end{cases} \quad (15)$$

令

$$J = re_1 \frac{d^{q_1}e_1}{dt^{q_1}} + e_2 \frac{d^{q_2}e_2}{dt^{q_2}} + e_3 \frac{d^{q_3}e_3}{dt^{q_3}} + k \frac{d^{q_2}k}{dt^{q_2}} \quad (16)$$

其中 r 为正常数. 由(15)可得:

$$J = rae_1^2 - e_2^2 - e_3^2 - rze_1e_2 - rye_1e_3 + (y + y_1)e_2e_3 \quad (17)$$

同上, 由混沌吸引子的有界性, 假设存在正数 M , 使得 $|y|, |z|, |y_1| \leq M$. 则有

$$J \leq rae_1^2 - e_2^2 - e_3^2 + rM|e_1||e_2| + rM|e_1||e_3| + 2M|e_2||e_3|.$$

这里记 $P = \begin{pmatrix} -ra & \frac{rM}{2} & \frac{rM}{2} \\ \frac{rM}{2} & k & M \\ \frac{rM}{2} & M & 1 \end{pmatrix}$, 从而, 若选取 $0 < r <$

$-\frac{4a}{M^2}$, 则 P 为正定阵, 进而, $J \leq 0$. 同样根据 J 函数准则, 误差系统(6)的零解全局渐近稳定, 即系统(4)与(5)同步. 证毕

2 数值结果

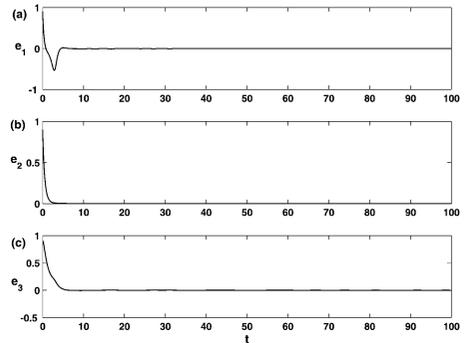


图2 方案(7) (a) $e_1 = x_1 - x$ 误差曲线 (b) $e_2 = y_1 - y$ 误差曲线 (c) $e_3 = z_1 - z$ 误差曲线

Fig. 2 Synchronization of Rucklidge systems with scheme (7):

(a) The error $e_1 = x_1 - x$ vs t ;

(b) The error $e_2 = y_1 - y$ vs t ; (c) The error $e_3 = z_1 - z$ vs t

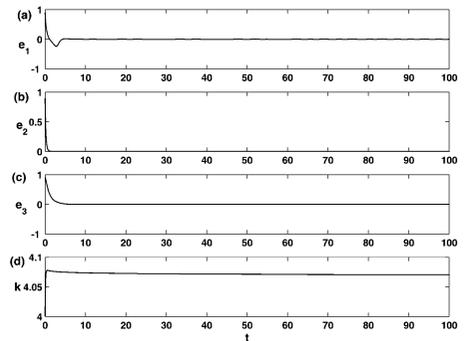


图3 方案(14) (a) $e_1 = x_1 - x$ 误差曲线 (b) $e_2 = y_1 - y$ 误差曲线 (c) $e_3 = z_1 - z$ 误差曲线 (d) 自适应反馈增益 k 的收敛曲线

Fig. 3 Synchronization of Rucklidge systems with scheme (14):

(a) The error $e_1 = x_1 - x$ vs t ; (b) The error $e_2 = y_1 - y$ vs t ;

(c) The error $e_3 = z_1 - z$ vs t . (d) the adaptive feedback gain k vs t

这里我们采用预估-校正算法^[23]进行数值模拟. 对于系统(4)和(5), $q_1 = 0.985, q_2 = q_3 = 0.98$, 系统参数 $a = -2, b = 6.7$. 初始值 $x(0) = y(0) = z$

$(0) = 0.1, x_1(0) = y_1(0) = z_1(0) = 1$. 对于控制器(7), 反馈增益 $k = 10$; 对于自适应同步控制器(14), 反馈增益的初值 $k(0) = 4$. 数值结果如图2-3所示. 显然, 数值结果说明采用这两种方案都可以成功的实现分数阶 Rucklidge 系统的混沌同步.

3 结论

本文讨论了分数阶混沌系统的同步问题. 采用两种不同的同步方案实现了分数阶 Rucklidge 系统的混沌同步. 同步的稳定性主要基于文献[17]中关于非线性分数阶微分方程的稳定性理论. 数值仿真验证了两种方案的可行性与有效性. 这里我们需要指出的是, 从实际应用的角度来看, 第二种方案更加灵活有效. 而且, 这两种同步方法可以很容易地推广到其他类似的分数阶混沌系统, 甚至于高维分数阶混沌系统.

参 考 文 献

- Podlubny I. Fractional Differential Equations. New York: Academic Press, 1999
- Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics. New Jersey: World Scientific, 2001
- Bagley R L, Calico R A. Fractional order state equations for the control of visco-elastically damped structures. *J. Guidance Control Dyn.*, 1991, 14: 304 ~ 311
- Friedrich Ch, Braun H. Linear viscoelastic behavior of complex behavior of complex polymeric materials: a fractional calculus approach. *Acta Polym.*, 1995, 46: 385 ~ 390
- Rossikhin Y A, Shitikova M V. Application of fractional derivatives to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single mass system. *Acta Mech.*, 1997, 120: 109 ~ 125
- Chen G, Friedman G. An RLC interconnect model based on Fourier analysis. *IEEE Trans. Comput. Aided Des. Integr. Circuits Syst.*, 2005, 24: 170 ~ 183
- Mandelbrot B, VanNess J W. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *Siam Rev.*, 1968, 10: 422 ~ 437
- Oustaloup A. La Dérivation Non Entière: Théorie, Synthèse et Applications. Paris: Editions Hermès, 1995
- Hartley T T, Lorenzo C F, Qammer H K. Chaos in a fractional order Chua's system. *IEEE Trans CAS-I*, 1995, 42: 485 ~ 490
- Li C, Chen G. Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rossler equations. *Phys A*, 2004, 341: 55 ~ 61
- Arena P, Caponetto R, Fortuna L, Porto D. Chaos in a fractional order Duffing system. in: Proceedings ECCTD, Budapest. 1997:1259 ~ 1262
- Erjaee G H, Shaher Momani, Phase synchronization in fractional differential chaotic systems. *Phys Lett A*, 2008, 372: 2350 ~ 2354
- 王兴元, 古丽孜拉, 王明军. 单向耦合混沌同步及其在保密通信中的应用. *动力学与控制学报*, 2008, 6(1): 40 ~ 44 (Wang X Y, Gulzila, Wang M J. Chaos synchronization via unidirectional coupling and its application to secure communication. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(1): 40 ~ 44 (in Chinese))
- Matignon D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. Computational Engineering in Systems and Application multi-conference, vol. 2, IMACS, in: IEEE-SMC Proceedings, Lille, France. 1996, 963 ~ 971
- Li C G, Liao X X, Yu J B. Synchronization of fractional order chaotic systems. *Phys Rev E*, 2003, 68: 067203
- Wang J W, Zhang Y B. Designing synchronization schemes for chaotic fractional-order unified systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 30: 1265 ~ 1272
- Deng W, Li C P. Chaos synchronization of the fractional Lü system. *Phys A*, 2005, 353: 61 ~ 72
- 胡建兵, 韩焱, 赵灵冬. 一种新的分数阶系统稳定理论及在不 back-stepping 方法同步分数阶混沌系统中的应用. *物理学报*, 2009, 58: 2235 ~ 2240 (Hu J B, Han Y, Zhao L D. A novel stability theorem for fractional systems and its applying in synchronizing fractional chaotic system based on back-stepping approach. *Acta Phys Sin.*, 2009, 58: 2235 ~ 2240 (in Chinese))
- Butzer P L, Westphal U. An introduction to fractional calculus. Singapore: World Scientific, 2000
- Caputo M. Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent-II. *Geophys J R Astronom Soc.*, 1967, 13: 529
- Rucklidge A M. Chaos in models of double convection. *J Fluid Mech.*, 1992, 237: 209 ~ 229
- Mohammad S T, Mohammad H. Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems. *Phy D*, 2008, 237: 2628 ~ 2637

- 23 Diethelm K, Ford N J, Freed A D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dyn.*, 2002, 29: 3 ~ 22

SYNCHRONIZATION OF CHAOTIC FRACTIONAL-ORDER RUCKLIDGE SYSTEMS*

Chen Baoying^{1,2} Zhang Jiajun² Yuan Zhanjiang²

(1. Department of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510275, China)

(2. Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract The synchronization problem of fractional-order chaotic systems was studied. Three different kinds of schemes based on nonlinear feedback control, linear feedback control and adaptive control were proposed to synchronize chaotic fractional-order Rucklidge systems. Moreover, the globally asymptotic stability for such synchronization was derived by utilizing the stability theory of the fractional-order differential equations. Finally, Numerical simulations were presented to verify the effectiveness of such schemes.

Key words chaos synchronization, fractal-order chaotic system, linear feedback control, adaptive control