

# 基于 T-S 模糊模型的混沌系统脉冲控制

缪志强 王耀南

(湖南大学电气与信息工程学院,长沙 410082)

**摘要** 给出了一种基于 T-S 模糊模型的混沌系统模糊脉冲控制方法. 首先给出了基于 T-S 模糊模型对非线性系统精确建模的原理,得到与混沌系统等价的 T-S 模糊系统. 然后根据建模得到的 T-S 模糊系统,采用模糊脉冲控制技术来实现控制. 最后,以控制 Ndolschi 混沌系统为例,证明了这种方法的有效性.

**关键词** 模糊控制, 混沌控制, T-S 模型, 脉冲控制

## 引言

近二十年来,混沌因其巨大的应用前景激起了许多工程技术专家的极大兴趣. 由于混沌运动具有初值敏感性和长时间发展趋势的不可预测性,混沌控制就成为混沌应用的关键环节. 自 1990 年 Ott 等人发表第一篇混沌控制的开创性文章以来,混沌控制研究发展迅速,许多控制方法包括各种智能控制方法被应用到混沌控制中. 在这些智能方法中,模糊控制的方法取得了较大的成功,形成了较为完整的设计方法<sup>[1-5]</sup>. 在这些模糊控制方法中,一种是基于 Mamdani 模型<sup>[1,2]</sup>,还有一种是基于 T-S 模型<sup>[3-5]</sup>. 对于基于 Mamdani 模型的设计方法,其在工业应用中取得了巨大的成功,然而还有许多基础的理论性问题有待深入研究. 在这些基础性的问题中,控制系统的稳定性分析是至关重要的. 随后发展起来的基于 T-S 模型的方法,给模糊系统的稳定性分析提供了新的思路. 本文将采取基于 T-S 模糊模型的方法来实现对混沌系统的控制.

在本文中,首先用 T-S 模糊模型对系统的非线性部分建模,获得混沌系统的模糊模型. 与传统方法中采用 PDC(并行分布补偿)方案不同的是,本文将采用脉冲控制技术<sup>[6-9]</sup>来实现控制. 这使得控制方案更容易在数字电路中实现. 最后,我们以控制 Ndolschi 混沌系统为例,证明了这种方法的有效性.

## 1 问题描述

对于混沌非线性系统:

$$\dot{x} = Ax(t) + f(x(t)) \quad (1)$$

其中  $x(t) \in R^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 非线性部分  $f(x)$  为已知的连续非线性函数向量,  $f(0) = 0$ . 由  $f(0) = 0$  可知,原点为系统的平衡点,则控制目标为通过设计控制器,使得系统在原点处的平衡点渐近稳定.

为后面的分析方便起见,进一步地假设  $f(x(t))$  满足以下两个条件:

条件 a: 状态变量  $x(t)$  有界.

$$f(x(t)) = f(Z(t), x(t)) = Z(x(t))x(t), \text{ 即 } \dot{x} = Ax(t) + Z(t)x(t). \quad (2)$$

基于以上假设,定义  $n^2$  个  $n \times n$  阶常矩阵  $E(ij)$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ),  $E(ij)$  中除第  $i$  行  $j$  列个元素为 1 外,其余都为 0,则:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z_{11}(t) & \cdots & z_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1}(t) & \cdots & z_{nn}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_{ij}(t) E(ij) = \sum_{\rho=1}^{n^2} z_{\rho}(t) E(\rho) \quad (3)$$

其中:  $\rho = n(i-1) + j (1 \leq \rho \leq n^2)$ ,  $Z(t) = Z(x(t))$  可以看作  $n^2$  个关于  $x(t)$  的非线性函数  $z_{\rho}(x(t))$  与  $n^2$  个常数矩阵  $E(\rho)$  分别相乘后求和的结果.

在  $z_{\rho}(t)$  中可能存在恒为零的项和呈比例的

项. 对于这两种情况分别作如下处理: 对于恒为零的项: 若  $z_a(t) = 0$ , 去  $\sum_{\rho=1}^{n^2} z_\rho(t) E(\rho)$  掉中包含  $z_a(t)$  为零的项.

对于呈比例的项: 合并呈比例的项. 即: 若  $z_c = kz_b(t)$ , 则

$$z_b(t)E(b) + z_c(t)E(c) = z_b(t)(E(b) + kE(c))$$

设对  $z_\rho(t)$  做如上处理后, 还剩  $m$  项, 对  $z_\rho(t)$  重新按自然顺序进行标号. 此时  $Z(t) = Z(x(t))$  仍可以看作  $m$  个关于  $x(t)$  的非线性函数  $z_r(x(t))$  ( $1 \leq r \leq m$ ) 与  $m$  个常数矩阵  $L_r$  分别相乘后求和的结果, 即:

$$Z(t) = \sum_{r=1}^m z_r(x(t))L_r \tag{4}$$

此时混沌非线性系统为:

$$\dot{x}(t) = (A + \sum_{r=1}^m z_r(x(t))L_r)x(t) \tag{5}$$

下面以一些常见的混沌系统为例, 来验证以上假设的合理性, 并演示以上对  $f(x)$  的处理过程.

Chua 混沌电路系统: ( $a, b, \alpha, \beta$  为常数)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} f(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} z_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) = Ax(t) + z_1(t)E(1)x(t)$$

其中:  $z_1(t) = z_1(x(t)) = \begin{cases} f(x_1)/x_1, & x \neq 0 \\ f'(0) = a, & x = 0 \end{cases}$

$$f(x) = bx + (a - b)/2[|x + 1| - |x - 1|].$$

Nadolschi 混沌系统: ( $a, b, c$  为常数)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -x_2x_3 \\ x_1x_3 \\ x_1x_2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -z_2(t) \\ 0 & 0 & z_1(t) \\ 0 & z_1(t)/3 & 0 \end{bmatrix} x(t) = Ax(t) + (z_1(t)E(6) + z_2(t)(-E(3) + E(8)/3))x(t)$$

其中:

$$z_1(t) = z_1(x(t)) = x_1(t),$$

$$z_2(t) = z_2(x(t)) = x_2(t).$$

## 2 T-S 模型对非线性部分精确建模原理

由于  $\dot{x} = Ax(t) + f(x(t)) = Ax(t) + f(Z(t), x(t))$ , 要使得系统可以用线性的 T-S 模糊模型描述, 只需对非线性部分  $f(x(t))$  精确线性建模即可.

考虑由以下线性 T-S 模糊规则描述的系统:

$R_i: IF z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_m(t) \text{ is } M_{im},$   
 THEN  $y = k^i x(t)$

其中:  $m$  为模糊变量的个数,  $p$  为模糊规则的个数,  $1 \leq i \leq p$ .

上述系统解模糊化后的最终输出为:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^p w_i(z(t))y^i(z(t))}{\sum_{i=1}^p w_i(z(t))} = \sum_{i=1}^p h_i(z(t))k^i x(t) \tag{6}$$

其中:

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^m M_{ij}(z_j(t)),$$

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^p w_i(z(t))} \tag{7}$$

$$w_i(z(t)) \geq 0, \sum_{i=1}^p h_i(z(t)) = 1 \tag{8}$$

$M_{ij}(z_j(t))$  为隶属函数,  $w_i(z(t))$  称为规则的适配度,  $h_i(z(t))$  称为输出加权系数.

要使得非线性部  $f(x(t))$  可以用 T-S 模糊系统描述, 必须对非线性部  $f(x(t))$  进行变换, 使得  $f(x(t))$  具有式 (6) 的形式, 且对应的参数满足式 (7) 和 (8).

首先我们将提出一个引理, 这个引理在下面工作中起着重要作用.

**引理**  $z(x)$  为关于  $x$  的连续函数, 且当  $x$  有界时,  $\min_x z(x) = k^1, \max_x z(x) = k^2$ , 那么  $z(x)$  总可以表示为具有以下形式的表达式:

$$z(x) = \sum_{i=1}^2 M^i(z)k^i = M^1(z)k^1 + M^2(z)k^2 \tag{9}$$

其中:  $M^1(z) > 0, M^2(z) > 0, M^1(z) + M^2(z) = 1$ .

$$M^1(z) = \frac{k^2 - z(x)}{k^2 - k^1}, M^2(z) = \frac{z(x) - k^1}{k^2 - k^1} \tag{10}$$

根据这个引理, 我们对  $f(x(t))$  进行变换:

$$f(x(t)) = f(Z(t)),$$

$$x(t) = Z(x(t))x(t) = \sum_{r=1}^m z_r(x(t))L_r x(t)$$

$x(t)$  有界时, 设  $\min_x z_r(x(t)) = k_r^1, \max_x z_r(x(t)) = k_r^2$  ( $1 \leq r \leq m$ ), 对每一个  $z_r(x(t))$  调用引理 1, 有:

$$f(x(t)) = \sum_{r=1}^m (\sum_{s=1}^2 M_r^s(z_r) k_r^s) L_r x(t) \quad (11)$$

其中:

$$\sum_{s=1}^2 M_r^s = 1,$$

$$\text{即: } M_r^1(z_r) + M_r^2(z_r) = 1, (1 \leq r \leq m).$$

令:  $\varphi_r(z) = \frac{\prod_{r=1}^m (\sum_{s=1}^2 M_r^s(z_r))}{\sum_{s=1}^2 M_r^s}$ , 显然  $\varphi_r(z) = 1, (1 \leq r \leq m)$ , 则:

$$\begin{aligned} f(x(t)) &= \sum_{r=1}^m (\sum_{s=1}^2 M_r^s(z_r) k_r^s) L_r x(t) \times \\ \varphi_r(z) &= \sum_{r=1}^m (\sum_{s=1}^2 M_r^s(z_r) \varphi_r(z) k_r^s) \times \\ L_r x(t) &= \sum_{r=1}^m (\sum_{s=1}^2 M_r^s(z_r) \times \\ \frac{\prod_{r=1}^m (\sum_{s=1}^2 M_r^s(z_r))}{\sum_{s=1}^2 M_r^s} k_r^s) L_r x(t) &= \times \\ \sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \cdots \sum_{s_m=1}^2 (\prod_{r=1}^m M_r^{s_r}(z_r)) \times \\ (\sum_{r=1}^m k_r^s) L_r x(t) \end{aligned}$$

不难验证:  $\sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \cdots \sum_{s_m=1}^2 (\prod_{r=1}^m M_r^{s_r}(z_r)) = 1$ , 所以:

$$\begin{aligned} f(x(t)) &= \\ \frac{\sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \cdots \sum_{s_m=1}^2 (\prod_{r=1}^m M_r^{s_r}(z_r)) (\sum_{r=1}^m k_r^{s_r}) L_r x(t)}{\sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \cdots \sum_{s_m=1}^2 (\prod_{r=1}^m M_r^{s_r}(z_r))} &= \\ \sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \cdots \sum_{s_m=1}^2 h_{s_1, s_2, \dots, s_m}(z) (\sum_{r=1}^m M_r^{s_r}) L_r x(t) \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} h_{s_1, s_2, \dots, s_m}(z) &= \\ \frac{\prod_{r=1}^m (\sum_{r=1}^m M_r^{s_r})}{\sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \cdots \sum_{s_m=1}^2 (\prod_{r=1}^m M_r^{s_r}(z_r))} \end{aligned}$$

( $s_r = 1$  或  $2, 1 \leq r \leq m$ ).

根据以上分析,有以下定理:

**定理 1**  $f(x(t))$  可由以下规则描述:

$$\begin{aligned} R_{s_1, s_2, \dots, s_m}: \text{IF } z_1 \text{ is } M_1^{s_1} \text{ and } \cdots \text{ and } z_m \text{ is } M_m^{s_m} \\ \text{THEN } g(x) = \sum_{r=1}^m k_r^s L_r x(t) \quad (s_r = 1 \text{ 或 } 2, 1 \leq r \leq m) \end{aligned}$$

由  $s_r = 1$  或  $2, 1 \leq r \leq m$  可知,此系统的规则个数为  $2^m$ .

由于以上系统的规则个数随模糊变量的个数呈指数增长,使得模糊系统过于复杂.下面将分析如何用更简单、个数更少的模糊规则描述原系统.

根据式(11):  $f(x(t)) = \sum_{r=1}^m (\sum_{s=1}^2 M_r^s(z_r) k_r^s) L_r x(t)$

由于:  $\sum_{s=1}^2 M_r^s = 1, (1 \leq r \leq m)$ , 所以  $\sum_{r=1}^m (\sum_{s=1}^2 M_r^s(z_r)) = m$ , 则:

$$\begin{aligned} f(x(t)) &= \frac{\sum_{r=1}^m (\sum_{s=1}^2 M_r^s(z_r) k_r^s) L_r x(t)}{\sum_{r=1}^m (\sum_{s=1}^2 M_r^s(z_r))} m \\ f(x(t)) &= \frac{\sum_{r=1}^m (\sum_{s=1}^2 M_r^s(z_r) m k_r^s) L_r x(t)}{\sum_{r=1}^m (\sum_{s=1}^2 M_r^s(z_r))} = \end{aligned}$$

$$\sum_{r=1}^m (\sum_{s=1}^2 h_r^s(z_r) m k_r^s) L_r x(t)$$

其中:

$$\begin{aligned} h_r^s(z_r) &= \frac{M_r^s(z_r)}{\sum_{i=1}^n (\sum_{s=1}^2 M_r^s(z_r))}, \\ (s_r = 1 \text{ 或 } 2, 1 \leq r \leq m). \end{aligned}$$

根据以上分析,有以下定理:

**定理 2**  $g(x)$  可由以下规则描述:

$$\begin{aligned} R_r^s: \text{IF } z_r \text{ is } M_r^s(z_r), \text{ THEN } g(x) = m k_r^s L_r x(t), \\ (s_r = 1 \text{ 或 } 2, 1 \leq r \leq m) \end{aligned}$$

由  $s = 1$  或  $2, 1 \leq r \leq m$  可知,此系统的规则个数为  $2m$ . 实现了规则的简化.

比较定理 1 和定理 2, 当  $m \leq 2$  时,虽然两种方法的模糊规则个数相同,但定理 1 中每个规则都包含  $m$  个变量,而定理 2 中每个规则都只包含一个变量,相较之下定理 2 中建立的规则较简单. 所以,后面将采用定理 2 中的模糊规则来对系统进行建模.

### 3 控制器的设计

加入控制信号  $u(t)$  后,混沌系统为:  $\dot{x}(y) = Ax(t) + f(x(t)) + Bu(t)$ ; 控制目标为通过设计控制器  $u(t)$ , 使得系统在原点处的平衡点渐近稳定. 与传统方法中采用 PDC(并行分布补偿)方案不同的是,本文将采用模糊脉冲控制技术来实现控制.

对于 T-S 模糊系统:

$$\begin{aligned} R_i: \text{IF } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } z_m(t) \text{ is } M_{im}, \\ \text{THEN } \dot{x} = A_i x(t) + Bu(t) \end{aligned}$$

设计模糊脉冲控制器如下:

$$\begin{aligned} R_i: \text{IF } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } z_m(t) \text{ is } M_{im}, \\ \text{THEN } u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - \tau_k) F_i x(t) \end{aligned}$$

其中:  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_i < \tau_{i+1} < \cdots, (\tau_i \rightarrow \infty \text{ 当 } i \rightarrow \infty)$ .

被控系统的稳定性判定方法由以下定理给出<sup>[8]</sup>:

**定理 3** 设  $\lambda_i$  为矩阵  $(A_i + A_i^T)$  的最大特征值,  $\lambda_A$  为  $\lambda_i$  中的最大值  $(1 \leq i \leq p)$ ;  $\lambda_j$  为矩阵  $(I + BF_j)^T (I + BF_j)$  的最大特征值  $(1 \leq j \leq p)$ ,  $\lambda_F$  为  $\lambda_j$  中的最大值,  $(1 \leq j \leq p)$ , 其中  $BF_j$  为对称矩阵, 且  $(I + BF_j)$  的谱半径小于 1. 则模糊脉冲控制系统是渐近稳定的, 如果下式成立:

$$\lambda \delta + \ln(\zeta \lambda_F) \leq 0, \text{ 其中 } \zeta > 1, \delta = (\tau_{k+1} - \tau_k) \quad (12)$$

### 4 混沌系统模糊脉冲控制的实现

以 Nadolschi 混沌系统为例, 实现对其模糊脉冲控制. 相应的参数为  $a = 5, b = -10, c = -3.8, d_1 = 30, d_2 = 25$ . 初始值取  $(-12; 5; -4)$  时, Nadolschi 混沌系统的空间演化图如图 1 所示.

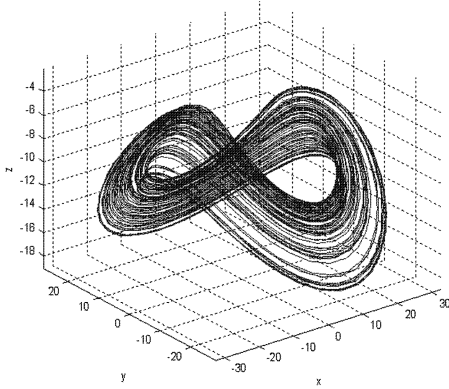


图1 Nadolschi 混沌系统的输出曲线  
Fig. 1 The output of Nadolschi system

$$M_1(x_2) = \frac{1}{2}(1 - \frac{x_2}{25}), M_1(x_2) = \frac{1}{2}(1 + \frac{x_2}{25}).$$

由此可得  $\lambda_A = 66.4399, \lambda_F = 0.64$ . 设  $\zeta = 1.001$ , 则由  $\lambda_A \delta + \ln(\zeta \lambda_F) \leq 0$  可得:  $0 \leq \delta \leq 0.0067$ . 我们取  $\delta = 0.005$  来实现对混沌系统的控制. 仿真结果如图 2 所示. 观察可知, 控制器实现了对平衡点的镇定.

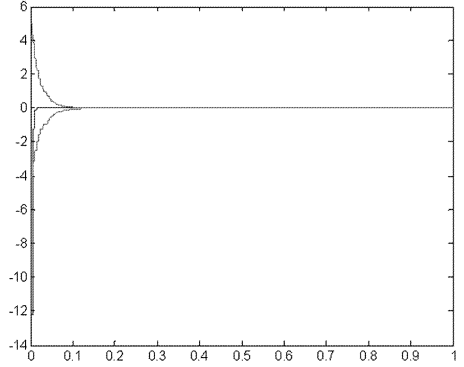


图2 受控后系统的输出曲线  
Fig. 2 The output of controlled system

闭环控制系统如下:

$$\begin{aligned} R_1: & \text{IF } x_1 \text{ is } M_1(x_1), \text{ THEN } \dot{x}(t) = A_1x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - \tau_k)BF_1x(t), \\ R_2: & \text{IF } x_2 \text{ is } M_2(x_2), \text{ THEN } \dot{x}(t) = A_2x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - \tau_k)BF_2x(t), \\ R_3: & \text{IF } x_3 \text{ is } M_3(x_3), \text{ THEN } \dot{x}(t) = A_3x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - \tau_k)BF_3x(t), \\ R_4: & \text{IF } x_4 \text{ is } M_4(x_4), \text{ THEN } \dot{x}(t) = A_4x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - \tau_k)BF_4x(t). \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -60 \\ 0 & -20 & -3.8 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 60 \\ 0 & 20 & -3.8 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 50 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -3.8 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -50 \\ 0 & -10 & 60 \\ 0 & 20 & -3.8 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ F_1 = F_2 = F_3 = F_4 &= \begin{bmatrix} -0.9 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$M_1(x_1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{x_1}{30}), M_1(x_2) = \frac{1}{2}(1 + \frac{x_1}{30}),$$

### 5 结论

本文首先给出了基于 T-S 模糊模型对非线性系统建模的原理. 得到系统模糊模型后, 与传统并行分布补偿方案不同的是, 本文将 T-S 模糊模型与脉冲控制方法相结合, 采用了模糊脉冲控制技术. 脉冲控制技术简单易行, 且更容易在数字电路中实现. 这种方法的有效性通过控制 Nadolschi 混沌系统得到验证.

### 参 考 文 献

- Zhong L. Fuzzy chaotic systems: modeling, control, and applications. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2006
- O. Calvo. Fuzzy control of chaos. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, 2006, 187: 99 ~ 125
- H O Wang and K Tanaka. Fuzzy modeling and control of chaotic systems. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, 2006, 187: 45 ~ 80
- H O Wang and K Tanaka. An LMI-based stable fuzzy control of nonlinear systems and its application to control of chaos. *Trans. Fuzz. Syst.*, 1996, 3: 1433 ~ 1438
- Kazuo Tanaka, Hua O Wang. Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. New York, John Wiley & Sons, 2001
- Yang T, Yang L B and Yang C M. Impulsive control of

- Lorenz system. *Physica D*, 1997, 110: 18 ~ 24
- 7 Zhong Q S, Bao J F, Yu Y B and Liao X F. Impulsive control for T-S fuzzy model-based chaotic systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, 79: 409 ~ 415
- 8 Zheng Y A and Chen G R. Fuzzy impulsive control of chaotic systems based on TS fuzzy model. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 39: 2002 ~ 2011
- 9 张丽萍, 姜海波, 毕勤胜. 一类非自治混沌系统的自适应脉冲同步. *动力与控制学报*, 2008, 6 (4): 312 ~ 316 (Zhang L P, Jing H B, Bi Q S. Adaptive impulsive synchronization for a class of non-autonomous chaotic systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6 (4): 312 ~ 316 (in Chinese))

## T-S MODEL-BASED IMPULSIVE CONTROL OF CHAOTIC SYSTEMS

Miao Zhiqiang Wang Yaonan

(College of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract** This paper presented a fuzzy impulsive control scheme for controlling of chaotic systems. First we gave the principle of T-S model-based approach to model the chaotic system. When the fuzzy model was obtained, a fuzzy impulsive control technique was proposed to control the chaotic system. The effectiveness of this methodology was illustrated by applying it to the control of the chaotic Ndolschi system.

**Key words** fuzzy control, chaos control, T-S model, impulsive control